

# Sólido deformable: un método universal

Mariano Vázquez Espí

Madrid, 8 de octubre de 2010.

## Claude Louis Marie Henri Navier (1785–1836) —Físico e ingeniero

Hacia 1820 planteó por primera vez —que se sepa— un método universal para la resolución de estructuras hiperestáticas de cables y cordales.

Sin embargo, es más conocido por la ecuación de Navier-Stokes de la mecánica de fluidos —aunque las malas lenguas dicen que la planteó por que no tenía ni idea de cómo representar fricciones en un fluido. Entre los físicos, se suele bromear con que la primera pregunta que harán a Dios cuando lleguen al paraíso es como demonios se resuelve. . .

## Energía, energía potencial, energía útil, 'exergía',...

---

- *ενεργεια* grecolatina: el trabajo o esfuerzo,  $\mathcal{T}$ , que cuesta producir un cambio («hacer algo»). **¡Se gasta!**

## Energía, energía potencial, energía útil, 'exergía',...

---

- *ενεργεια* grecolatina: el trabajo o esfuerzo,  $\mathcal{T}$ , que cuesta producir un cambio («hacer algo»). **¡Se gasta!**
- **energía potencial** escolástica,  $\mathcal{P}$ : como la grecolatina, pero se empieza a poder medir midiendo el trabajo realizado. EULER supuso que los sistemas físicos *tienden* hacia estados de equilibrio en los que la energía potencial es *mínima*.

## Energía, energía potencial, energía útil, 'exergía',...

- *ενεργεια* grecolatina: el trabajo o esfuerzo,  $\mathcal{T}$ , que cuesta producir un cambio («hacer algo»). **¡Se gasta!**
- **energía potencial** escolástica,  $\mathcal{P}$ : como la grecolatina, pero se empieza a poder medir midiendo el trabajo realizado. EULER supuso que los sistemas físicos *tienden* hacia estados de equilibrio en los que la energía potencial es *mínima*.
- **energía**,  $\mathcal{E}$ , a partir del XIX: un potencial conservativo de cualquier sistema físico; puede intercambiarse entre sistemas ('se transforma', cf. CLAUSIUS *et alii*). **¡No se gasta: se conserva!**

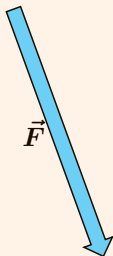
## Energía, energía potencial, energía útil, 'exergía',...

- *ΕΝΕΡΓΕΙΑ* grecolatina: el trabajo o esfuerzo,  $\mathcal{T}$ , que cuesta producir un cambio («hacer algo»). **¡Se gasta!**
- **energía potencial** escolástica,  $\mathcal{P}$ : como la grecolatina, pero se empieza a poder medir midiendo el trabajo realizado. EULER supuso que los sistemas físicos *tienden* hacia estados de equilibrio en los que la energía potencial es *mínima*.
- **energía**,  $\mathcal{E}$ , a partir del XIX: un potencial conservativo de cualquier sistema físico; puede intercambiarse entre sistemas ('se transforma', cf. CLAUSIUS *et alii*). **¡No se gasta: se conserva!**
- **energía útil**  $\mathcal{X}$  (o **exergía** a partir del XX): aquella parte de la energía  $\mathcal{E}$  de un sistema que, como máximo, puede aprovecharse para realizar trabajo  $\mathcal{T}$  —el resto se transforma en calor  $\mathcal{Q}$ :

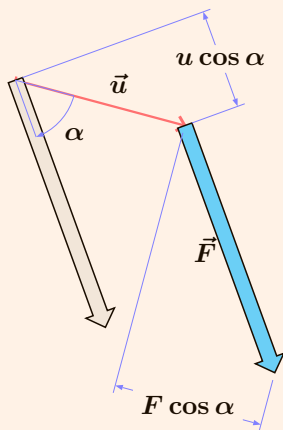
$$\mathcal{E} = \mathcal{X} + \mathcal{Q} \quad \boxed{\mathcal{T} \leq \mathcal{X}} \quad \mathcal{X} \approx \mathcal{P}$$

# Energía, energía potencial, energía útil, 'exergía',...

---



## Energía, energía potencial, energía útil, 'exergía',...



$$W = \vec{F} \cdot \vec{u} = Fu \cos \alpha$$

$$W = \sum_i F_i \cdot u_i$$

Si  $\vec{F} \perp \vec{u}$ ,  $W = 0$ .

Si  $\vec{F} \parallel \vec{u}$ ,  $W = Fu$ .



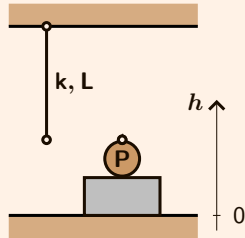
## Energía, energía potencial, energía útil, 'exergía',...

---

- Energía potencial gravitatoria,

$$\mathcal{G} = mgh = Ph$$

Cuanto más alto esté el peso, más  $\mathcal{G}$  tiene.



