Apellidos:	Grupo:

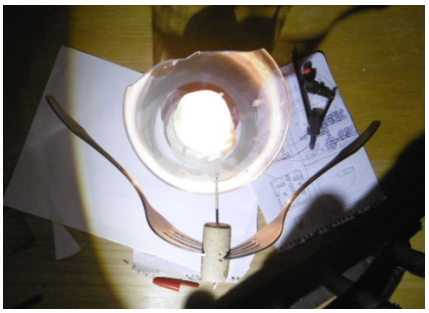
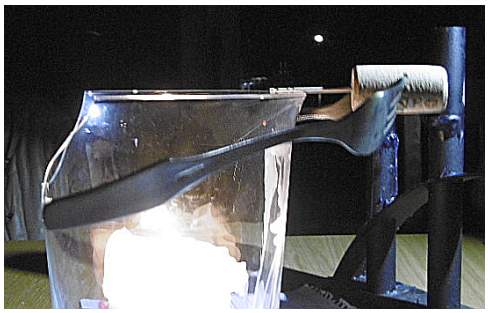
Nombre:	Tutor:	Expediente:

Examen final: primera parte ⋆

INSTRUCCIONES

⋆ Rellene sus datos personales nada más comenzar. Sólo se entrega un ejemplar por persona.
⋆ El ejercicio ha de hacerse individualmente, y sólo se admitirán preguntas dirigidas al profesorado presente en el aula durante los primeros veinte minutos. Quizás la mayor dificultad, por ello, reside en permanecer callado más de tres cuartos de hora.
⋆ Es de muy mala educación copiar el ejercicio de otra persona. Además, es ideal para suspender: las respuestas correctas de los ejercicios de las personas que le rodean son distintas a las del suyo...
⋆ Material imprescindible: lápiz, sacapuntas, goma de borrar y cinta métrica (o similar). Material recomendable: útiles de dibujo, apuntes del curso, diccionario de la RAE. Material permitido: calculadora, útiles de escritura, typ-ex o similar. Material prohibido: teléfono, ordenador portátil (pequeño o grande), PlayStation o similar. Para otros materiales, consulte al profesorado.
⋆ Antes de nada, lea *todas* las preguntas y localice aquellas que le presenten menor dificultad: ¡empiece por ellas! No se sorprenda si encuentra que algunas preguntas son de fácil respuesta (a veces la vida es sencilla, aunque la humanidad actualmente se la está complicando mucho, mucho). Intente responder a las demás preguntas en el tiempo que reste.
⋆ Responda en los lugares indicados con letra clara y legible. Cuando se trate de respuestas numéricas, utilice las unidades que se indican, y no emplee muchos decimales, en general, basta con tres cifras significativas.
⋆ Como aceleración de la gravedad en el planeta, si es que la necesita para algo, debe usar el valor de $10\,\mathrm{m/s^2}$. Para el número π puede tomar 3, 3,1, ó 3,14, dependiendo de la precisión que desee.
⋆ Duración del examen: hasta que nos echen del aula...

A. En el montaje que se muestra en las fotografías, el *conjunto* de tenedores, corcho y palillo está en equilibrio estable simplemente apoyado en el borde de un velador de vidrio (roto en parte). *Equilibrio estable* significa aquí que pequeños movimientos de la mesa en que se apoya el conjunto, o pequeños giros del velador en el plano de la mesa, no alteran el equilibrio del conjunto.

¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones considera usted que son ciertas?

a. Se trata de un truco de magia o de un montaje fotográfico: no es posible tal cosa

b. El centro de gravedad del conjunto está *por debajo* del punto de apoyo en el borde del velador

c. La vertical que pasa por el centro de gravedad del montaje (incluyendo a la vela) intersecta a la base del velador en contacto con la mesa

d. El centro de gravedad del conjunto está en la vertical que pasa por el punto de apoyo en el borde del velador

e. El peso del conjunto es un vector aplicado en el punto de apoyo del palillo en el borde del velador (por eso puede emplearse un palillo tan fino: no tiene que hacer ningún esfuerzo)

f. El centro de gravedad del conjunto está *por encima* del punto de apoyo en el borde del velador

g. El conjunto tiene que pesar mucho más que el velador y la vela

h. El giro del conjunto con eje en el palillo tampoco alteraría el equilibrio

1. Afirmaciones ciertas (escriba "ninguna" si todas son falsas): b,c,d

DRAE: **velador. 4.** m. Candelero, regularmente de madera.

