Mecánica de Sólidos y Sistemas Estructurales

# Estructuras trianguladas: Rigidez

Mariano Vázquez Espí

Ondara, 2 de noviembre de 2010.

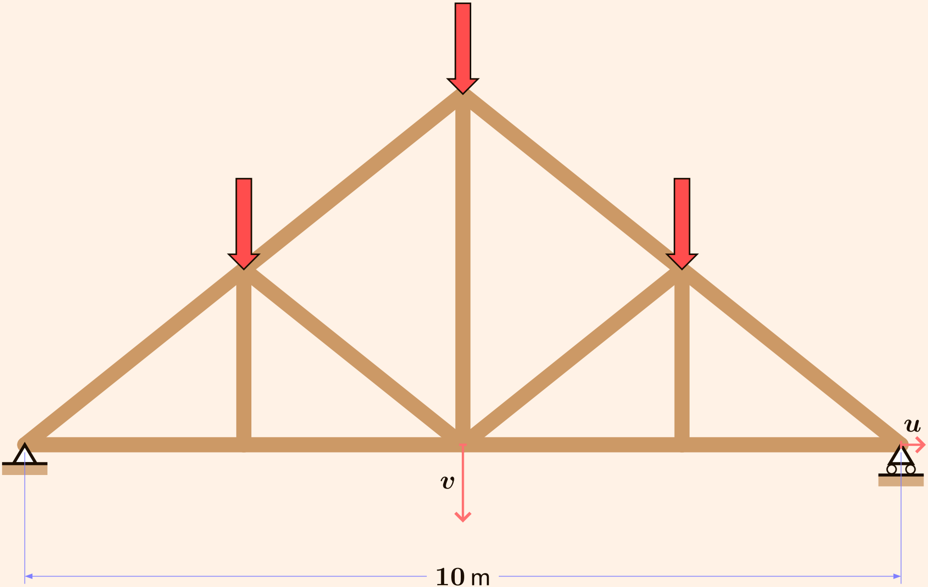
# El requisito de rigidez

Una estructura es suficientemente rígida si sus movimientos bajo la carga de servicio son menores que valores considerados como **tolerables** según el uso a que se destina.

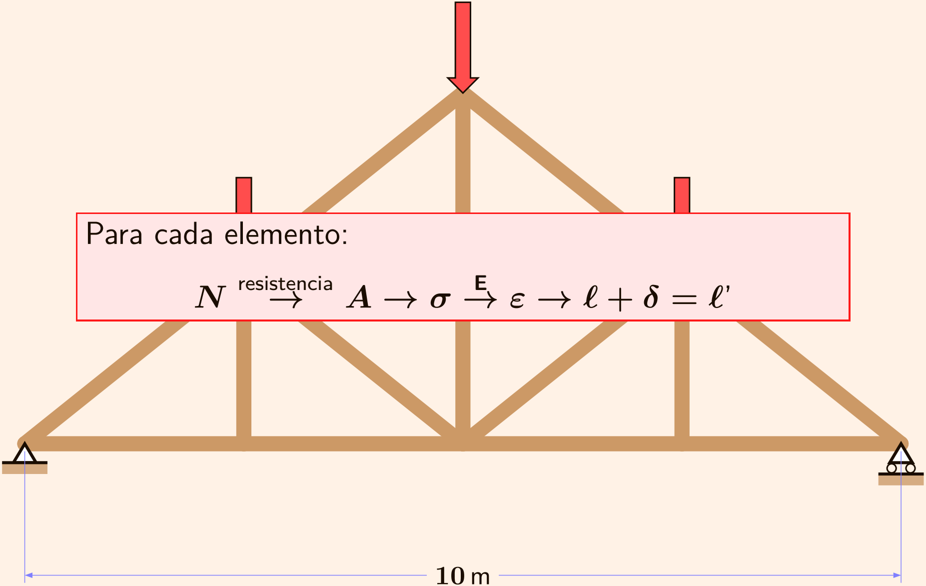
Hay dos tipos de movimientos a controlar:

- giros que produzcan **distorsión** de la geometría inicial: específicamente la **distorsión media** de la estructura
- **desplazamientos** que puedan comprometer el comportamiento de uniones con **otras estructuras** (aparatos de apoyo, etc)
- **siempre** hay que comprobar que la deformación es pequeña si los esfuerzos se calcularon con esa hipótesis