## Energía, energía potencial, energía útil, 'exergía',...

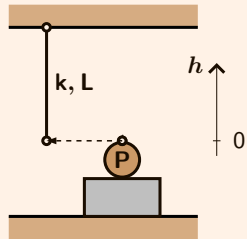
---

- Energía potencial gravitatoria,

$$\mathcal{G} = mgh = Ph$$

Cuanto más alto esté el peso,  
más  $\mathcal{G}$  tiene.

- Exergía en la posición inicial:  $\mathcal{X}_0 \approx 0$

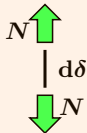
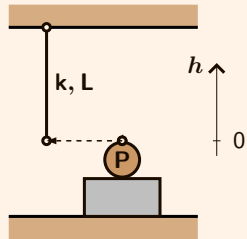


## Energía, energía potencial, energía útil, 'exergía',...

- Energía potencial de deformación  $\mathcal{D}$ :

Cuanto más trabajo hagamos para deformar el muelle o el cable, más  $\mathcal{D}$  almacena:

$$d\mathcal{D} = N d\delta = k \cdot \delta d\delta$$



## Energía, energía potencial, energía útil, 'exergía',...

- En el equilibrio, con  $N = P$ :

$$\mathcal{T} \approx \int_0^{\delta} N \, d\delta = k \int_0^{\delta} \delta \, d\delta = k \cdot \frac{\delta^2}{2}$$

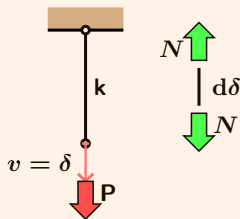
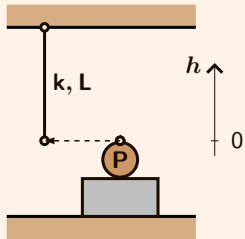
$$\mathcal{X} \approx \mathcal{G}(v) + \mathcal{D}(\delta) = -Pv + k\delta^2/2$$

- La segunda ley de la termodinámica asegura que en el equilibrio la exergía será mínima, y puesto que  $v = \delta$  (compatibilidad):

$$\frac{d\mathcal{X}}{d\delta} = \frac{d}{d\delta} \left( -P\delta + k\frac{\delta^2}{2} \right) = 0$$

es decir:

$$\delta = \frac{P}{k}$$



## Energía, energía potencial, energía útil, 'exergía',...

- En el equilibrio, con  $N = P$ :

$$\mathcal{T} \approx \int_0^\delta N d\delta = k \int_0^\delta \delta d\delta = k \cdot \frac{\delta^2}{2}$$

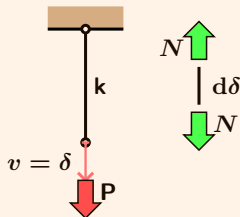
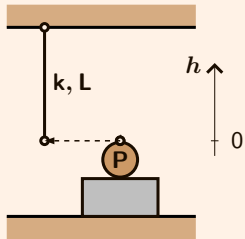
$$\mathcal{X} \approx \mathcal{G}(v) + \mathcal{D}(\delta) = -Pv + k\delta^2/2$$

- Otra posibilidad es el calculo de variaciones (EULER) en torno a la posición de equilibrio:

$$d\mathcal{X} = 0$$

$$-P dv + k\delta d\delta = 0$$

$$P = k\delta = N$$



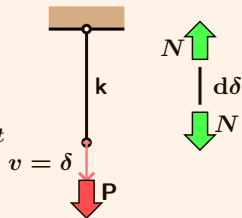
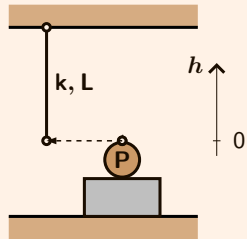
## Energía, energía potencial, energía útil, 'exergía',...

- $d\delta$  (o  $dv$  es una variación infinitesimal de  $\delta$  y, en mecánica, se le denomina también *desplazamiento virtual*. Para simplificar se simboliza con  $\delta^*$ ,  $\tilde{\delta}$ , etc. Al método que emplea movimientos virtuales, *trabajos virtuales*. La ecuación:

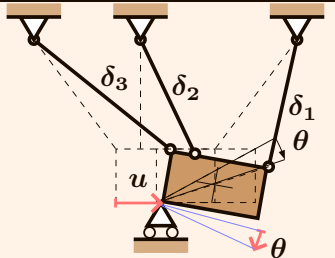
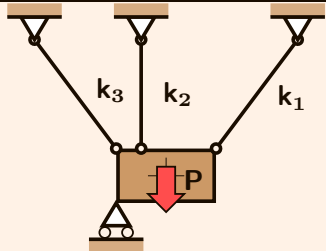
$$P dv = N d\delta$$

se escribe habitualmente:

