

**ESTRUCTURAS 1. PLAN 2010**  
**CURSO 2012-13. SEMESTRE DE PRIMAVERA**

**SÓLIDO DEFORMABLE. MÉTODO UNIVERSAL DE ANÁLISIS ELÁSTICO**

**Práctica 07**

**DESCRIPCIÓN**

Se trata de analizar las condiciones de equilibrio general y parcial de una pasarela continua colgada de cables indicados en la figura. La pasarela salva un canal cuyos muros laterales se sitúan a una distancia  $L$  m. y sus pilas están formadas por dos soportes y una viga de atado en su parte alta. Las pilas tienen una altura  $H$  m.

La pasarela se vincula a los muros del canal y a los soportes por medio de topes que impiden los movimientos horizontales en todas las direcciones y sentidos posibles. La pasarela transmite las cargas verticales a las pilas a su paso entre ambos soportes, por medio de las parejas de cables de cuelgue que se indican en las diferentes soluciones.

Únicamente se considerarán las siguientes acciones de pesos propios y sobrecargas:

**Peso propio** por cada metro cuadrado en planta de la pasarela de  $g$  kN/m<sup>2</sup>

**Sobrecarga de uso** prevista por cada metro cuadrado en planta de la pasarela  $q$  kN/m<sup>2</sup>

**DATOS**

Los datos geométricos de la pasarela y sus pilas son los siguientes:

$L = 32 + 0,5 X$  m.       $H = 15 + Y$  m

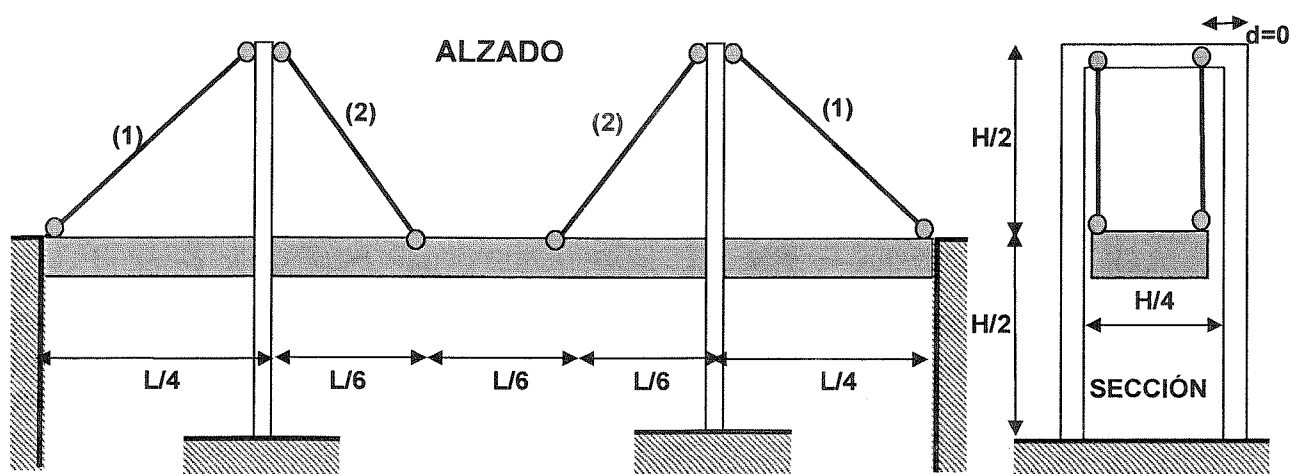
Pesos propios y sobrecargas de los siguientes valores

$g = 25 + 0,25 Y$  kN/m<sup>2</sup>     $q = 15 + 0,5Y$  kN/m<sup>2</sup>

El material empleado en los cables es acero de una resistencia segura a tensión normal  $f_s = 1.000$  N/mm<sup>2</sup>, su límite elástico es  $f_y = 2.000$  N/mm<sup>2</sup>, y su Módulo de Young  $E = 180$  kN/mm<sup>2</sup>

**PRIMER CASO**

Cada cable tipos (1) y (2) estará formado por los  $n$  redondos de diámetro  $\Phi = 10 + Z$  mm necesarios para cumplir el requisito de resistencia, tanto si la mayor sollicitación les corresponde a ellos como a los del tipo (1).



