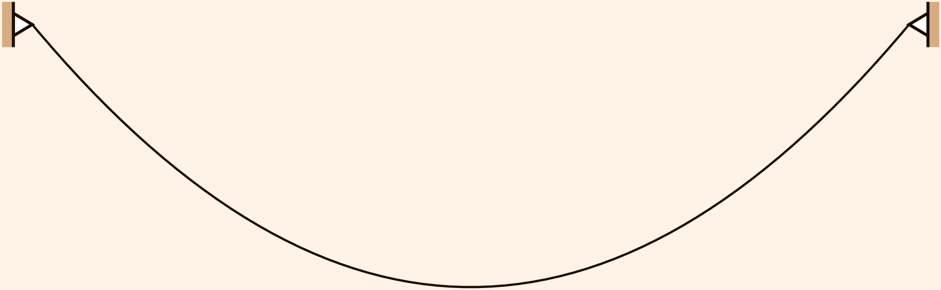
Mecánica de Sólidos y Sistemas Estructurales

Estructuras trianguladas: Resistencia

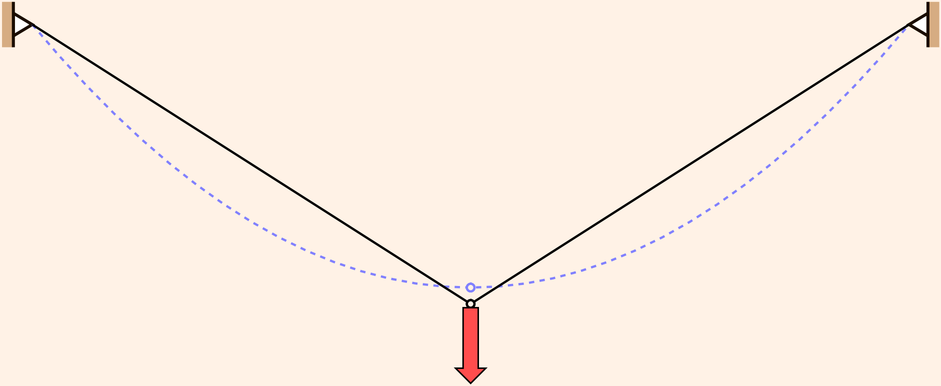
Mariano Vázquez Espí

Villamanta/Ondara/Madrid, 8 de noviembre de 2010.