B. El techo de las fotografías se acabó de construir en 2016. De arriba abajo consta de teja y aislante (no se ven en las imágenes), tablazón de madera, y estructura portante. Está última consta de tres tipos de piezas: dos pares (vigas inclinadas sobre las que apoya la tablazón), una viga de cumbrera (horizontal), y tensores —o tirantes— (vigas horizontales atornilladas a los pares). La estructura se apoya a su vez en cuatro muros: los pares en los muros longitudinales y la viga de cumbrera en los hastiales. La distancia o luz entre los muros longitudinales es de unos cinco metros, mientras que los hastiales están separados quince (sólo se ve uno en las imágenes). Como se aprecia en las fotografías, la viga de cumbrera queda por encima de los tensores pero por debajo de los pares, y la tablazón no apoya sobre ella. Pares y tensores se repiten cada 120 cm.

¿Cuál o cuáles de las piezas de la estructura portante podría suprimirse sin menoscabo de la resistencia y rigidez de la construcción?

a. Los pares

b. La viga de cumbrera

c. Los tensores

2. Piezas suprimibles (escriba "ninguna" si todas son imprescindibles): b

Explíque brevemente su respuesta:

La carga útil es la del tejado. Descansa sobre los pares y puede alcanzar los muros que están, de media, a 2,5 m de distancia.
Los tensores sin duda ayudan a la rigidez de los pares, por tanto pares+tensores es un conjunto más rígido que los pares por sí solos y, en consecuencia, "más" estructura.
Sobre la viga de cumbrera no descansa ni apoya la tablazón. Podrían apoyarse los pares, pero como los hastiales están separados 15 m y la cumbrera es horizontal, casi parece imposible que cumpla el requisito de rigidez sometida tan solo a su propio peso. Es decir, la cumbrera es bastante más flexible que los pares+tensores (y de estos hay más de 10 unidades), y no puede competir por ser "la estructura", ni por formar parte sustancial de ella: es peso muerto colgado de los pares.

DRAE: **par. 7.** m. Constr. Cada uno de los dos maderos que en un cuchillo de armadura tienen la inclinación del tejado.
hastial. 1. m. Constr. Parte superior triangular de la fachada de un edificio, en la cual descansan las dos vertientes del tejado o cubierta, y, por ext., toda la fachada.

C. Sea un cilíndro de 20 mm de diámetro y 100 mm de longitud, de un metal de 8 kg/ dm^3 de densidad.

3. Volumen del cilindro (Sol.: $\pi(10\,\text{mm})^2 \times 100\,\text{mm}$): 0,0314 dm^3

4. Peso del cilindro: 2,51 N

D. El alcance estructural en tracción (o compresión) de un material se define como...

- ◯ ...la máxima longitud con que puede fabricarse una pieza de ese material
- ◯ ...la máxima luz de una viga biapoyada de ese material sometida a su propio peso
- ⊘ ...el cociente entre su resistencia y su peso específico
- ◯ ...el cociente entre su resistencia y su densidad
- ◯ ...el cociente entre su resistencia y su rigidez
- ◯ ...la máxima distancia a la que puede lanzarse un proyectil de ese material

5. Marque una definición

E. Regla de plástico de 50 cm y 69 g; hoja del diario El País de 10 g, y trozo de madera de pino de 20 g. Si se deja en el aire 23 cm de regla, sobresaliendo de la mesa, el equilibrio es posible, pues el par desestabilizante valdrá $\frac{1}{2}23\,\text{cm} \times \frac{23\,\text{cm}}{50\,\text{cm}} \times 0{,}69\,\text{N} = 3{,}65\,\text{cmN}$ y es claramente menor que el par estabilizante, $\frac{1}{2}27\,\text{cm} \times \frac{27\,\text{cm}}{50\,\text{cm}} \times 0{,}69\,\text{N} = 5{,}03\,\text{cmN}$. Sin embargo, si ponemos el trozo de madera en el extremo volado, el par desestabilizante aumentará en $0{,}2\,\text{N} \times 23\,\text{cm}$, hasta un total de 8,25 cmN y la regla volcará junto con el trozo de madera. Si como contrapeso utilizamos la hoja del diario, extendida, centrada sobre el extremo de la regla sobre la mesa, el par estabilizante aumentará en $0{,}10\,\text{N} \times 27\,\text{cm}$, hasta un total de 7,73 cmN: la hoja del diario no evita el vuelco y cae con todo lo demás. Sin embargo, si con la hoja del diario como contrapeso, se deja caer el trozo de madera desde un altura no menor de 10 cm, la regla apenas se mueve, la hoja temblequea y se queda en su sitio, y el trozo de madera rebota y cae al suelo.