$$dW_{ext} = dW_{int} \quad \text{ó} \quad W_{ext}^* = W_{int}^*$$

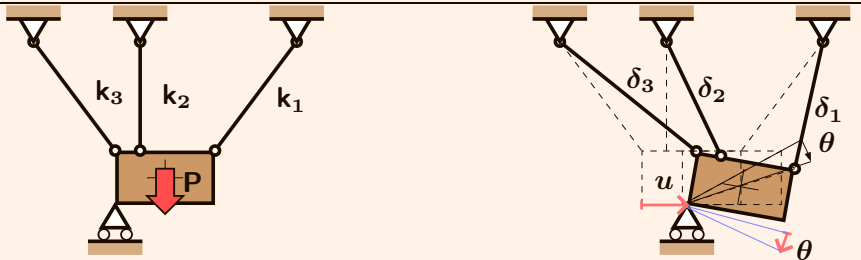


## Grados de libertad



- Grados de libertad ( $g = 2$ ):  $[g^T] = [u, \theta]$

## Grados de libertad



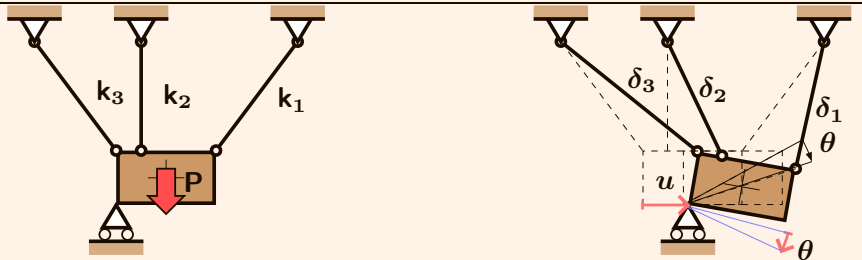
- Grados de libertad ( $g = 2$ ):  $[g^T] = [u, \theta]$

Los grados de libertad pueden elegirse, pero suele convenir:

- Incluir los movimientos de apoyos simples.
- Los dos movimientos,  $u$  y  $v$ , de nodos en los que confluyen cables o barras.
- En los sólidos indeformables, de ser posible, aquellos que permiten eliminar solicitaciones en la ecuación correspondiente.

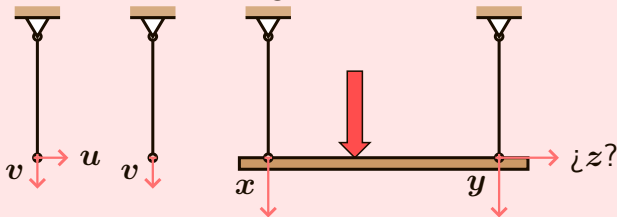


## Grados de libertad

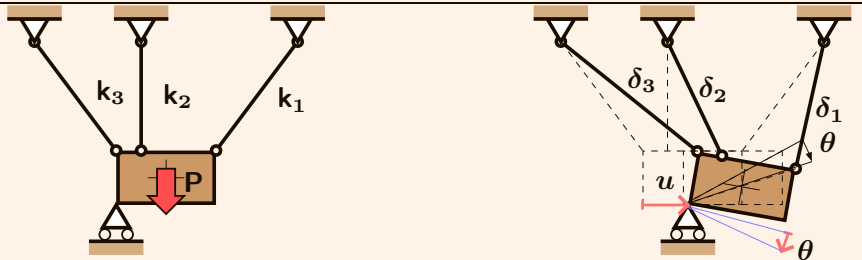


- Grados de libertad ( $g = 2$ ):  $[g^T] = [u, \theta]$

A veces basta con los grados relevantes:



## Grados de libertad

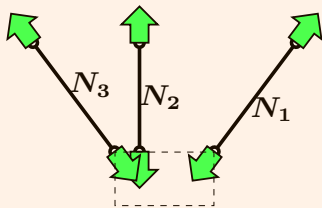
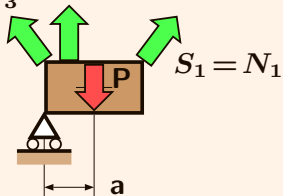


- Grados de libertad ( $g = 2$ ):  $[\mathbf{g}^T] = [u, \theta]$
- modos de deformación ( $s = 3$ ):  $[\mathbf{b}^T] = [\delta_1, \delta_2, \delta_3]$
- cada grado y cada modo deben ser **independientes** del resto
- $s$  ecuaciones de compatibilidad:

$$\delta_j \approx \sum_i B_{ji} g_i \quad (j = 1, \dots, s) \quad \text{o bien} \quad \begin{matrix} s \times 1 & s \times g & g \times 1 \\ [\mathbf{b}] \approx [\mathbf{B}] \cdot [\mathbf{g}] \end{matrix}$$

## Grados de libertad

$$S_3 = N_3 S_2 = N_2$$

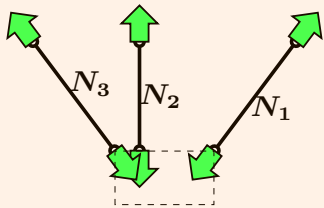
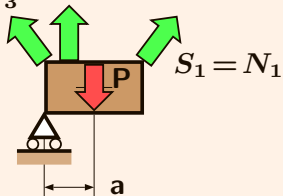