## SE PIDE

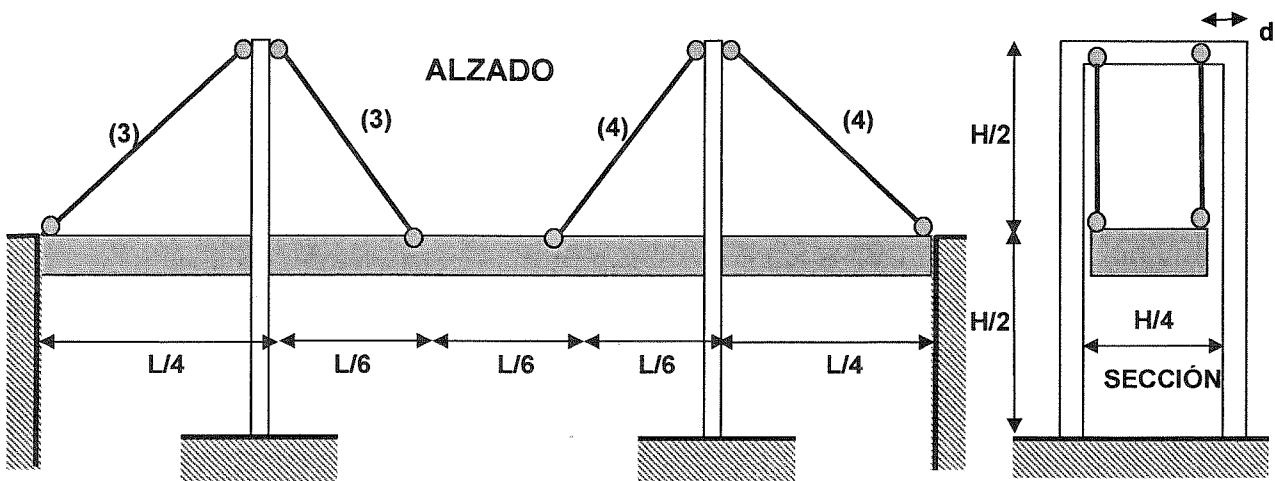
- 1.- Valor en mm. del descenso  $\delta$  que experimentará la pasarela
- 2.- Valor de ~~las solicitaciones~~ <sup>los esfuerzos</sup>  $N$  en kN, y de los alargamientos  $\Delta L$  en mm de ambos tipos de barras (1) y (2) de acuerdo con el criterio indicado más arriba.
- 3.- Valor en kN de las **componentes horizontal y vertical de las acciones de los cables sobre ambas pilas.**
- 4.- Indicar cuál sería el valor en kN/m<sup>2</sup> de la sobrecarga  $q_{elas}$  con la que la **primera barra alcanzaría su límite elástico**
- 5.- Indicar cuál sería el valor en kN/m<sup>2</sup> de la sobrecarga  $q_u$  con la que se produce el **colapso de la estructura**
- 6.- Coeficiente de seguridad de la estructura, entendido como  $(g+qu) / (g+q)$

## SEGUNDO CASO

Se modifica el criterio de dimensionado de forma que los cables que concurren en cada pilastra sean iguales entre sí, pero diferentes a los de la contraria, de la siguiente forma

Cada cable tipo (3) estará formado por los  $n$  redondos de diámetro  $\Phi$  calculados en el PRIMER CASO

Cada cable tipo (4) estará formado por  $(1,3 \cdot n)$  redondos del mismo diámetro  $\Phi$  (redondeados a números entero)



## SE PIDE

- 7.- Valor en mm. del descenso  $\delta$ , y en milésimas de radián del giro  $\theta$ , que experimentará la pasarela
- 8.- Valor de ~~las solicitaciones~~ <sup>los esfuerzos</sup>  $N$  en kN, y de los alargamientos  $\Delta L$  en mm de cada una de las barras de los tipos (3) y (4) de acuerdo con el criterio indicado más arriba.
- 9.- Valor en kN de las **componentes horizontal y vertical de las resultantes de las acciones de los cables sobre ambas pilas.**
- 10.- Indicar cuál sería la **primera barra que alcanzaría el límite elástico** si se incrementase la sobrecarga lo necesario.

## PLANTEAMIENTO

Se considera que la pasarela se comporta como sólido indeformable. El esquema representado NO está estáticamente determinado. Por lo tanto, para obtener los esfuerzos de cada barra se plantea el **equilibrio** de fuerzas verticales; la fuerza total vertical se resistirá en las barras 1 y 2, (ó 3 y 4) en proporción a sus rigideces, por lo que, aplicando la **compatibilidad de deformaciones** en el movimiento vertical de los puntos de anclaje de los cables, se pueden obtener los normales correspondientes. En el primer caso los cables no están previamente dimensionados por lo que conviene obtener la proporción entre las rigideces ( $k_1/k_2$ ) para posteriormente obtener la proporción entre los normales ( $N_1/N_2$ ) que introducida en la ecuación de equilibrio de fuerzas verticales permite obtener el valor de dichos normales y dimensionar.