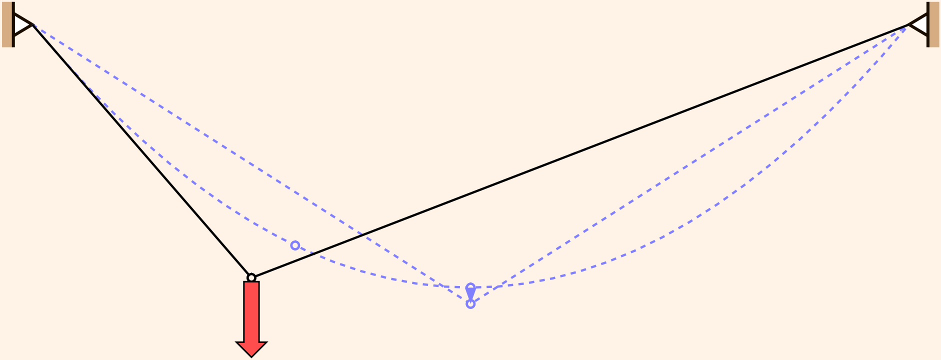
funiculares



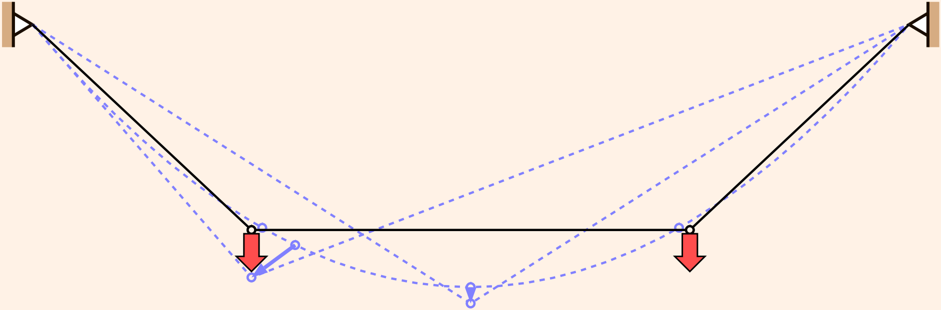
funiculares



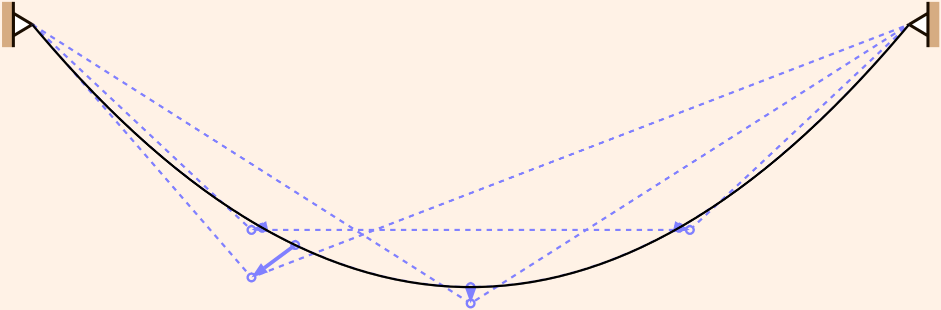
funiculares



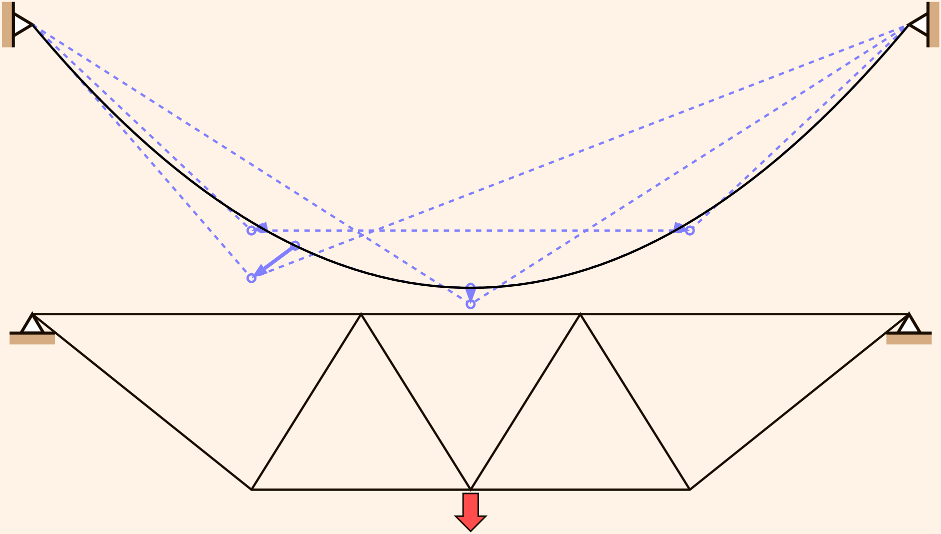
funiculares



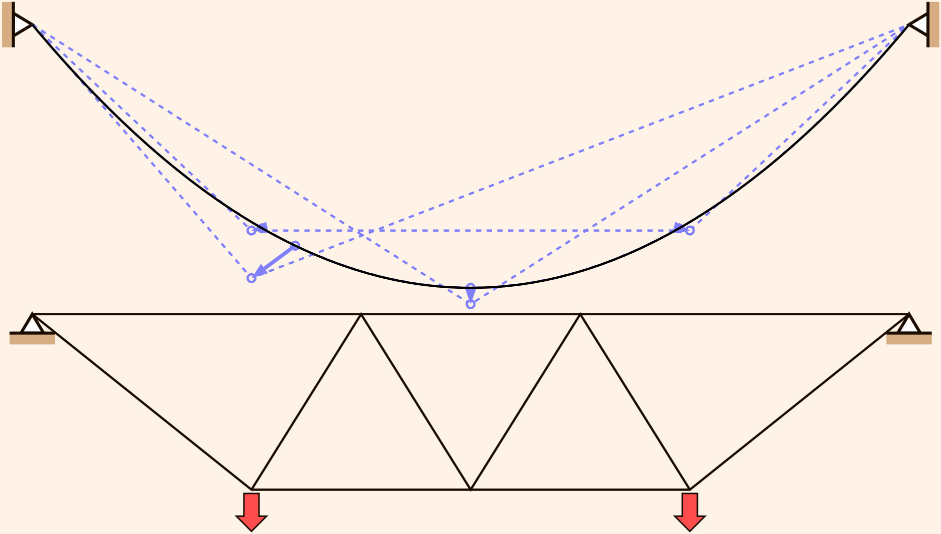
funiculares



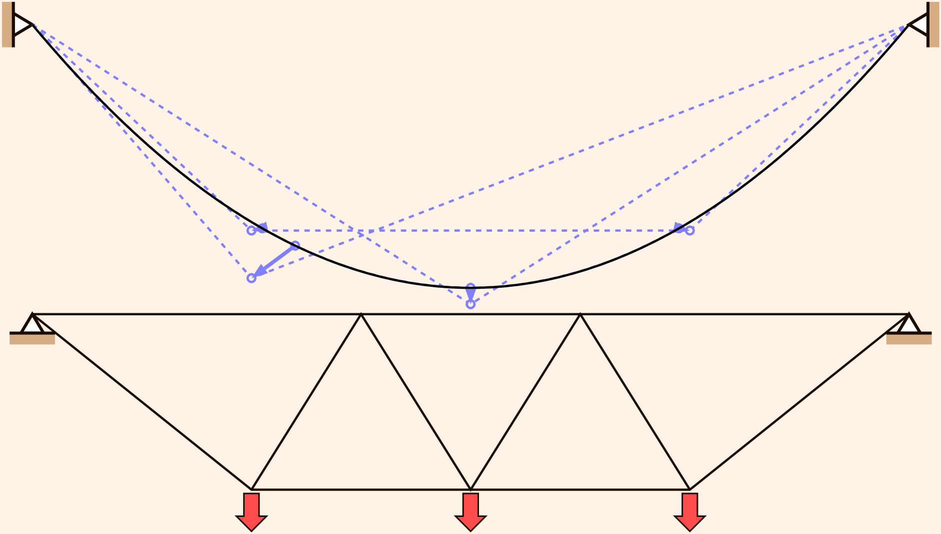
funiculares



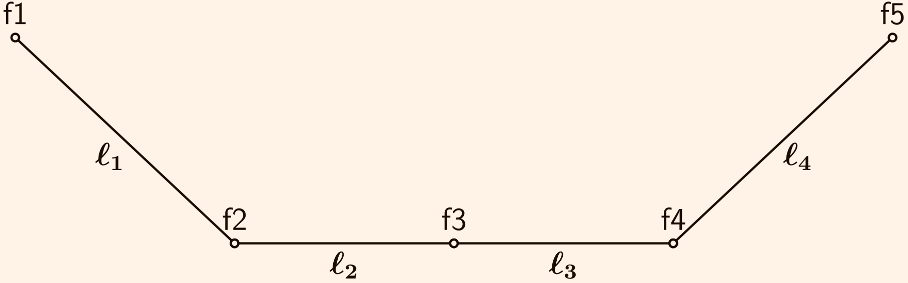
funiculares



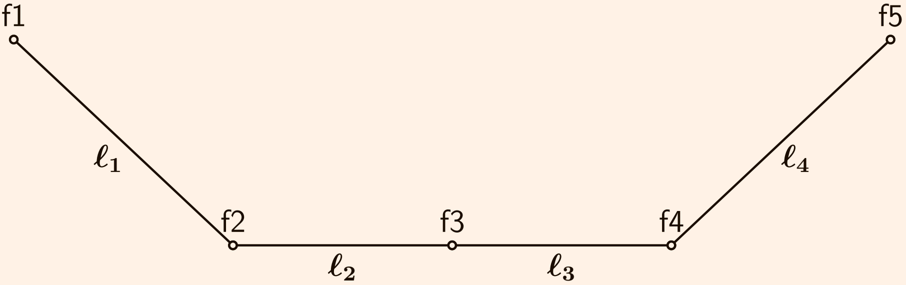
funiculares



funiculares *versus* cerchas



funiculares *versus* cerchas



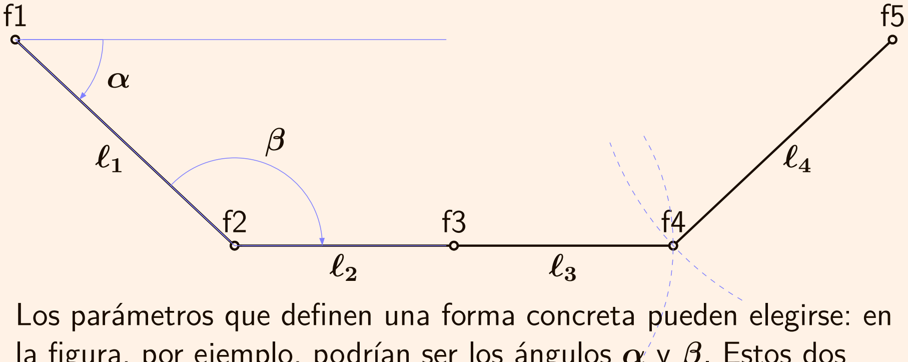
Incógnitas: coordenadas x, y: 5 puntos $\times\ 2 = 10$

Ecuaciones: 8

- sustentación: $x_1 = y_1 = x_5 = 0, y_5 =$ **L**: 4 ecuaciones
- longitudes conocidas (por 'Pitágoras'): $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \ell_1$, etc: 4 ecuaciones

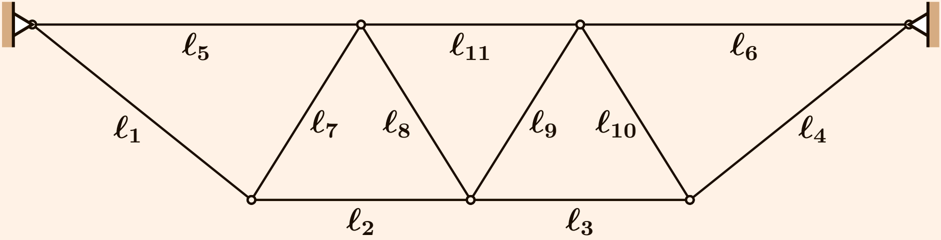
$10 - 8 = 2$: 2 grados de libertad geométrica