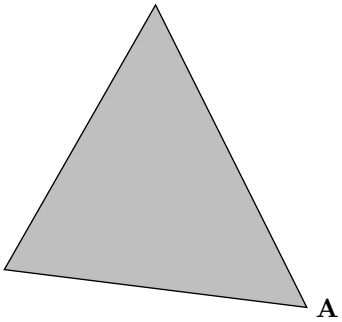
6. ¿Cuál es la variable pertinente que interviene en tan diferente comportamiento cualitativo entre posar suavemente el trozo de madera y dejarlo caer desde cierta altura, entre volcar y no volcar? No puede ser el peso, que es el mismo en los dos casos. Explíquese brevemente.

La presión atmosférica. Cuando el trozo de madera se pone en el extremo, se hace con cuidado, y la "velocidad de llegada" es nula: el peso del trozo tiene "tiempo" para actuar, y comienza un al principio lento movimiento de la regla, que despega la hoja de periódico de la mesa (lo que iguala la presión del aire entre las dos caras de la hoja), y cuando ya sólo queda como contrapesos el peso de la hoja y de la regla que no asoma fuera de la mesa, se inicia un movimiento acelerado, que da con todo en el suelo.
En el segundo caso, el trozo de madera llega con velocidad (y con la aceleración de la gravedad). En el momento del impacto, sobre la cara superior de la hoja actúa la presión atmosférica de unos $100\,\text{kN/m}^2$, quedando la cara inferior sin presión, si está bien plana y pegada a la mesa. Esa diferencia de presión supone un "peso" considerable: si la hoja es como un A3, $100\,\text{kN/m}^2 \times 0{,}42\,\text{m} \times 0{,}3\,\text{m} = 12600\,\text{N}$, más que suficiente para evitar el vuelco en ese *primer momento*. Si la regla no se rompe con el impacto, el trozo de madera rebota, y salvo en el muy improbable caso de que vuelva a "posarse" en la regla, cae el suelo, y regla y hoja del diario quedan tan "tranquilos".
Todo lo anterior pasa sin **tiempo** de que se iguale la presión sobre ambas caras de la hoja, para lo que si hay **tiempo** en el primer caso.
También hay que subrayar el papel de la **presión atmosférica**: en el vacío no habría diferencia. O si la hoja está arrugada, y por tanto la presión atmosférica es prácticamente igual en sus dos caras, siendo la resultante nula.

F. Si una viga de 10 m de longitud tiene un canto de 15 cm, e igual ancho,

7. ¿es muy esbelta? (Responda "Sí" o "No"):	Sí
8. ¿cuánto vale su esbeltez? (Sol.: $10\,\text{m} \div 15\,\text{cm}$):	66,7

G. Del triángulo de la figura se pide calcular su área y perímetro, así como el coseno del ángulo **A**



9. Área: $\approx 460\,\text{mm}^2$

10. Perímetro: $\approx 126\,\text{mm}$

11. $\cos(\mathbf{A})$: $\approx 0{,}55$

Los cálculos pueden hacerse sin necesidad de calculadora, dibujando. Para el perímetro basta con tres medidas sucesivas, véase la serie fotográfica.

Para calcular el coseno, basta con prolongar el lado **AG** hasta medir una "unidad", por ejemplo $100\,\text{mm} = 1\,\text{dm}$, punto **B** en la figura, y trazar por él una perpedicular al lado **AE**, obteniendo el punto **C**. Por definición, el coseno buscado es la razón entre $\bar{\text{AE}}$ y $\bar{\text{AG}}$; por tanto, considerando la semejanza de los triángulos **AGE** y **ABC**:

$$\cos(\mathbf{A}) = \frac{\bar{\text{AE}}}{\bar{\text{AG}}} = \frac{\bar{\text{AC}}}{\bar{\text{AB}}} = \frac{\bar{\text{AC}}}{1\,\text{dm}}$$

es decir, basta medir **AC** en dm.