## PRACTICA 7 \*

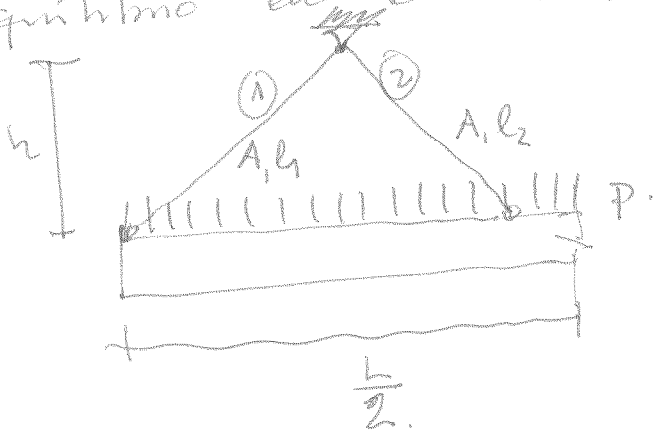
PRIMER CASO. Por simetría  $g_{de} = \frac{1}{2} \} g=1$ .

Analicemos medio alzado de la pasarela.

$P$  es la carga total (de toda la pasarela) por unidad de longitud.

Para que la pasarela no rompa tienen que plastificar todos los cables.

Equilibrio en la rotura. (para dimensionar los cables).



$$(o) \delta P \frac{L}{2} = A f_y \left( \frac{h}{l_1} + \frac{h}{l_2} \right)$$

luego el área  $A$  de cada pareja de cables debe ser

$$A \geq \frac{\delta P \frac{L}{2}}{f_y \left( \frac{h}{l_1} + \frac{h}{l_2} \right)}$$

Cada cable está formado por  $n$  cables de diámetro  $\phi$ . luego

$$n \geq \left\lceil \frac{A}{2A_\phi} \right\rceil$$

siendo  $A_\phi$  el área de un cable de diámetro  $\phi$ .

Por ejemplo con:

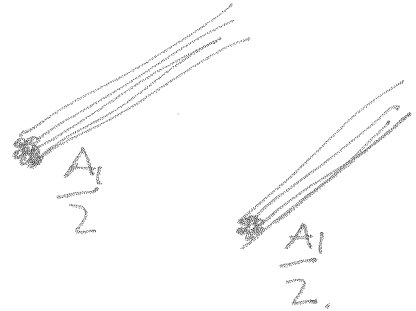
$$q = 2t \frac{kN}{m^2} \quad q = 1t \frac{kN}{m^2} \quad H = 14m \quad L = 30m.$$

$$P = ~~2t~~ 133 \frac{kN}{m} \quad l_1 = 10,64m \quad l_2 = 8,60m.$$

$$A = 2222 \text{ mm}^2$$

$$\phi = 15 \text{ mm} \quad A_\phi = 177 \text{ mm}^2$$

$$n > 6,29 \Rightarrow n = 7 \text{ cables}$$



$$A_1 = 2.478 \text{ mm}^2 = A_2 \quad \frac{A_1}{2} = 1239 \text{ mm}^2.$$

$$N_u = 2,97 \text{ MN}$$

ANÁLISIS BAJO LA CARGA REAL (ESTADO PROPORCIONAL)

Eq. (para el descenso).

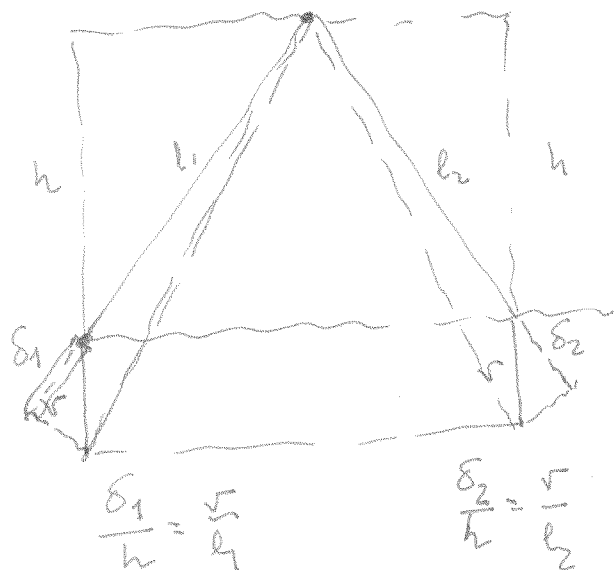
$$(1) \quad P \cdot \frac{L}{2} = N_1 \cdot \frac{h}{l_1} + N_2 \cdot \frac{h}{l_2}$$