funiculares *versus* cerchas



Los parámetros que definen una forma concreta pueden elegirse: en la figura, por ejemplo, podrían ser los ángulos α y β. Estos dos ángulos, junto con las cuatro longitudes fijas, determinan completamente todas las coordenadas desconocidas de los puntos 2, 3 y 4.

funiculares *versus* cerchas



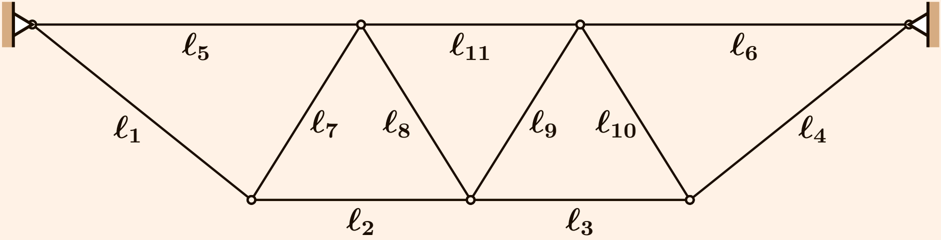
Incógnitas: $\mathbf{7}$ puntos $\times\ \mathbf{2} = \mathbf{14}$.

Ecuaciones: 15:

- Sustentación: 4
- Longitudes: 11

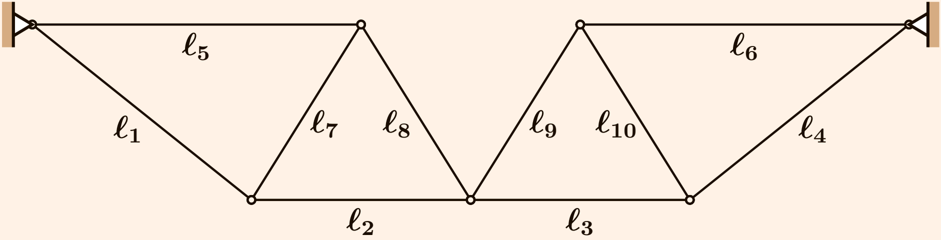
Hay una ecuación más (15) que coordenadas (14): la forma está sobredeterminada: una de las longitudes está determinada al fijar valores para el resto.

funiculares *versus* cerchas



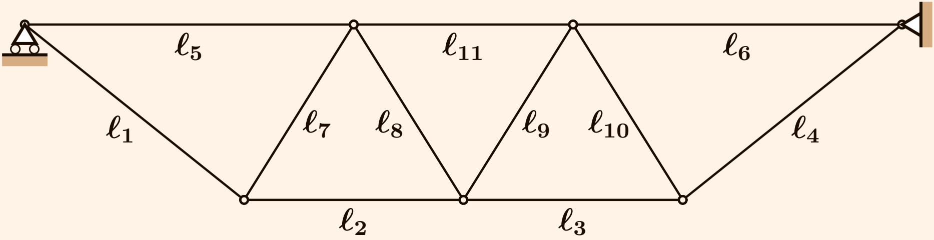
Podemos quitar una de las barras, por ejemplo la 11, y la forma de la triangulación seguiría estando determinada por la sustentación y por las longitudes de las barras.