- Las acciones se expresan como fuerzas y momentos correspondientes a cada  $g_i$ :  $[a^T] = [0, Pa]$ .
- A cada deformación  $\delta_j$  le corresponderá un esfuerzo  $s_j$ :  
 $[s^T] = [N_1, N_2, N_3]$
- $g$  ecuaciones de equilibrio:

$$a_i \approx \sum_j H_{ij} N_j \quad (i = 1, \dots, g) \quad \text{o bien} \quad \begin{matrix} g \times 1 & g \times s & s \times 1 \\ [a] \approx [H] \cdot [s] \end{matrix}$$

## Grados de libertad

$$S_3 = N_3 S_2 = N_2$$



- $g$  ecuaciones de equilibrio:  $\vec{S} = -\vec{N}$

$$a_i + \sum_j H_{ij} S_j = 0 \quad \Rightarrow \quad a_i = - \sum_j H_{ij} S_j$$

$$a_i = \sum_j H_{ij} N_j$$

## Grados de libertad

La condición de equilibrio es:

$$W_{ext}^* = \overset{1 \times g}{[d\mathbf{g}^T]} \cdot \overset{g \times 1}{[\mathbf{a}]} = W_{int}^* = \overset{1 \times s}{[d\mathbf{b}^T]} \cdot \overset{s \times 1}{[\mathbf{s}]}$$

El movimiento virtual  $[d\mathbf{g}]$ ,  $[d\mathbf{b}]$  cumple, como cualquier otro, con la ecuación de compatibilidad:

$$[d\mathbf{b}] \approx [\mathbf{B}][d\mathbf{g}] \quad [d\mathbf{b}^T] \approx [d\mathbf{g}^T][\mathbf{B}^T]$$

y por tanto:

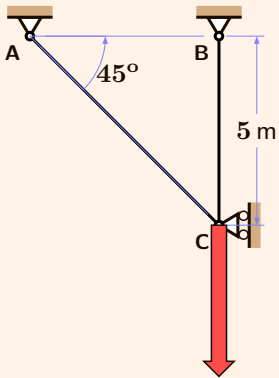
$$\overset{1 \times g}{[d\mathbf{g}^T]} \cdot \overset{g \times 1}{[\mathbf{a}]} \approx \overset{1 \times g}{[d\mathbf{g}^T]} \overset{g \times s}{[\mathbf{B}^T]} \cdot \overset{s \times 1}{[\mathbf{s}]} \quad \text{es decir,} \quad \overset{g \times 1}{[\mathbf{a}]} \approx \overset{g \times s}{[\mathbf{B}^T]} \cdot \overset{s \times 1}{[\mathbf{s}]}$$

Comparando con las ecuaciones de equilibrio:

$$[\mathbf{H}] = [\mathbf{B}^T] \quad \text{ó} \quad [\mathbf{H}^T] = [\mathbf{B}]$$