# Un cuchillo español



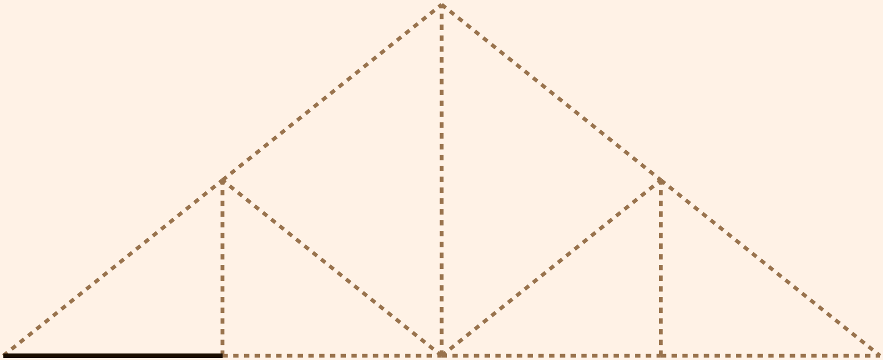
# Un cuchillo español

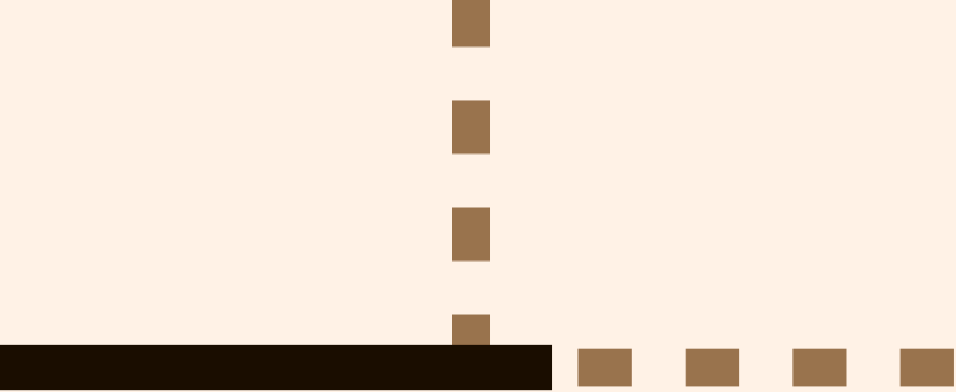



Para cada elemento:

$$\boldsymbol{N \xrightarrow{\text{resistencia}} A \to \sigma \xrightarrow{\mathsf{E}} \varepsilon \to \ell + \delta = \ell'}$$