funiculares *versus* cerchas



Podemos quitar una de las barras, por ejemplo la 11, y la forma de la triangulación seguiría estando determinada por la sustentación y por las longitudes de las barras.

funiculares *versus* cerchas



O podemos dejar todas las barras, y suprimir un vínculo cambiando una articulación por un apoyo, por ejemplo la de la izquierda.

condición necesaria

En general, en una triangulación de N puntos, E distancias conocidas y V coordenadas conocidas de antemano, se tendrá lo siquiente:

- $V \geq 3$: al menos tres coordenadas son conocidas, o pueden fijarse arbitrariamente (movimiento del conjunto como sólido indeformable).
- Al comparar $2N$ con $V + E$:
  - $2N > V + E$: forma indeterminada: en general habrá infinitas formas que cumplan con las $V + E$ ecuaciones
  - $2N = V + E$: forma determinada
  - $2N < V + E$: forma sobredeterminada: para que una forma cumpla con las $V + E$ ecuaciones, habrá que elegir $V + E - 2N$ longitudes en función del resto

condición necesaria

En estructura de barras articuladas de N *nudos*, E barras y V condiciones de sustentación sometida a un conjunto dado de acciones tendremos: $2N$ ecuaciones de equilibrio (dos por nudo); y V reacciones y E esfuerzos, $V + E$ incógnitas. Al comparar $2N$ con $V + E$:

- $2N > V + E$: en general no habrá equilibrio, salvo para una forma determinada (estructura funicular)
- $2N = V + E$: si hay equilibrio, las reacciones y solicitaciones están unívocamente determinadas por las ecuaciones (estructura *isostática*)
- $2N < E + E$: si hay equilibrio, las reacciones y solicitaciones no están, en general, determinadas por las ecuaciones (estructura *hiperestática*), y habrá que analizar la deformación de la estructura (ecuaciones de compatibilidad)

condición necesaria

En resumen,

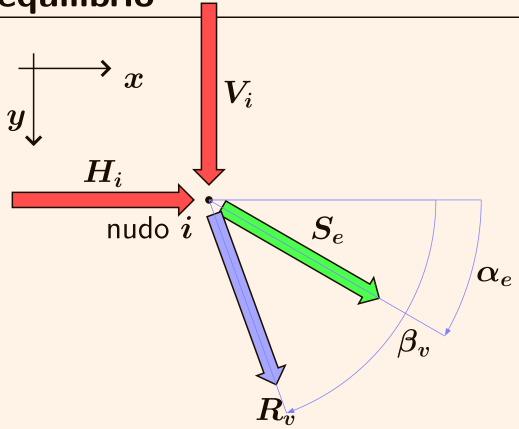
$$\boldsymbol{2N \leq V + E}$$

con

$$\boldsymbol{V \geq 3}$$

es la condición necesaria (pero no suficiente) para que una estructura triangulada esté en equilibrio con un conjunto arbitrario de acciones sin sufrir grandes deformaciones durante la carga.