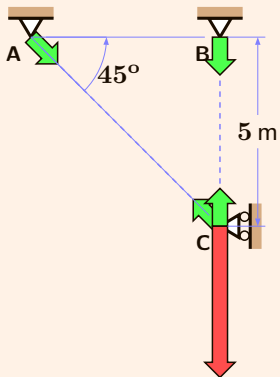
# Dos cables y un peso que desciende

---



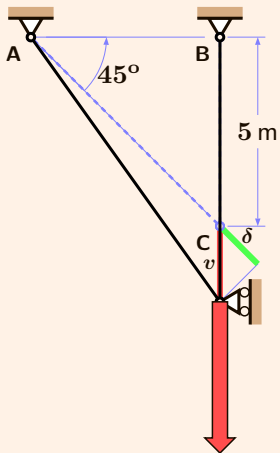
## Dos cables y un peso que desciende

---



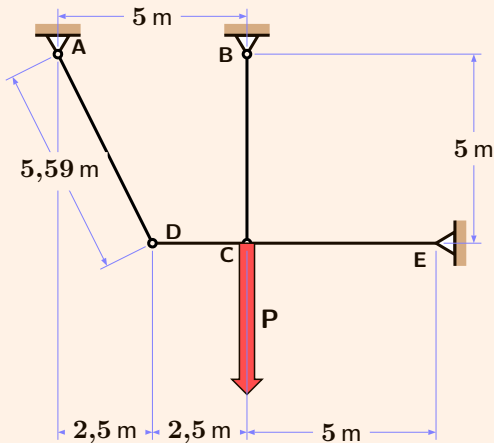
## Dos cables y un peso que desciende

---

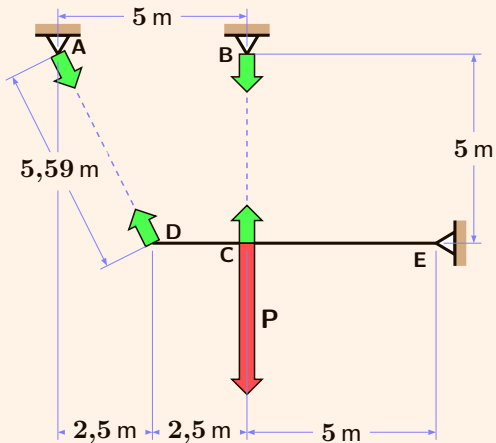




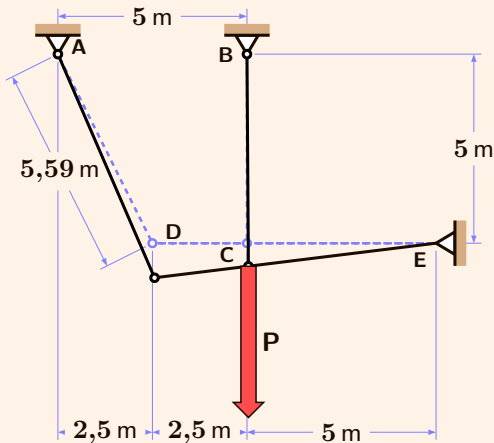
## Dos cables y una tabla que gira



## Dos cables y una tabla que gira



## Dos cables y una tabla que gira



## Un método universal

---

La solución 'universal' para cualesquiera  $g$  y  $s \geq g$  pasa por especificar el comportamiento de cada cable. En el periodo proporcional:

$$s_j = k_j \delta_j \quad (j = 1, \dots, s) \quad \text{o bien} \quad \begin{matrix} s \times 1 & s \times s & s \times 1 \\ [s] = [D_p] \cdot [b] \end{matrix}$$

Equilibrio:

$$\begin{matrix} g \times 1 & g \times s & s \times 1 \\ [a] \approx [H] [s] \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} g \times 1 \\ [a] \end{matrix} \approx \begin{matrix} g \times s & s \times s & s \times 1 \\ [H] [D_p] [b] \end{matrix} \approx \begin{matrix} g \times s & s \times s & s \times g & g \times 1 \\ [B^T] [D_p] [B] \cdot [g] \end{matrix} = \begin{matrix} g \times g & g \times 1 \\ [K_p] \cdot [g] \end{matrix}$$

$[K_p]$  se denomina **rigidez de la estructura** —con un papel análogo al de  $k$  en un cable, o  $E$  en un material.

## Un método universal

---

La solución se expresa en función de la inversa de la rigidez (matriz de flexibilidad):

$$\begin{matrix} g \times 1 \\ [\mathbf{g}] \end{matrix} \approx \begin{matrix} g \times g \\ [\mathbf{K}_p^{-1}] \end{matrix} \cdot \begin{matrix} g \times 1 \\ [\mathbf{a}] \end{matrix}$$

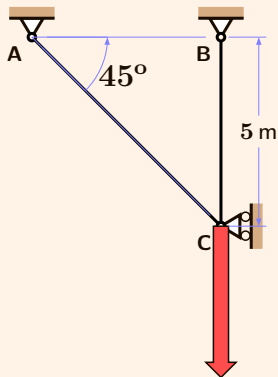
y

$$\begin{matrix} s \times 1 \\ [\mathbf{s}] \end{matrix} \approx \begin{matrix} s \times s & s \times g \\ [\mathbf{D}_p] & [\mathbf{B}] \end{matrix} \cdot \begin{matrix} g \times 1 \\ [\mathbf{g}] \end{matrix} = \begin{matrix} s \times s & s \times g \\ [\mathbf{D}_p] & [\mathbf{B}] \end{matrix} \cdot \begin{matrix} g \times g & g \times 1 \\ [\mathbf{K}_p^{-1}] & \end{matrix} \cdot \begin{matrix} g \times 1 \\ [\mathbf{a}] \end{matrix}$$

Si existe una solución ( $\|[\mathbf{K}_p]\| \neq 0$ ) debe cumplir con:

- movimientos pequeños
- proporcionalidad entre tensiones y deformaciones

## Dos cables y un peso que desciende



$$[B] = \begin{bmatrix} 0,71 \\ 1 \end{bmatrix}$$

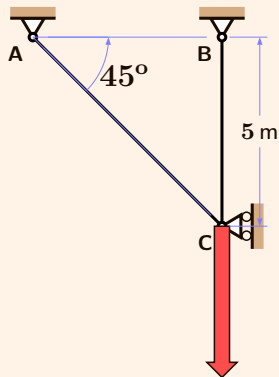
$$[D] = \begin{bmatrix} k_A & \\ & k_B \end{bmatrix}$$

siendo  $k = EA \div L$ .

Con igual área y del mismo material:

$$[D] = \begin{bmatrix} 0,71k_B & \\ & k_B \end{bmatrix}$$

## Dos cables y un peso que desciende



$$[B] = \begin{bmatrix} 0,71 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} k_A & \\ & k_B \end{bmatrix}$$

siendo  $k = EA \div L$ .