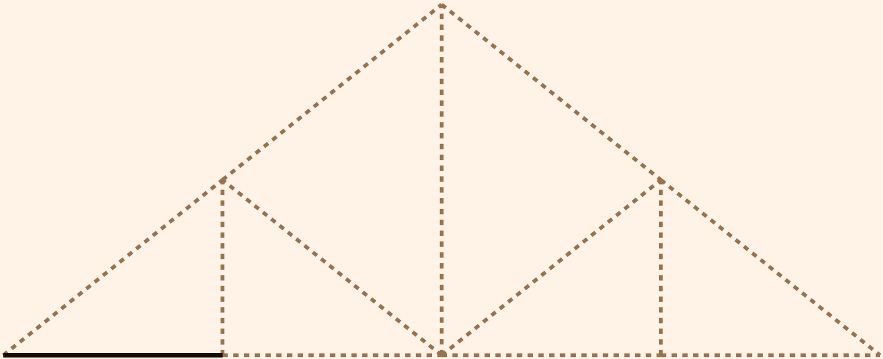
# Un cuchillo español



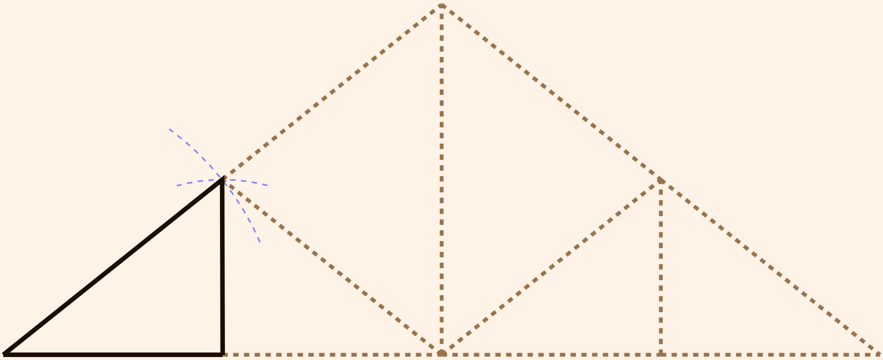


# zoom 250X

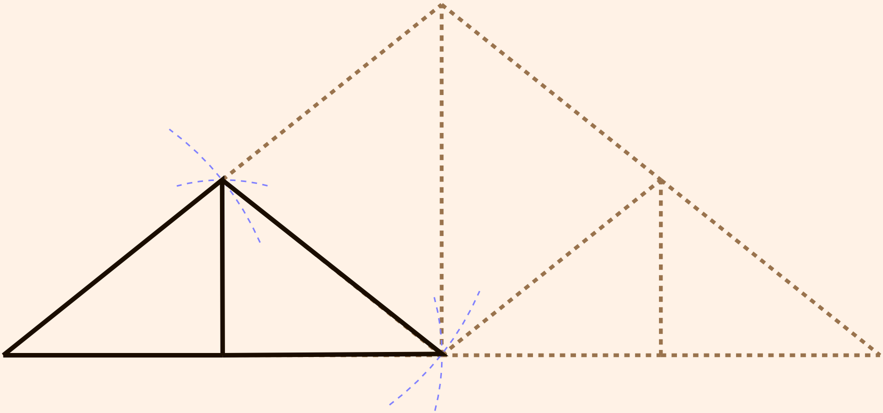
# Un cuchillo español



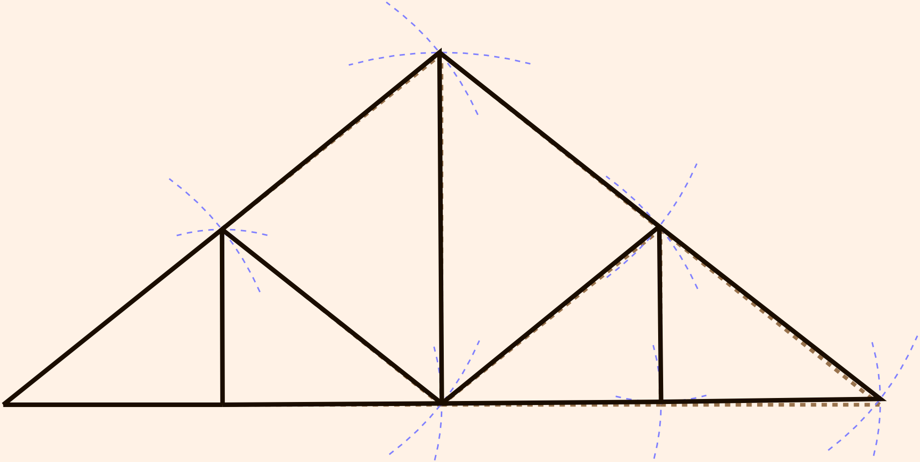
# Un cuchillo español

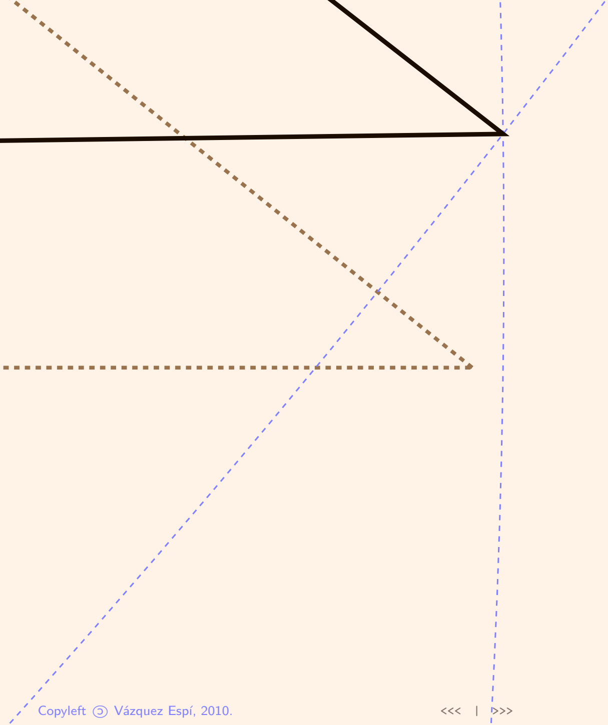


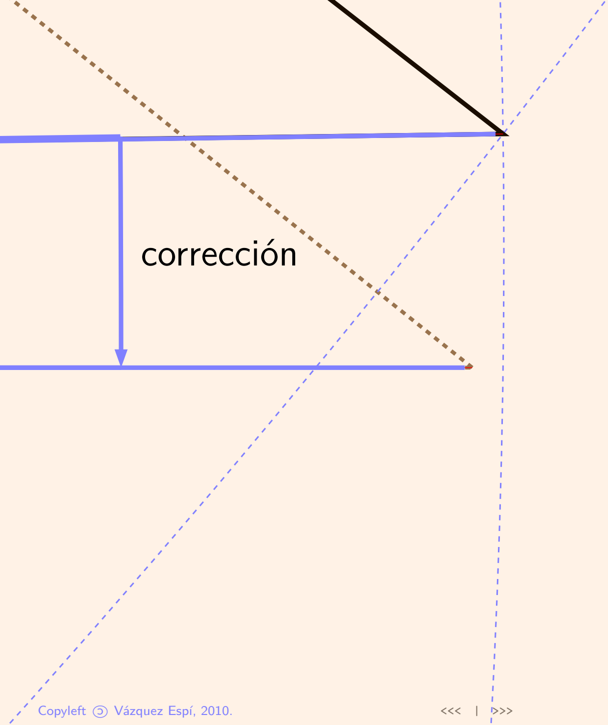
# Un cuchillo español



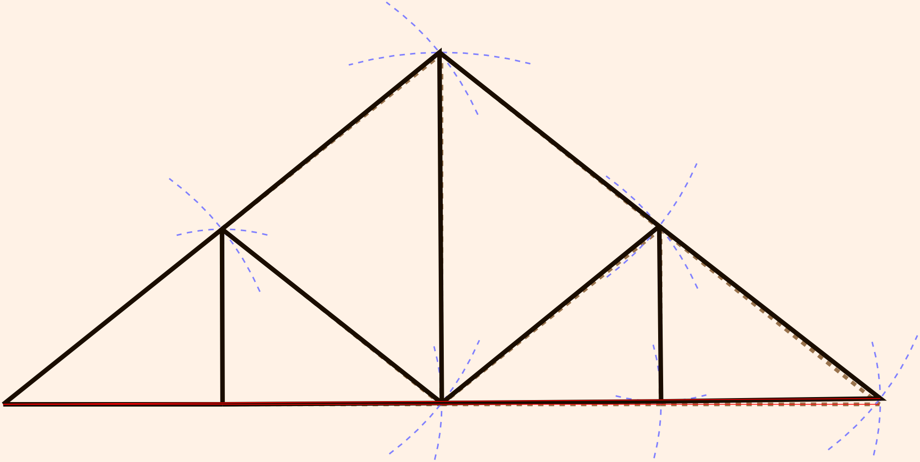
# Un cuchillo español



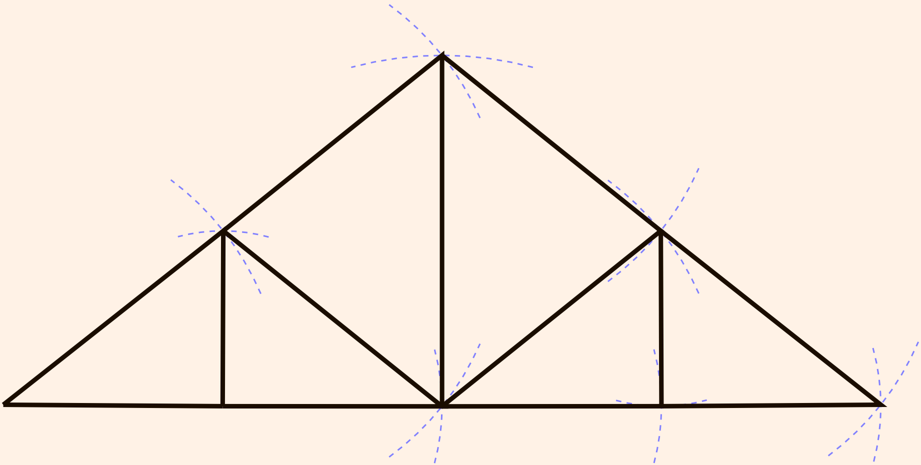


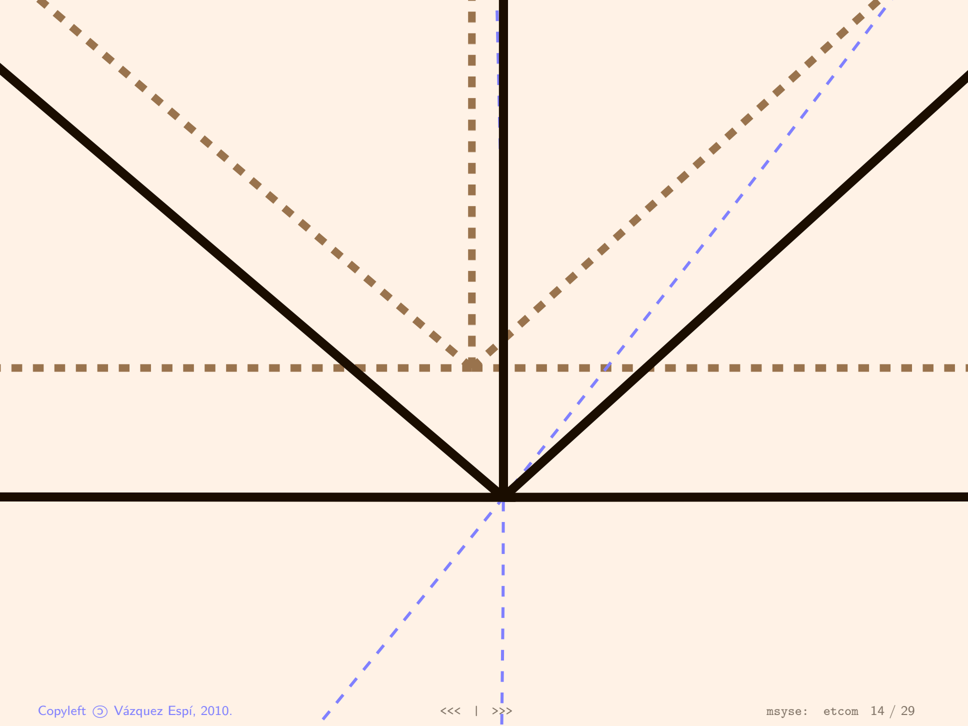

corrección

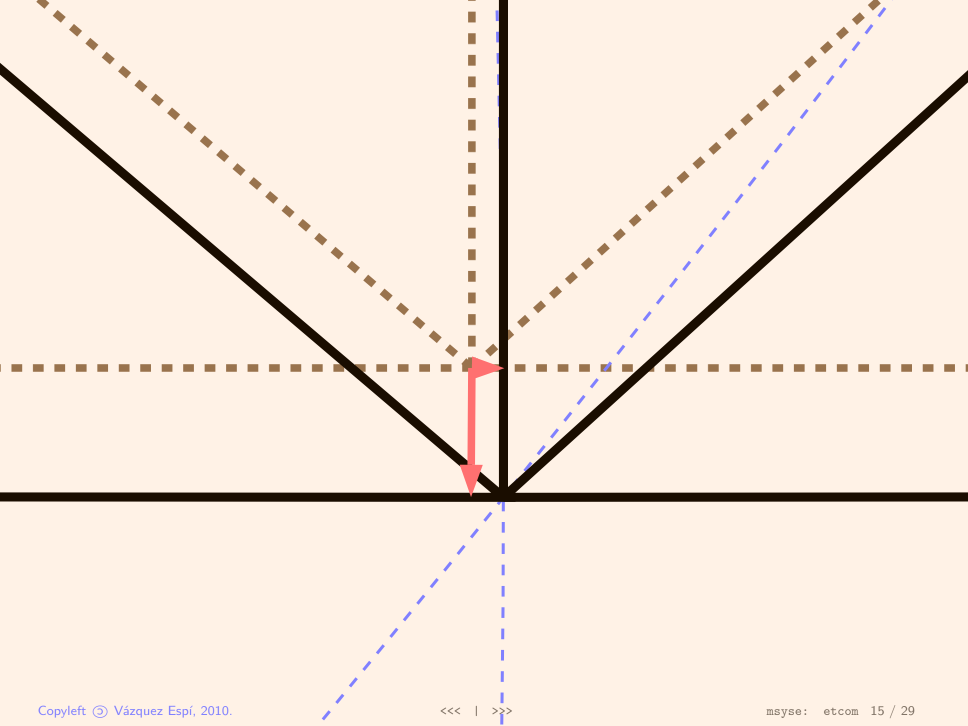
# Un cuchillo español



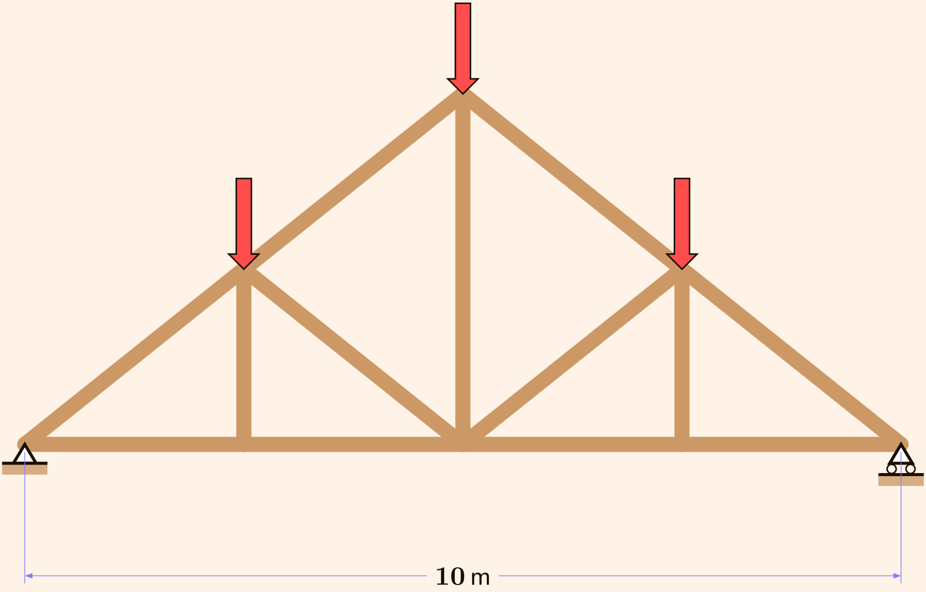
# Un cuchillo español





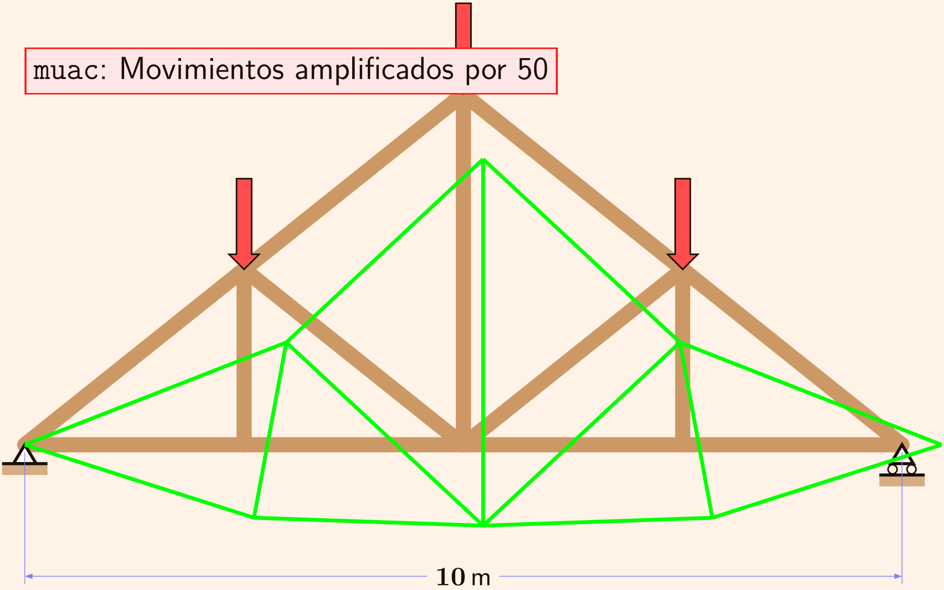


# Un cuchillo español



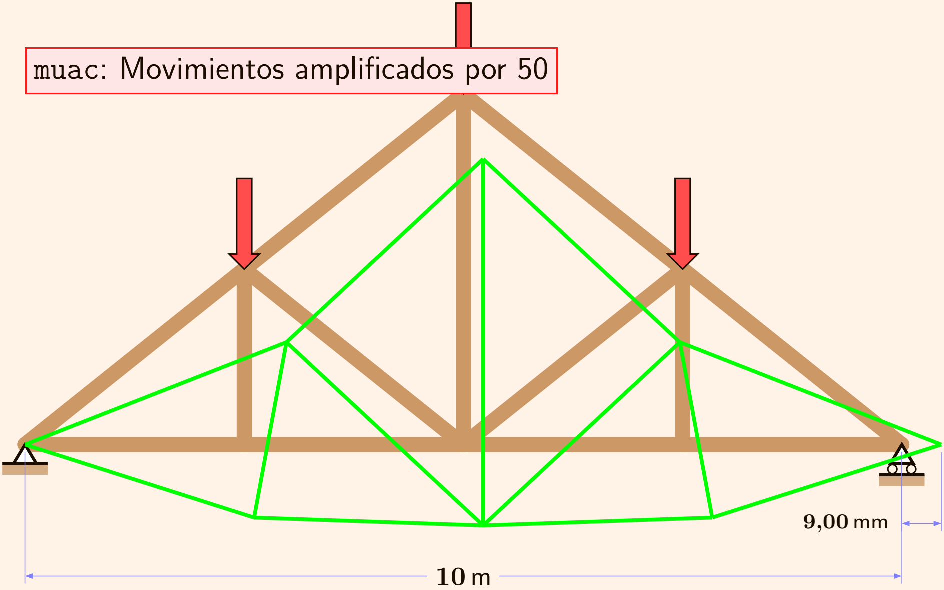
# Un cuchillo español

muac: Movimientos amplificados por 50

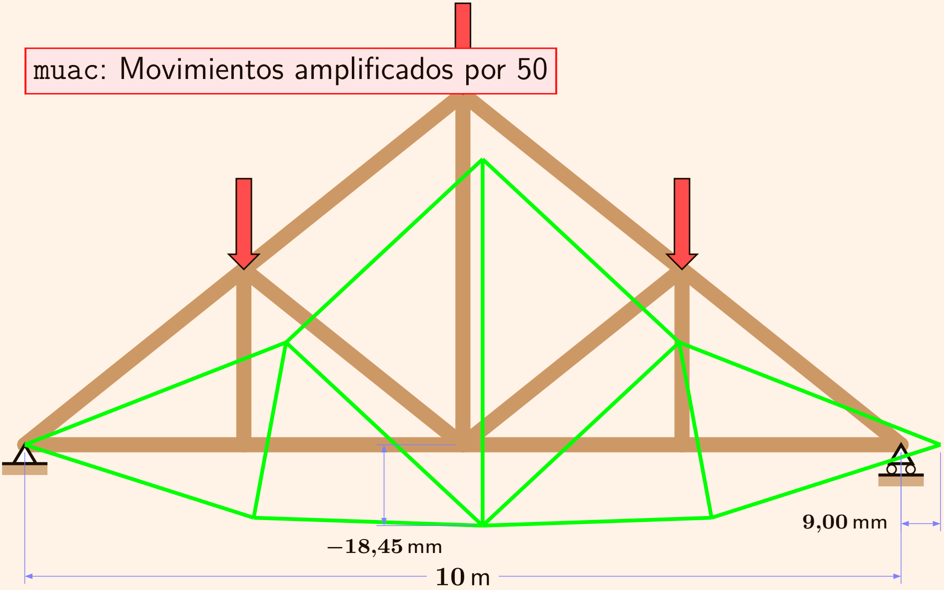