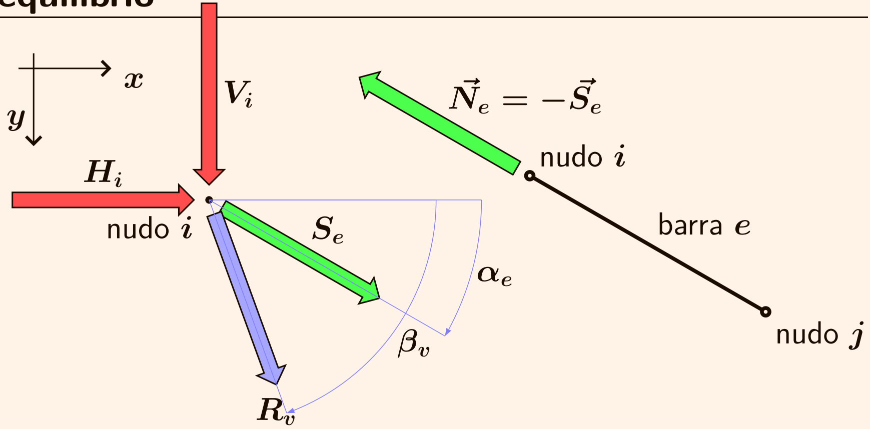
equilibrio



$$H_i + \sum_e S_e \cos(\alpha_e) + \sum_v R_v \cos(\beta_v) = 0$$

$$V_i + \sum_e S_e \sin(\alpha_e) + \sum_v R_v \sin(\beta_v) = 0$$

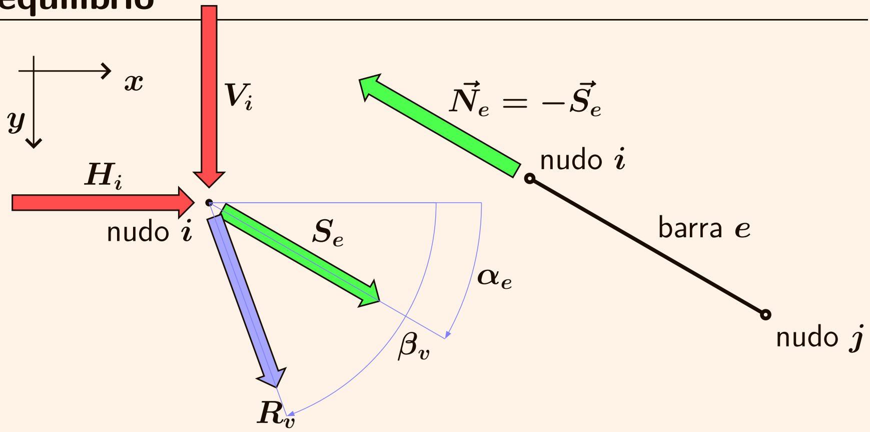
equilibrio



$$-\sum_e S_e \cos(\alpha_e) - \sum_v R_v \cos(\beta_v) = H_i$$

$$-\sum_e S_e \sin(\alpha_e) - \sum_v R_v \sin(\beta_v) = V_i$$

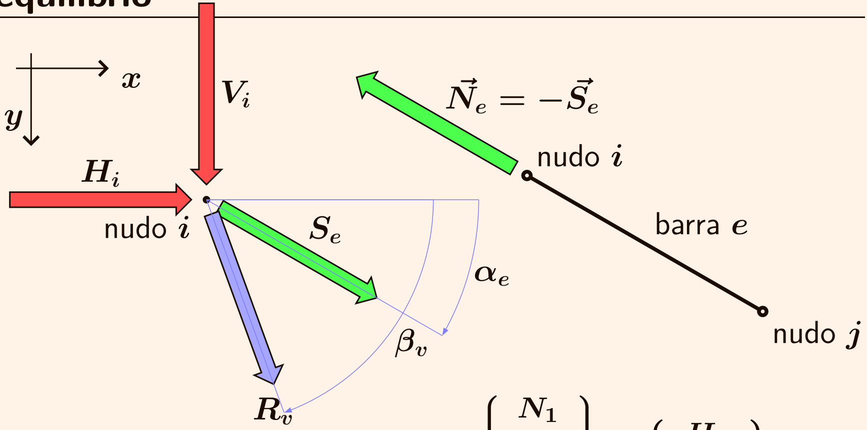
equilibrio



$$\sum_e N_e \cos(\alpha_e) - \sum_v R_v \cos(\beta_v) = H_i$$

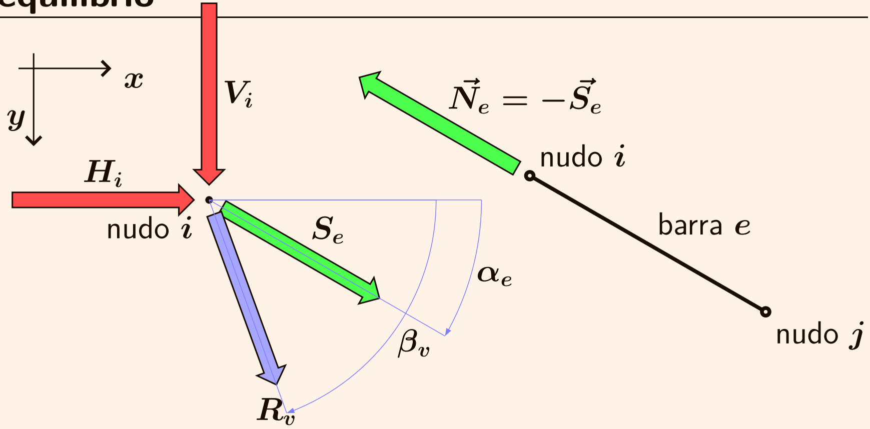
$$\sum_e N_e \sin(\alpha_e) - \sum_v R_v \sin(\beta_v) = V_i$$

equilibrio



$$Ax = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{E+V,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{2N,1} & \cdots & A_{2N,E+V} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_E \\ R_1 \\ \vdots \\ R_V \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ \vdots \\ H_N \\ V_N \end{Bmatrix} = b$$

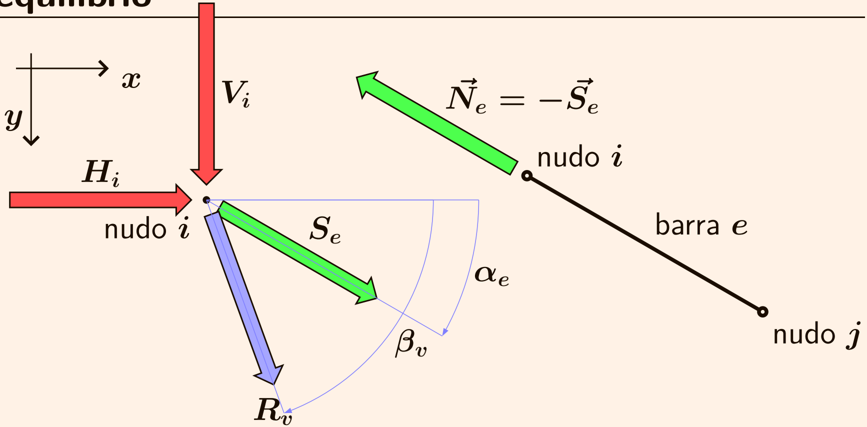
equilibrio



$$\overset{2N\times(E+V)}{[A]} \cdot \overset{(E+V)\times 1}{[x]} = \overset{2N\times 1}{[b]}$$

La condición suficiente para que las ecuaciones de equilibrio tengan solución es que el rango de la matriz A sea $2N$.

equilibrio

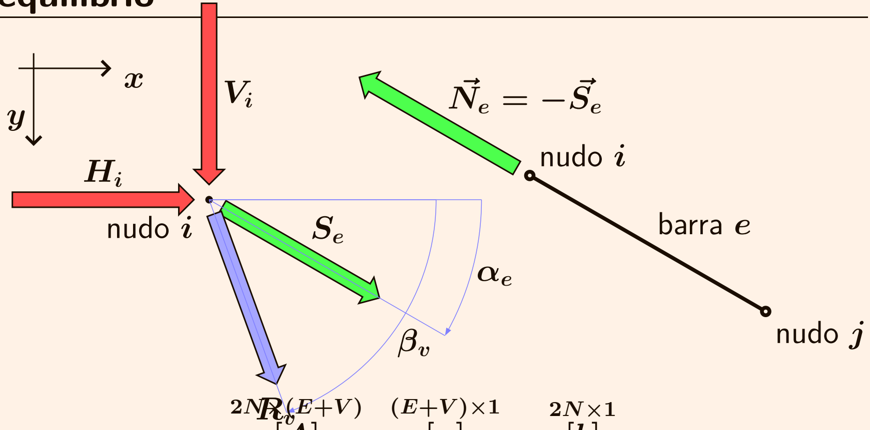


$$\overset{2N\times(E+V)}{[A]} \cdot \overset{(E+V)\times 1}{[x]} = \overset{2N\times 1}{[b]}$$

<u>cerchas *isostáticas*</u>, $2N = E + V$, y la condición suficiente se reduce a que

$$\boxed{\det A \neq 0}$$

equilibrio



$$\overset{2N\times(E+V)}{[A]} \cdot \overset{(E+V)\times 1}{[x]} = \overset{2N\times 1}{[b]}$$

cerchas *hiperestáticas*, $2N < E+V$, y si se cumple la condición suficiente hay infinitas soluciones, es decir, se puede elegir arbitrariamente los valores del esfuerzo de $E+V-2N$ barras, y determinar el resto de las incógnitas en función de ellos.