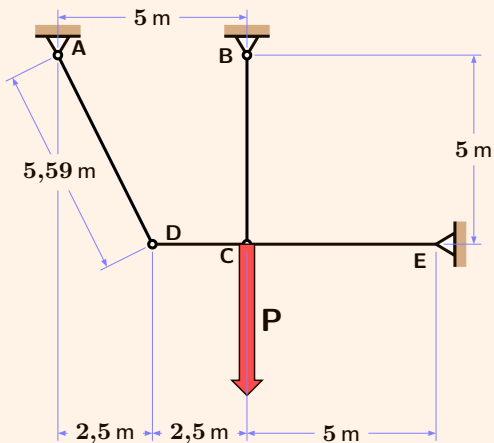
Con igual área y del mismo material:

$$[D] = \begin{bmatrix} 0,71k_B & \\ & k_B \end{bmatrix}$$

$$[K] = 1,36k_B; [K^{-1}] = 0,74 \div k_B;$$

$$[[D][B][K^{-1}]^T] = [0,37 \quad 0,74].$$

## Dos cables y una tabla que gira



$$[H]=[B^T]=[6, 71 \text{ m} \quad 5 \text{ m}]$$

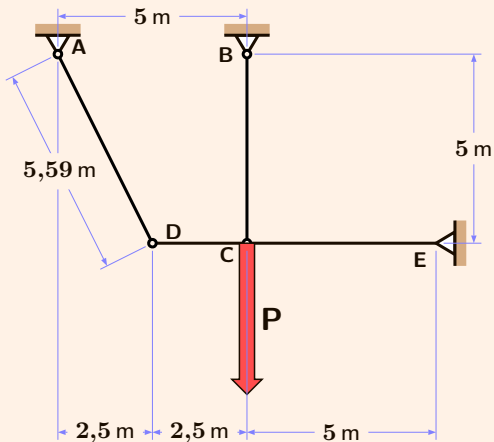
Con  $A_A = A_B$  y  $E_A = E_B$ :

$$[D]=\begin{bmatrix} 0, 89k_B & \\ & k_B \end{bmatrix}$$

siendo  $k = EA \div L$ .



## Dos cables y una tabla que gira



$$[H]=[B^T]=[6,71 \text{ m} \quad 5 \text{ m}]$$

Con  $A_A = A_B$  y  $E_A = E_B$ :

$$[D]=\begin{bmatrix} 0,89k_B & \\ & k_B \end{bmatrix}$$

siendo  $k = EA \div L$ .

$$[K]=65,3 \text{ m}^2 \cdot k_B;$$

$$[[D][B][K^{-1}]^T] =$$

$$\begin{bmatrix} 92,0 \text{ m}^{-1} & 76,6 \text{ m}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\cdot 10^{-3}.$$

$$[[D][B][K^{-1}]^T] \cdot 5 \text{ m} =$$

$$[0,46 \quad 0,38].$$

## Carga elástica, carga de rotura

---

Bajo la carga de servicio, el cable más cercano al límite elástico se reconoce por cumplir la condición:

$$\lambda_e = \min_j \left( \frac{\sigma_e}{\sigma} \right)_j$$

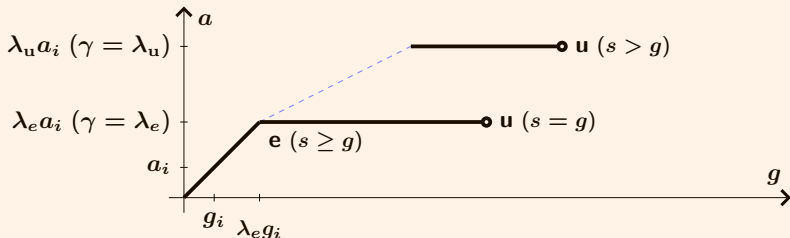
La carga elástica de la estructura se obtiene sin más que multiplicar por  $\lambda_e$  la carga de servicio:

$$[\mathbf{a}_e] = \lambda_e \cdot [\mathbf{a}]$$

Para cargas mayores, se producirá la rotura si  $g = s$  (y  $\lambda_e$  es entonces el coeficiente de seguridad neto).

Si  $g < s$  puede que el resto de la estructura soporte carga adicional. . .

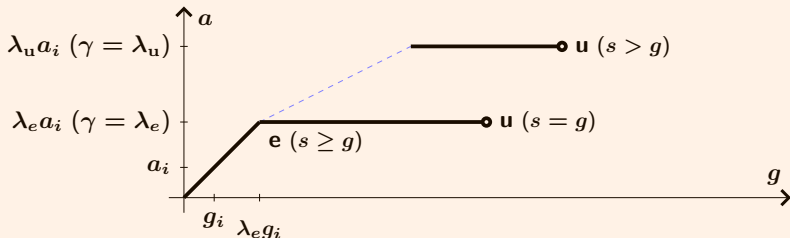
## Carga elástica, carga de rotura



### Rotura en estructuras dúctiles:

- aumentan los movimientos a **carga constante**
- por cada cable que plastifica se 'pierde' un modo de deformación de la estructura:  $s \rightarrow g$