# Un cuchillo español

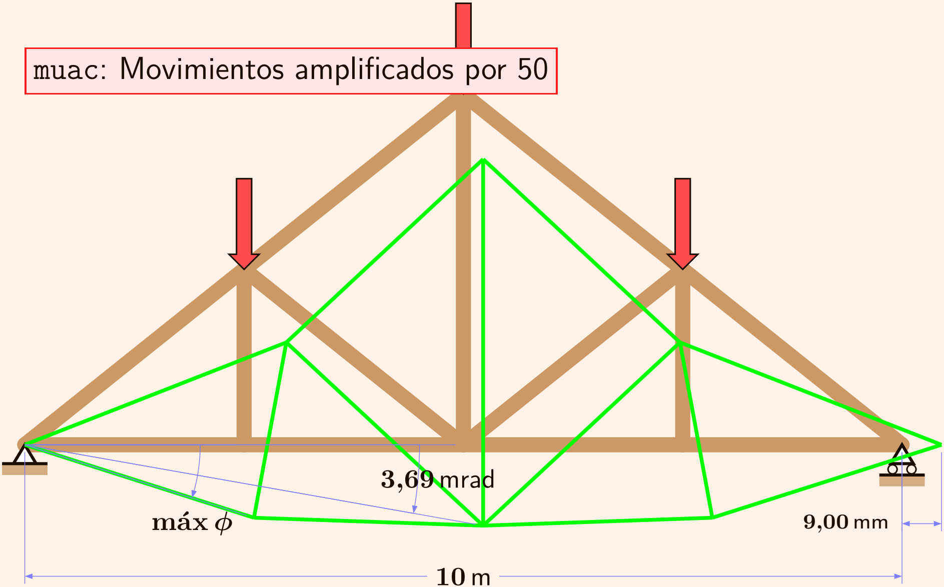
muac: Movimientos amplificados por 50



## Un cuchillo español



# Un cuchillo español



# equilibrio/compatibilidad

$$\left.\begin{aligned}\sum_e N_e \cos(\alpha_e) = H_i \\ \sum_e N_e \sin(\alpha_e) = V_i\end{aligned}\right\} \quad 2N - V \text{ ecuaciones} \quad \left\{\begin{array}{l}\text{si } E = 2N - V\text{:} \\ N_e = \dfrac{1}{\mathsf{z_e}} \displaystyle\sum_i a_i \mathsf{z}_i\end{array}\right.$$

# equilibrio/compatibilidad

$$\left.\begin{aligned}\sum_e N_e \cos(\alpha_e) = H_i\\ \sum_e N_e \sin(\alpha_e) = V_i\end{aligned}\right\} \quad 2N - V \text{ ecuaciones} \quad \left\{\begin{aligned}&\text{si } E = 2N - V\text{:}\\ &N_e = \frac{1}{\mathsf{z_e}}\sum_i a_i \mathsf{z}_i\end{aligned}\right.$$

$$\overset{E\times(2N-V)}{[H]} \cdot \overset{E\times 1}{[N]} = \overset{(2N-V)\times 1}{[a]}$$