Finalmente, el área del triángulo vale $\frac{1}{2}\bar{\text{AE}} \times \bar{\text{EG}}$. Ahora situamos el punto **D** a 20 mm de **E** en el segmento **EG**, y trazamos una paralela a **DA** por **G**, para obtener **F** en la intersección con la prolongación de **EA**. Por la semejanza de los triángulos **ADE** y **FGE**:

$$\frac{\bar{\text{AE}}}{\bar{\text{ED}}} = \frac{\bar{\text{FE}}}{\bar{\text{EG}}} \Rightarrow \bar{\text{AE}} \times \bar{\text{EG}} = \bar{\text{FE}} \times \bar{\text{ED}} = \bar{\text{FE}} \times 20\,\text{mm} \Rightarrow \frac{1}{2}\bar{\text{AE}} \times \bar{\text{EG}} = \bar{\text{FE}} \times 10\,\text{mm}$$

es decir, el área pedida se obtiene multiplicando por 10 la medida en milímetros de **FE**

H. Si una estructura soporta una carga útil de 12 veces su propio peso,

12. ¿cuál es su rendimiento en carga? (Sol.: $\frac{12}{1+12}$): $92{,}3\,\%$

I. El pórtico de la figura, de cartón pluma, tiene una masa de 50 g. Descansa por simple contacto en una placa de vidrio. Y tiene como carga permanente el peso de los 250 g de un disco de PVC. Se carga además con una pesa de 328 g. Cuando la pesa se sitúa en el centro no hay desplazamiento apreciable de las zapatas, respecto al testigo de papel debajo de la placa de vidrio (papel rojo, a la izquierda). Sin embargo, si la pesa se sitúa del centro a más de un cuarto de la luz, la zapata de la mano contraria desliza apreciablemente. La luz del pórtico es de unos 41 cm y su altura respecto del vidrio de unos 23; el ancho de las zapatas del pórtico es de 5 cm.

13. Explique brevemente la razón de tan diferente comportamiento cualitativo entre la pesa centrada y la pesa descentrada, entre no deslizar y deslizar:

Puesto que la diferencia está entre deslizar y no deslizar, la cosa tiene que tener que ver con el rozamiento, lo que apunta a las distintas reacciones vertical y horizontal necesarias para el equilibrio en cada caso, puesto que el coeficiente de rozamiento es el mismo en todos los casos. Todos ellos pueden esquematizarse en un alzado del pórtico —dibujado a escala con la geometría dada—, esquemático a su vez, véase la figura, en la que la multipoligonal **ABDE-FG-HI** representa las piezas del pórtico: pies derechos, dintel y zapatas.

Carga centrada. Todo el peso puede suponerse aplicado en el punto medio de **BD**, punto **C**. En realidad, debido al peso propio del pórtico, estará un poco más abajo, en la vertical de **C**, pero como el peso propio es marginal, **C** es una buena aproximación. Las reacciones del vidrio deben ser simétricas, y situadas en algún punto en **FG** y en **HI**. Como las dos reacciones tiene que sumar una fuerza igual al peso pero de sentido contrario, la reacción de la izquierda puede tener como dirección cualquier recta que pase por **C** y no tenga mayor pendiente que **CG** ni menor que **CF**. Y puesto que las componentes vertical y horizontal de esa reacción son, respectivamente, la reacción normal entre vidrio y zapata, y el empuje del pórtico sobre el vidrio, al menos uno de los ángulos **LCG** o **LCF** es menor que el ángulo de rozamiento entre las superficies, pues de lo contrario en este caso se observaría deslizamiento. Por tanto podemos afirmar que el coeficiente de rozamiento será como poco la tangente del menor de ellos, es decir, $\overline{\mathrm{GL}} \div \overline{\mathrm{LC}} \approx 0{,}78$.