Rigidez de cables.

$$(2) \quad \begin{cases} N_1 = \frac{EA_1}{l_1} \cdot \delta_1 \\ N_2 = \frac{EA_2}{l_2} \cdot \delta_2 \end{cases}$$

Compatibilidad.

$$(3) \quad \begin{cases} \delta_1 = \frac{h}{l_1} \cdot v \\ \delta_2 = \frac{h}{l_2} \cdot v \end{cases}$$



Sustituyendo (3) en (2)

$$(4) \begin{cases} N_1 = \frac{EA_1}{l_1} \frac{h}{l_1} \cdot v \\ N_2 = \frac{EA_2}{l_2} \frac{h}{l_2} \cdot v \end{cases}$$

Sustituyendo (4) en (1), ecuaciones de equilibrio para los grados de libertad.

$$(5) P \frac{L}{2} = N \left\{ \frac{EA_1}{l_1} \left( \frac{h}{l_1} \right)^2 + \frac{EA_2}{l_2} \left( \frac{h}{l_2} \right)^2 \right\} v.$$

De (5) se obtiene  $v$  para cada valor de  $P$ .

Con el valor de  $v$  y (4) se obtienen los esfuerzos  $N_1$  y  $N_2$  bajo  $P$ . Hay que comprobar que sean menores que  $N_{su}$ , ni no las ecuaciones (2) no sean válidas.

Las tensiones de servicio se obtienen dividiendo los esfuerzos por el área de cada cable.

Para que el cable con mayor tensión de servicio alcance su límite elástico, la carga tiene que aumentarse por el factor  $\frac{f_e}{\sigma}$ .

Para calcular la sobrecarga correspondiente podemos escribir

$$\frac{f_e}{\sigma} (g + q) = g + q_{elab}$$

Ya que el peso propio es constante

$$q_{elab} = \frac{f_e}{\sigma} (g + q) - g$$

Para la situación de colapso escribimos

$$P_m \times \frac{L}{2} = A_1 f_y \left( \frac{h}{l_1} + \frac{h}{l_2} \right)$$

con el área  $A_1$  correspondiente a los  $n$  redondos, o cables, como en (c). La sobrecarga de rotura la calculamos con

$$q + q_m = \frac{P_m}{P} (q + q)$$

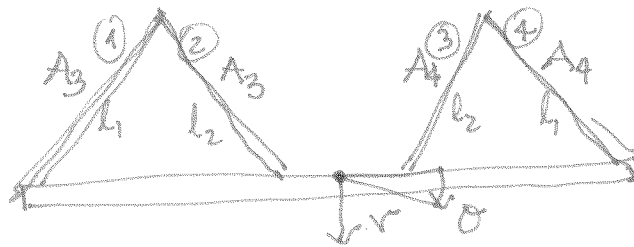
es decir

$$q_m = \frac{P_m}{P} (q + q) - q$$

$\frac{P_m}{P} = \gamma$ , es el coeficiente de seguridad de la estructura, el real, mayor al pedido de 2.

SEGUNDO CASO,

con el dimensionado indicado, la estructura ya no es simétrica, luego hay que considerar 2 grados de libertad,  $\delta_1$  y  $\delta_2$ .



$\Sigma q$

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} PL = \frac{h}{l_1} N_1 + \frac{h}{l_2} N_2 + \frac{h}{l_2} N_3 + \frac{h}{l_1} N_4 \\ 0 = -\frac{h}{l_1} N_1 \times \frac{L}{2} - \frac{h}{l_2} N_2 \times \frac{L}{12} + \frac{h}{l_2} N_3 \times \frac{L}{12} + \frac{h}{l_1} N_4 \times \frac{L}{2} \end{array} \right.$$

Rigidez

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} N_1 = \frac{EA_3}{l_1} \delta_1 \quad // \quad N_2 = \frac{EA_3}{l_2} \delta_2 \\ N_3 = \frac{EA_4}{l_2} \delta_3 \quad // \quad N_4 = \frac{EA_4}{l_1} \delta_4 \end{array} \right.$$

Compatibilidad.

$$(\alpha) \begin{cases} \delta_1 = \frac{h}{l_1} \cdot v - \frac{h}{l_1} \cdot \frac{L}{2} \theta \\ \delta_2 = \frac{h}{l_2} \cdot v - \frac{h}{l_2} \cdot \frac{L}{12} \theta \\ \delta_3 = \frac{h}{l_2} \cdot v + \frac{h}{l_2} \cdot \frac{L}{12} \cdot \theta \\ \delta_4 = \frac{h}{l_1} v + \frac{h}{l_1} \cdot \frac{L}{2} \theta. \end{cases}$$

Procediendo como en el caso anterior, obtendremos dos ecuaciones con dos incógnitas  $v$  y  $\theta$ .