## equilibrio/compatibilidad

$$\left.\begin{array}{l}\sum_e N_e \cos(\alpha_e) = H_i \\ \sum_e N_e \sin(\alpha_e) = V_i\end{array}\right\} \quad 2N-V \text{ ecuaciones} \quad \left\{\begin{array}{l}\text{si } E = 2N-V\text{:} \\ N_e = \dfrac{1}{\mathsf{z_e}}\sum_i a_i \mathsf{z}_i\end{array}\right.$$

$$\overset{E\times(2N-V)}{[H]} \cdot \overset{E\times 1}{[N]} = \overset{(2N-V)\times 1}{[a]}$$

Si $E = 2N - V$, la matriz $H$ es cuadrada, y si el equilibrio es posible existe $H^{-1}$ :

$$\boxed{\overset{E\times 1}{[N]} = \overset{E\times E}{[H^{-1}]} \cdot \overset{E\times 1}{[a]} \qquad \overset{E\times 1}{[\delta]} = \overset{E\times E}{[B]} \cdot \overset{E\times 1}{[g]} = \overset{E\times E}{[H^{\mathrm{T}}]} \cdot \overset{E\times 1}{[g]}}$$

$$\overset{E\times 1}{[g]} = \overset{E\times E}{[B^{-1}]} \cdot \overset{E\times 1}{[\delta]}$$