Resistencia

- En general una cercha estará sometida a H hipótesis de carga distintas.
- Cada barra tendrá que hacer frente a distintos valores de esfuerzo normal; incluso puede estar en ocasiones traccionada unas veces y comprimida otras:

$$\text{tracción pésima}_e = \max_h(N_{e,h})$$

$$\text{compresión pésima}_e = \min_h(N_{e,h})$$

Resistencia

- **Barras traccionadas** $N_e > 0$: Si $N = N_e$,

  Comprobación: $N \leq \mathsf{\mathbf{Af}} = \mathcal{R}_\mathrm{T}$

  Dimensionado: $A \geq \mathsf{\mathbf{A}}_\mathrm{min} = N/\mathsf{\mathbf{f}}$

Resistencia

- **Barras traccionadas** $N_e > 0$: Si $N = N_e$,

  Comprobación: $N \leq \mathsf{Af} = \mathcal{R}_\mathrm{T}$

  Dimensionado: $A \geq \mathsf{A}_\mathrm{min} = N/\mathsf{f}$

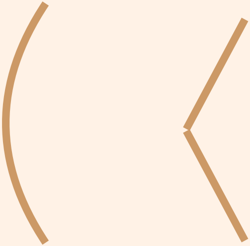
- **Barras sin tensión** $N_e = 0$: Si la cercha es isostática *son necesarias y no pueden suprimirse*, pues de hacerlo $E + V < 2N$ y la estructura sería funicular. Se dimensionan con el menor perfil disponible.

  Si la cercha es hiperestática podrían suprimirse...

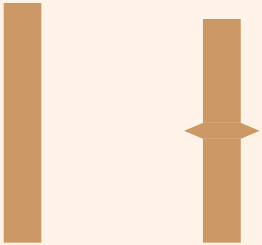
  Aunque son frecuentes en *una* hipótesis de carga particular, son raras cuando se consideran varias. Son inexistentes en cuanto se considera el peso propio de la estructura.

Resistencia

- **Barras comprimidas** $N_e < 0$:



Barras muy esbeltas
Rotura por flexión o pandeo
$\mathcal{R}_\mathrm{C} \ll \mathbf{Af}$



Barras poco esbeltas
Rotura por aplastamiento
$\mathcal{R}_\mathrm{C} \simeq \mathbf{Af}$

Resistencia

- **Barras comprimidas** $N_e < 0$: Si $N = \text{abs}\,(N_e)$,

  Esbeltez geométrica: ℓ/h. Esbeltez mecánica: $\ell/\mathbf{i}$, siendo $\mathbf{i}$ el radio de giro de la sección, $\mathbf{i} = \sqrt{\mathbf{I}/\mathbf{A}}$. Coeficiente de pandeo ω, función de la esbeltez geométrica y del material empleado: $\omega \geq 1$ siempre.

  Comprobación: $$N \leq \frac{\mathbf{Af}}{\omega} = \mathcal{R}_\mathrm{C}$$

  Dimensionado: Por tanteo, dado que en la expresión anterior ω depende de $\mathbf{A}$ y no es fácil despejar $\mathbf{A}$.

  La fracción $\mathbf{A} \div \omega$, siempre menor que $\mathbf{A}$, puede considerarse el *área eficaz* para resistir compresiones, $\mathbf{A}_\mathbf{ef}$; tanto menor cuanto más esbelta sea la barra.

Resistencia

- **Barras comprimidas** $N_e < 0$: Por ejemplo, para una sección cuadrada de lado **a**:
  - Área: $\mathbf{A} = \mathbf{a}^2$
  - Inercia: $\mathbf{I} = \mathbf{a}^4 \div \mathbf{12}$
  - Radio de giro: $\mathbf{i} = \mathbf{a} \div \sqrt{\mathbf{12}} \simeq \mathbf{0{,}29a}$
  - Esbeltez mecánica $\boldsymbol{\lambda}_m = \dfrac{\boldsymbol{\ell}}{\mathbf{i}}$
  - Coeficiente de pandeo $\boldsymbol{\omega}$: se encuentra en la tabla correspondiente al tipo de perfil y material empleado entrando con $\boldsymbol{\lambda}_m$
  - Resistencia con seguridad a compresión $\mathcal{R}_\mathrm{C} = \mathbf{Af} \div \boldsymbol{\omega}$

Resistencia

- **Barras comprimidas** $N_e < 0$:

Radio de giro de secciones axisiméticas

Sección		Radio de giro
cuadrada maciza	■	$\mathbf{0,29} \times$ lado
cuadrada hueca	□	$\approx \mathbf{0,40} \times$ lado
circular	●	$\mathbf{0,25} \times$ diámetro
circular hueca	○	$\approx \mathbf{0,35} \times$ diámetro

Resistencia

- **Barras traccionadas y comprimidas alternativamente**:

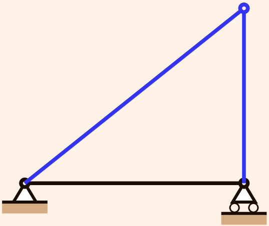
  Es imprescindible comprobar o diseñar su resistencia para las dos situaciones extremas.

cerchas ‘‘simples’’

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbf{2N} & & \boldsymbol{E+V} \\ \mathbf{2\times 2} & = & \mathbf{1+3} \end{array}}$$