Para el valor real de  $P$  obtenemos los movimientos  $v$  y  $\theta$ ; y con (9) y luego (8) los esfuerzos en los cuatro cables.

Maxima, un sistema de álgebra computacional  
<http://maxima.sourceforge.net/es/>

Maxima es un descendiente de Macsyma, el legendario sistema de álgebra computacional desarrollado a finales de 1960 en el instituto tecnológico de Massachusetts (MIT). Este es el único sistema basado en el esfuerzo voluntario y con una comunidad de usuarios activa, gracias a la naturaleza del open source. Macsyma fue revolucionario en sus días y muchos sistemas posteriores, tales como Maple y Mathematica, estuvieron inspirados en él.

```
(%i1) ratprint:false$ keepfloat: true$ fpprintprec: 5$
```

SEGUNDO CASO

datos

```
(%i108) h: 7$ l1: 10.26$ l2: 8.6$ L: 30$ E: 180$  
A3: 2478$ A4: 3540$  
Nu3: 1.2*A3$ Nu4: 1.2*A4$
```

ecuaciones

```
(%i68) equilibrio: [  
  p*L = h/l1*N1 +h/l2*N2 + h/l2*N3 + h/l1*N4,  
  0 = -h/l1*N1*L/2 -h/l2*N2*L/12 + h/l2*N3*L/12 + h/l1*N4*L/2  
]$
```

```
(%i77) Hooke: [  
  N1=E*A3/l1/1000*d1,  
  N2=E*A3/l2/1000*d2,  
  N3=E*A4/l2/1000*d3,  
  N4=E*A4/l1/1000*d4  
]$
```

```
(%i78) compatibilidad: [  
  d1 = h*l1*v - h/l1*L/2*theta,  
  d2 = h*l2*v - h/l2*L/12*theta,  
  d3 = h*l2*v + h/l2*L/12*theta,  
  d4 = h*l1*v + h/l1*L/2*theta  
]$
```

```
(%i79) acciones_alargamientos: ev( equilibrio, Hooke, factor)$  
print( listofvars(%) )$  
map( lambda( [a], display(a) ), float(expand(acciones_alargamientos)) )$
```

$$[p, d1, d2, d3, d4]$$

$$30.0 p = 42.372 d4 + 60.308 d3 + 42.216 d2 + 29.66 d1$$

$$0.0 = 635.58 d4 + 150.77 d3 - 105.54 d2 - 444.91 d1$$

```
(%i82) acciones_gdl: ev( acciones_alargamientos, compatibilidad, eval, simp, factor, eval, expand )$  
print( listofvars(%) )$  
map( lambda( [a], display(a) ), float(expand(acciones_gdl)))$
```

$$[p, \theta, v]$$

$$30.0 p = 11345. v + 166.91 \theta$$

$$0.0 = 16417. v + 11579. \theta$$



análisis con carga de servicio

```
(%i85) gdl_k: float(solve(ev( acciones_gdl, p=133 ) , [v,theta] ))$ display( gdl_k )$
```

$$gdl_k = [[v = 0.359, \theta = -0.509]]$$

```
(%i87) e_k: float( expand(ev( Hooke, compatibilidad, eval, gdl_k, simp ) ) )$ display( e_k )$
```

$$e_k = [N1 = 1348.0, N2 = 1175.2, N3 = 1525.3, N4 = 1278.4]$$

```
(%i121) t_k: ev( [ 1000*N1/A3, 1000*N2/A3, 1000*N3/A4, 1000*N4/A4 ], e_k, float );
```

```
(%o121) [544.0, 474.25, 430.88, 361.13]
```

límite elástico

```
(%i127) lambda[e]: 1200/t_k[1]$ pe: 133 * lambda[e]$ display( lambda[e], pe );
```

$$\lambda_e = 2.2059$$

$$pe = 293.38$$

```
(%o129) done
```