## equilibrio/compatibilidad

$$\boxed{\overset{E\times 1}{[\boldsymbol{N}]} = \overset{E\times E}{[\boldsymbol{H}^{-1}]} \cdot \overset{E\times 1}{[\boldsymbol{a}]} \qquad \overset{E\times 1}{[\boldsymbol{\delta}]} = \overset{E\times E}{[\boldsymbol{B}]} \cdot \overset{E\times 1}{[\boldsymbol{g}]} = \overset{E\times E}{[\boldsymbol{H}^{\mathbf{T}}]} \cdot \overset{E\times 1}{[\boldsymbol{g}]}}$$

Si la estructura está en equilibrio debe ocurrir que para cualquier movimiento *pequeño* dado por $\boldsymbol{g}^\star$ ,$\boldsymbol{\delta}^\star$ :

$$\boldsymbol{g}^{\star\mathbf{T}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\delta}^{\star\mathbf{T}}\boldsymbol{N}$$

# equilibrio/compatibilidad

$$\boxed{\overset{E\times 1}{[N]} = \overset{E\times E}{[H^{-1}]}\cdot\overset{E\times 1}{[a]} \qquad \overset{E\times 1}{[\delta]} = \overset{E\times E}{[B]}\cdot\overset{E\times 1}{[g]} = \overset{E\times E}{[H^{\mathrm{T}}]}\cdot\overset{E\times 1}{[g]}}$$

$$g^{\star\mathrm{T}}a = \delta^{\star\mathrm{T}}N$$

Para la misma estructura sometida a otras cargas $a^\star$ ,$N^\star$ :

$$g^{\mathrm{T}}a^\star = \delta^{\mathrm{T}}N^\star$$

## equilibrio/compatibilidad

$$\boxed{\overset{E\times 1}{[\boldsymbol{N}]} = \overset{E\times E}{[\boldsymbol{H}^{-1}]} \cdot \overset{E\times 1}{[\boldsymbol{a}]} \qquad \overset{E\times 1}{[\boldsymbol{\delta}]} = \overset{E\times E}{[\boldsymbol{B}]} \cdot \overset{E\times 1}{[\boldsymbol{g}]} = \overset{E\times E}{[\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}]} \cdot \overset{E\times 1}{[\boldsymbol{g}]}}$$

$$\boldsymbol{g}^{\star\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\delta}^{\star\mathrm{T}}\boldsymbol{N}$$

$$\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^{\star} = \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{\star}$$