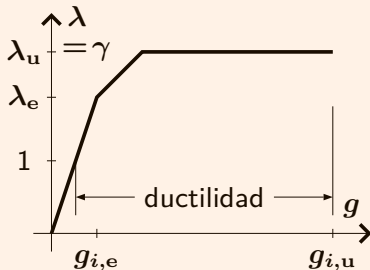
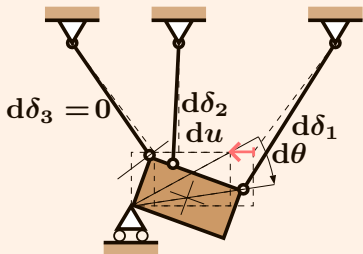
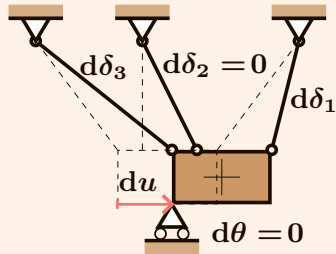
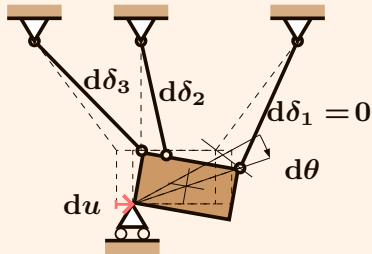
## Carga elástica, carga de rotura

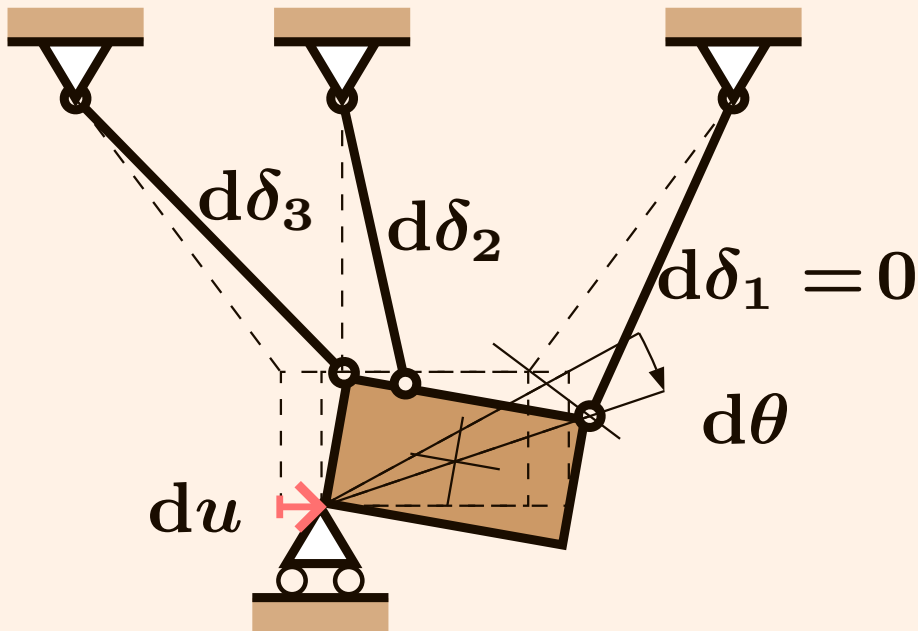


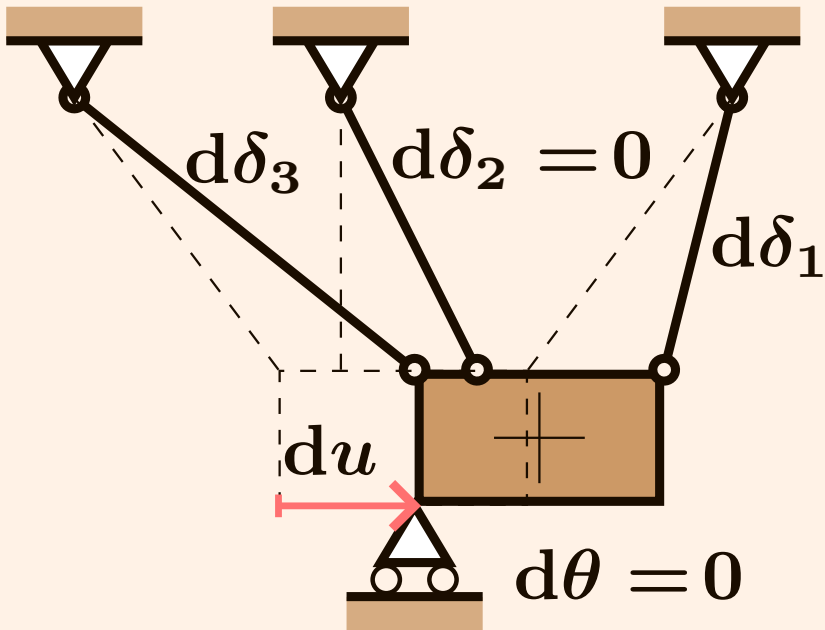
### Rotura en estructuras dúctiles:

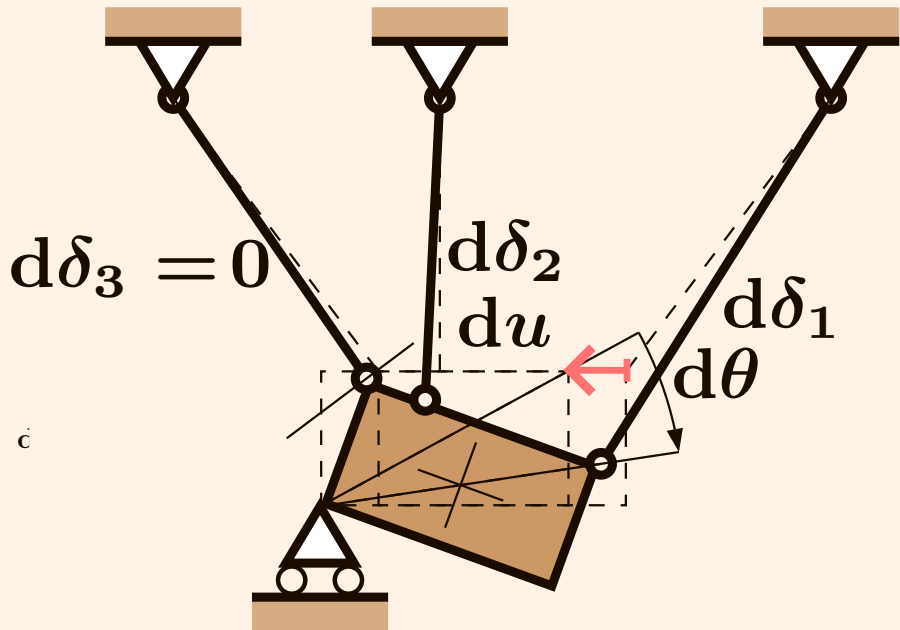
- comienza cuando alcanzan o superan el límite elástico al menos  $s - g + 1$  cables de los  $s$
- los cables en periodo plástico siguen resistiendo una tracción  $N_{uj} = (\sigma_u \mathbf{A})_j$  mientras que  $\varepsilon_j < (\varepsilon_u)_j$ ; mientras que los cables en periodo proporcional **no** varían su deformación ni su tensión ni su esfuerzo: serán como mucho  $g - 1$ .

# Carga elástica, carga de rotura





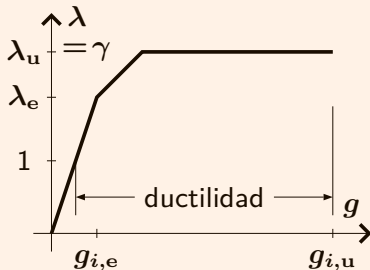
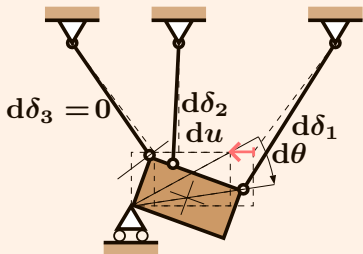
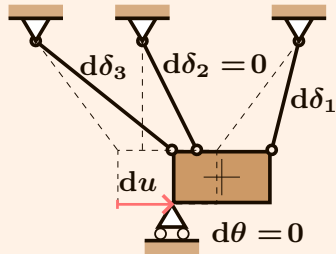
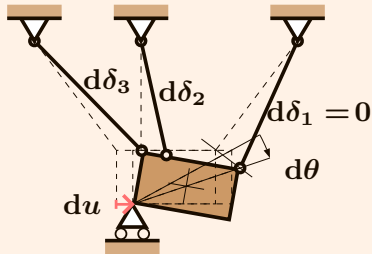




c.

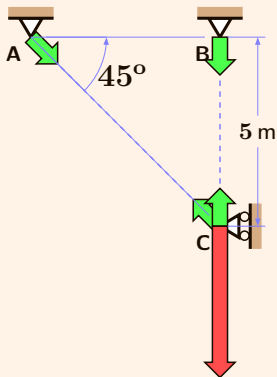


# Carga elástica, carga de rotura

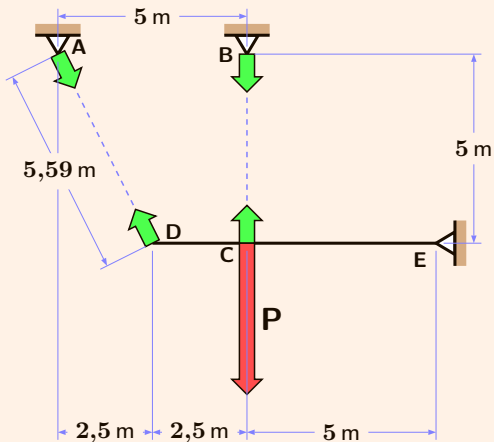


## Dos cables y un peso que desciende

$$P_u = N_u \cdot \sin 45^\circ + N_u$$



## Dos cables y una tabla que gira



Con  $A_A = A_B$ :

$$P_u \cdot 5 \text{ m} =$$

$$\begin{bmatrix} 6,71 \text{ m} & 5 \text{ m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_u \\ N_u \end{bmatrix}$$

# Sólido deformable: un método universal

Mariano Vázquez Espí

GIAU+S (UPM)

Grupo de Investigación en Arquitectura, Urbanismo y Sostenibilidad

Universidad Politécnica de Madrid

<http://habitat.aq.upm.es/gi>

Edición del 8 de octubre de 2010

Compuesto con *free software*:  
GNULinux/L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X/dvips/ps2pdf

Copyright © Vázquez Espí, 2010