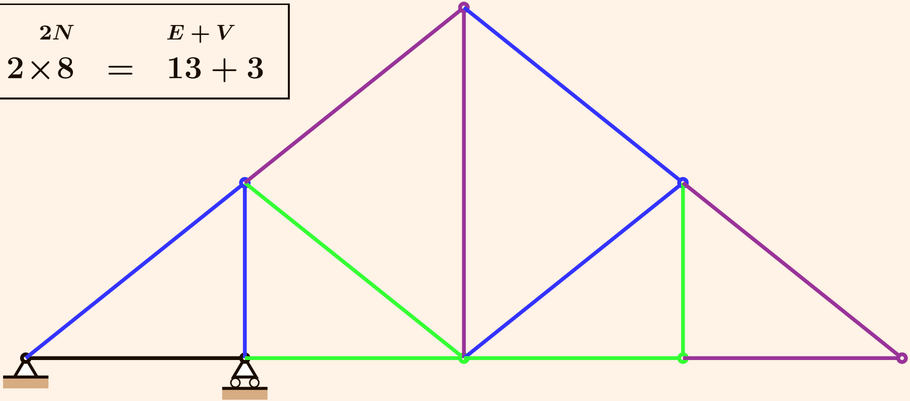
cerchas “simples”

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{2N} & & \boldsymbol{E+V} \\ \mathbf{2\times 3} & = & \mathbf{3+3} \end{array}$$



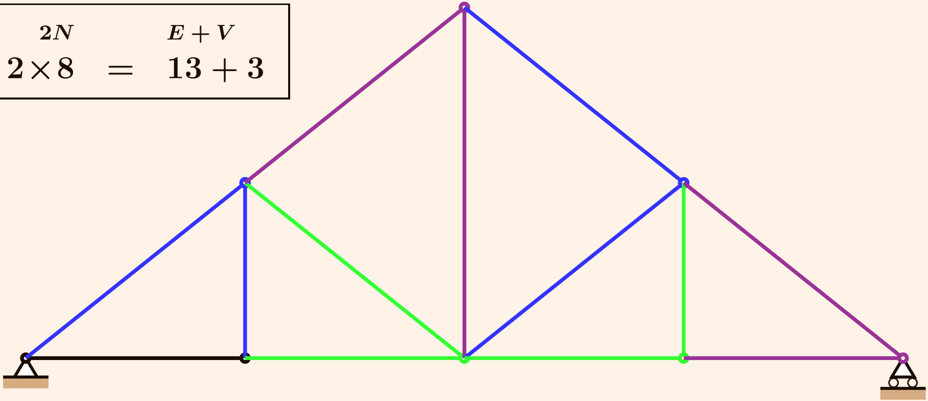
cerchas ‘‘simples’’

$2N$		$E+V$
2×8	$=$	$13+3$



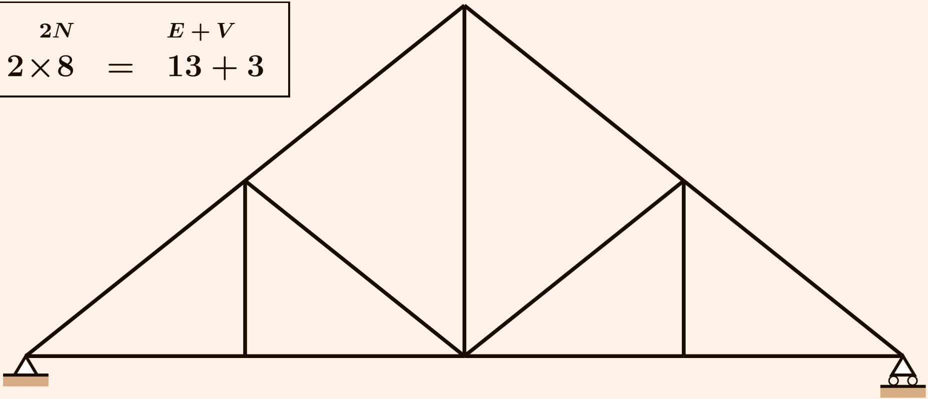
cerchas "simples"

$\boldsymbol{2N}$		$\boldsymbol{E+V}$
$\mathbf{2\times 8}$	$=$	$\mathbf{13+3}$

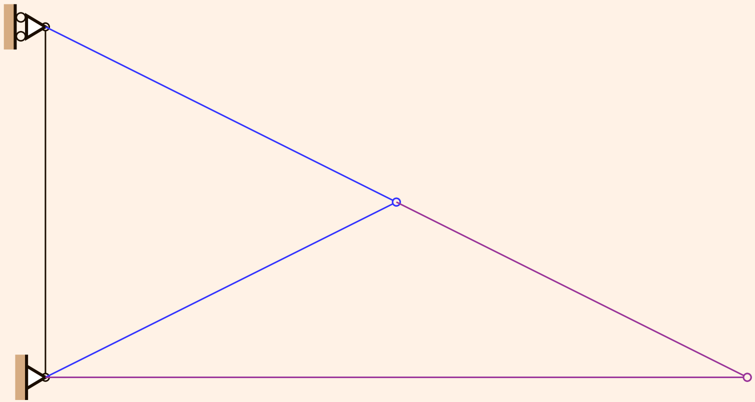


cerchas “simples”

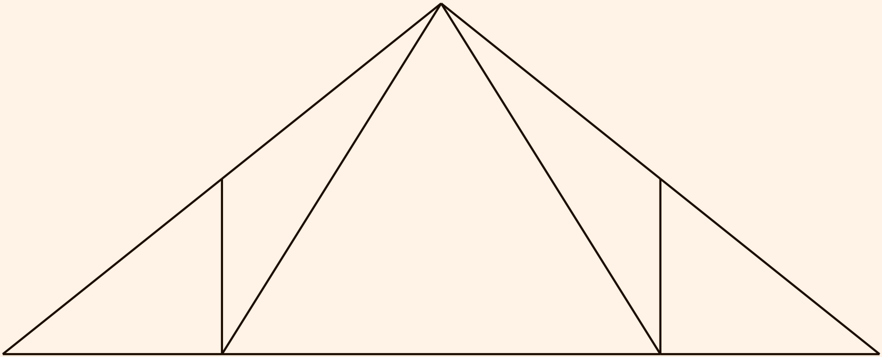
$\mathbf{2N}$		$\boldsymbol{E+V}$
$\mathbf{2\times 8}$	$=$	$\mathbf{13+3}$



cerchas "simples"