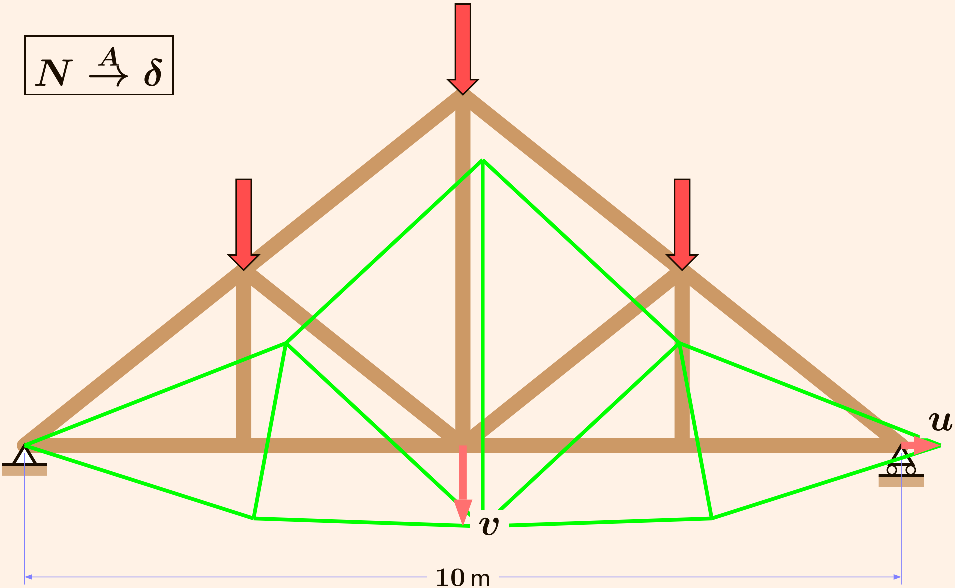
Si elegimos $\boldsymbol{a}^\star$ de modo que sólo exista una acción unidad en la dirección del movimiento $\boldsymbol{g_i}$:

$$\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^{\star} = \boldsymbol{g_i} \cdot \boldsymbol{1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{g_i} \cdot \boldsymbol{1} = \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{\star}}$$

*Truco* que nos permite calcular un movimiento $\boldsymbol{g_i}$ mediante el cálculo de los esfuerzos $\boldsymbol{N}^\star$ de la misma estructura pero con sólo una carga unidad en $\boldsymbol{i}$. (En jerga el truco se denomina ‘‘cálculo de movimientos por trabajos virtuales’’.)

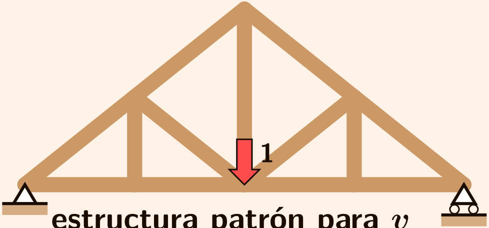
# Un cuchillo español por trabajos virtuales

$$\boxed{N \xrightarrow{A} \delta}$$



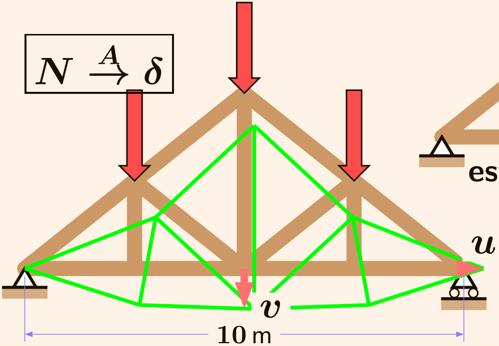
# Un cuchillo español por trabajos virtuales

$$\boxed{N^{\star} \Rightarrow v = \delta^{\mathrm{T}} N^{\star}}$$




estructura patrón para $v$

$$\boxed{N \xrightarrow{A} \delta}$$




estructura real con $N$ y $\delta$

$$\boxed{N^{\star\star} \Rightarrow u = \delta^{\mathrm{T}} N^{\star\star}}$$


estructura patrón para $u$

# Cálculo de movimientos: conclusión

En resumen, disponemos de tres métodos prácticos:

- Método gráfico mediante programas de dibujo
- Método universal mediante programas de ordenador
- Trabajos virtuales: para cada movimiento hay que resolver un caso 'patrón' de carga

(Hay un método tradicional del XIX: el diagrama de WILLIOT, hoy totalmente en desuso. . . )

> El requisito de rigidez se comprueba comparando los movimientos calculados con aquellos que sean tolerables según el uso de la estructura.

**Mecánica de Sólidos y Sistemas Estructurales**

# Estructuras trianguladas: Rigidez

Mariano Vázquez Espí

GIAU+S (UPM)
Grupo de Investigación en Arquitectura, Urbanismo y Sostenibilidad
Universidad Politécnica de Madrid
http://habitat.aq.upm.es/gi

Edición del 2 de noviembre de 2010
Compuesto con *free software*:
GNULinux/LaTeX/dvips/ps2pdf