Carga descentrada. El peso de los 300 g podemos situarlo en **C**; y el de la sobrecarga de 328 g a un cuarto, en **J**, vectores $\vec{p}$ y $\vec{s}$ respectivamente. Para averiguar la dirección de la suma $\vec{p}+\vec{s}$, vector $\vec{q}$, basta con sumar fuerzas horizontales cualesquiera iguales y opuestas, vectores $\vec{h}$ y $\vec{g}$: la dirección de $\vec{p}+\vec{h}$ intersecta la dirección de $\vec{s}+\vec{g}$ en **K**, lo que determina la posición aproximada de la carga total en **M**. (Nótese que este cálculo vectorial es posible porque $\vec{h}+\vec{g}=\vec{0}$, es decir, se trata de un truco en el que no añadimos en realidad ni peso ni fuerza hroizontal.)

Las reacciones del vidrio sobre las zapatas estarán aplicadas en su superficie (como en el caso anterior), pero ahora sus direcciones tienen que encontrarse en **M** a fin de poder sumar una fuerza igual y opuesta a la carga total $\vec{q}$, y equilibrarla. Y además, su inclinación tiene que ser tal que la zapata izquierda deslice mientras que la derecha no. Como referencia útil, trazamos por **M** paralelas a las direcciones "límite" en el caso de carga centrada (líneas azules y marrones): una dirección de mayor pendiente implica probablemente deslizamiento. Los límites del abanico de las direcciones posibles para la reacción izquierda vienen dados por las direcciones **MG** y **MF**, ambas de menor pendiente que la referencia: esa zapata deslizará, pues el equilibrio en la posición inicial implica empujes previsiblemente mayores en proporción a la reacción normal que en el primer caso, y por tanto mayores que el máximo rozamiento que pueden desarrollar las superficies con el coeficiente estimado anteriormente (líneas marrones). En el caso de la reacción derecha, el abanico de direcciones posibles viene dado por la poligonal **HMI**, rectas todas de mayor pendiente que la referencia, que por tanto no implican deslizamiento, pues la máxima fuerza de rozamiento es, en el caso —peor— de la dirección **MI**, justamente suficiente para transmitir el empuje del pórtico a la placa de vidrio.

La descomposición de $\vec{q}$ según las direcciones de las reacciones es incierta: $\vec{\mathrm{NO}}+\vec{\mathrm{OM}}$ es una de las posibles, pero también $\vec{\mathrm{NQ}}+\vec{\mathrm{QM}}$ lo sería; de hecho el punto para construir el paralelogramo de Aristóteles puede elegirse arbitrariamente dentro del polígono **OPQR** cumpliendo todos las condiciones antedichas: que las reacciones pasen por algún punto de contacto entre zapatas y vidrio, y que la zapata izquierda deslice y la derecha no.

Coeficiente de rozamiento. El coeficiente de rozamiento no puede ser mayor que la tangente del ángulo **NMF**, pues si lo fuera no habría deslizamiento en este caso. Este valor es 1,12, así que lo más que podemos decir es que probablemente esté en el intervalo $[0{,}78; 1{,}12)$

Advertencia. Todo los argumentos anteriores son inciertos por la razón antedicha (acerca de la imprecisión en la posición de la carga total—aplicada en el dintel), y porque no se ha tenido en cuenta en absoluto la deformación del pórtico bajo la carga, que podría variar (y de hecho varía) su posición en el caso de carga descentrada. Además, habría que comprobar que, en realidad, el pórtico no desliza—como se afirma— en el primer caso, pues el coeficiente de rozamiento resultante para ello tiene un valor inusualmente elevado.

14. ¿de qué orden se puede estimar el coeficiente de rozamiento entre las zapatas del pórtico y el vidrio?:

$> 0{,}78$ y $< 1{,}12$

J. Un cuadernillo de 16A3 (de la ETSAM), de 162 g, desliza sobre otro cuadernillo idéntico, si se tira de él con una fuerza de 0,6 N.

15. ¿Cuánto vale el coeficiente de rozamiento entre las hojas de este papel? (Sol.: $\frac{0{,}6}{1{,}62}$): 0,370

Si en vez de poner un cuadernillo sobre otro, se entreveran sus páginas, de manera que cada página del cuadernillo del que se tira esté entre dos hojas del cuadernillo fijo—excepto la hoja superior, que queda encima,

16. ¿con que fuerza hay que tirar del cuadernillo ahora para que deslice y se separe del cuadernillo fijo? (Sol.: $\frac{1{,}62\,\mathrm{N}}{16}\frac{(16+15)+1}{2}\cdot 31\times 0{,}370$) : 19,2 N

copyleft ©Vázquez, 2016 [⋆]