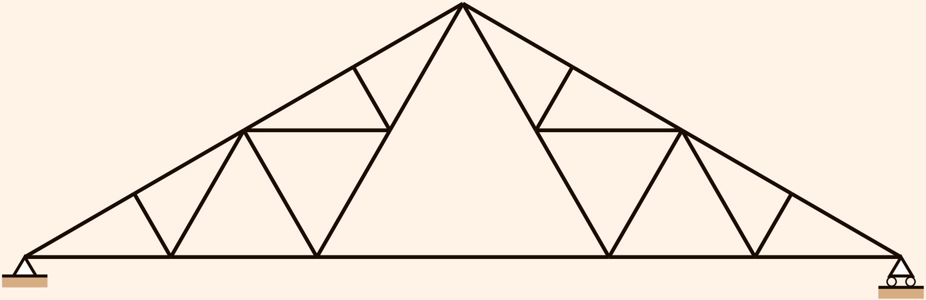


cerchas ‘‘simples’’



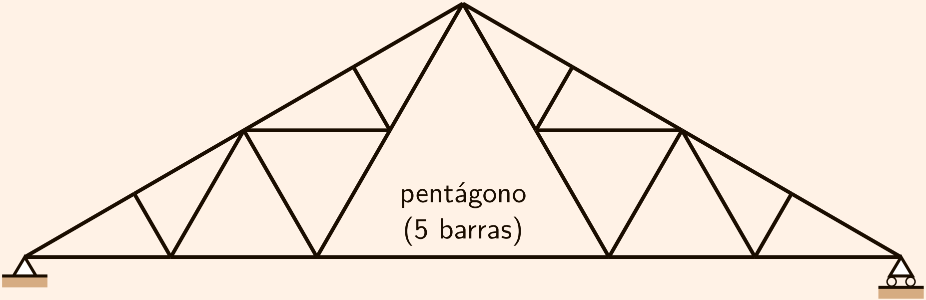
cerchas “compuestas”

$$\boxed{\overset{2N}{2 \times 15} \quad = \quad \overset{E+V}{27+3}}$$



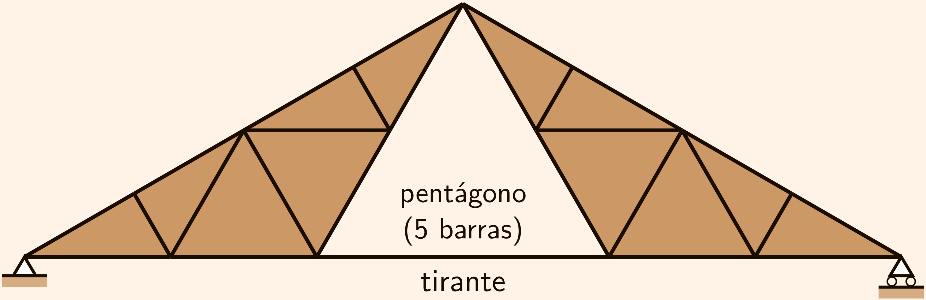
cerchas “compuestas”

$$\boxed{\overset{2N}{2\times 15} \quad = \quad \overset{E+V}{27+3}}$$



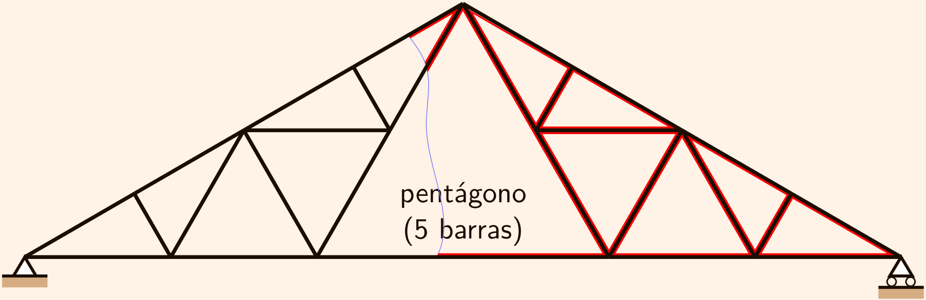
cerchas “compuestas”

$$\overset{2N}{2\times 15} \quad = \quad \overset{E+V}{27+3}$$



cerchas "compuestas"

$$\boxed{\overset{\mathbf{2N}}{2\times 15} \quad = \quad \overset{\boldsymbol{E+V}}{27+3}}$$



cerchas "complejas"

1. Aquellas cerchas que ni pueden generarse como simples, ni pueden descomponerse, se denominan complejas.

2. Una regla práctica para reconocerlas es que, en el plano, cualquier corte imaginable interesa a más de tres barras, de manera que aún siendo isostáticas, no es posible obtener ningún esfuerzo sin obtener todos los demás. Es decir, las ecuaciones de equilibrio *sólo* pueden resolverse *simultáneamente*.

3. En el plano son raras, salvo cuando resultan de la superposición de dos o más cerchas.

4. Lo que es seguro es que no suelen ser buenos diseños...

   [*Lo complejo no es siempre bello*]

Mecánica de Sólidos y Sistemas Estructurales

Estructuras trianguladas: Resistencia

Mariano Vázquez Espí

GIAU+S (UPM)
Grupo de Investigación en Arquitectura, Urbanismo y Sostenibilidad
Universidad Politécnica de Madrid
http://habitat.aq.upm.es/gi

Edición del 8 de noviembre de 2010
Compuesto con *free software*:
GNULinux/LaTeX/dvips/ps2pdf