Sólido indeformable

Jerga

Para hablar de **estructura mecánica** hay que concretar un objeto sometido a **acciones** mecánicas y, lo más frecuente, *unido* a otros objetos, denominados **sustentación de la estructura**. Las estructuras de los **edificios** deben permanecer **quietas** (en **equilibrio estático**), respecto a su **sustentación**. Para medir movimientos el sistema de referencia se liga a la sustentación.

Las **fuerzas exteriores** aplicadas sobre la estructura *modelan*: a) las **acciones**, con valor 'conocido'; *y* b) las **reacciones** de la sustentación sobre la estructura, con el valor necesario para conservar el equilibrio. Las **acciones** son fuerzas *independientes*, pueden ser permanentes (peso propio) o variables (fuerza del viento), y con valor conocido (o al menos supuesto) para cada **hipótesis de carga** de la estructura. Las **reacciones** son fuerzas *dependientes* de las acciones y su valor es, *a priori*, desconocido.

En general, el **movimiento** en cada instante puede describirse como un **desplazamiento** según una dirección y una **rotación** respecto a un eje de giro, con aceleraciones y velocidades —lineales y angulares— determinadas por las ecuaciones de la dinámica, variables con el tiempo, al igual que la dirección del desplazamiento y el eje de giro. El **equilibrio estático** exige que ambas aceleraciones sean nulas respecto a cualquier dirección y eje fijados a la sustentación.

Fuerzas, acciones y reacciones

Para modelar acciones y reacciones se usan **fuerzas**. Se representan mediante **vectores fijos** con *módulo*, *dirección* o línea de acción, *sentido* y *punto de aplicación* definidos. Si la estructura se supone provisionalmente **indeformable e irrompible**, puede bastar con **vectores deslizantes**, perdiéndose los detalles locales del punto de aplicación. En cálculos algebraicos intermedios incluso basta con **vectores libres**, que pueden trasladarse paralelamente a sí mismos.

Las acciones y reacciones suelen especificarse como fuerzas de volumen y área: el peso específico de un sólido ($\boldsymbol{\rho}$, kN/m^3) a lo largo de su volumen, la presión del viento ($\mathbf{w}$, kN/m^2) a lo largo de la superficie a barlovento, etc. Tales fuerzas 'realistas' se 'empaquetan' en fuerzas puntuales ($\mathbf{Q}$, kN) aplicadas en sus centros de masa, C. Así, para el peso de un cuerpo, $\boldsymbol{\rho}$, o una presión normal sobre una superficie plana, $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{Q} = \int_V \boldsymbol{\rho}\,\mathrm{d}V\,; \qquad x_{i\mathrm{C}} = \frac{1}{\mathbf{Q}}\int_V x_i\boldsymbol{\rho}\,\mathrm{d}V \quad \text{para } i = 1,2,3$$

$$\mathbf{Q} = \int_A \mathbf{q}\,\mathrm{d}A\,; \qquad x_{i\mathrm{C}} = \frac{1}{\mathbf{Q}}\int_A x_i\mathbf{q}\,\mathrm{d}A \quad \text{para } i = 1,2,3$$

Estas transformaciones se usan por conveniencia y aseguran la **equivalencia estática** entre las distintas representaciones de acciones y reacciones.

Ecuaciones de equilibrio

Adoptando una representación genérica mediante fuerzas puntuales (F), la forma vectorial de las ecuaciones es:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}; \qquad \sum_i \vec{F}_i \times \vec{d}_{i\mathrm{O}} = \vec{0}$$

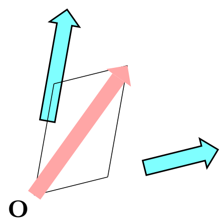
y la forma cartesiana en el plano:

$$\sum_i X_i = 0; \quad \sum_i Y_i = 0; \qquad \sum_i Y_i \cdot x_i - X_i \cdot y_i = 0$$

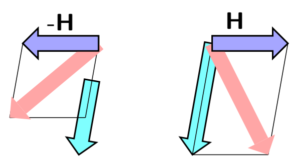
en donde la suma se extiende a *todo* el conjunto de fuerzas considerado.

La **resultante de un conjunto de fuerzas** es una fuerza **estáticamente equivalente** al conjunto. Su vector 'libre' se calcula como suma de fuerzas, $\vec{F}_\mathrm{R} = \sum \vec{F}_i$. Su dirección se calcula con la condición de 'igual momento': $\vec{M}_\mathrm{R} \equiv \vec{F}_\mathrm{R} \times \vec{d}_\mathrm{RO} = \sum \vec{F}_i \times \vec{d}_{i\mathrm{O}}$. Por tanto, la resultante queda determinada como una fuerza $\vec{F}_\mathrm{R}$ y/o un **par** o **momento** $\vec{M}_\mathrm{R}$.

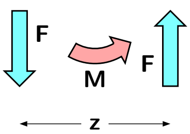
Los cálculos pueden realizarse gráficamente procesando un par de fuerzas cada vez. Pueden distinguirse tres casos.



Fuerzas no paralelas. Mediante la regla del paralelogramo se obtiene su resultante como vector deslizante, que las sustituye en adelante. (La resultante da momento nulo respecto a O, al igual que el par de fuerzas.)

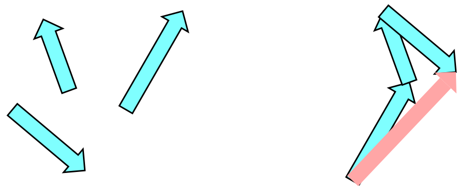


Fuerzas paralelas con resultante no nula. Las fuerzas concurren en el infinito, un poco lejos. Basta añadir al par otro par de fuerzas, **H**, iguales entre sí en todo menos en el sentido, para obtener *otro* par de fuerzas no paralelas y estáticamente equivalentes (el caso anterior).



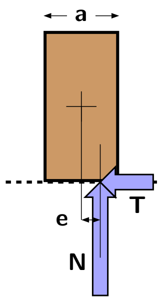
Fuerzas paralelas con resultante nula. Lo mejor es elegir otro par en que *no* se dé esta condición. Si *es* el último par, significa que la resultante del conjunto es una fuerza nula y un momento *no nulo*. Para representar el conjunto puede elegirse cualquier par de fuerzas con idéntico momento **M** = **Fz**. **z** es el *brazo de palanca* del par.

El vector libre de la resultante de fuerza puede calcularse también con un **polígono vectorial**:



Equilibrio de la estructura

Para el conjunto conocido de acciones de la estructura puede calcularse su resultante que, en general, *no será nula*, significando que la sustentación debe aportar un conjunto de reacciones cuya resultante sea igual pero de sentido contrario, de forma que acciones y reacciones formen un conjunto en equilibrio (con resultante nula).

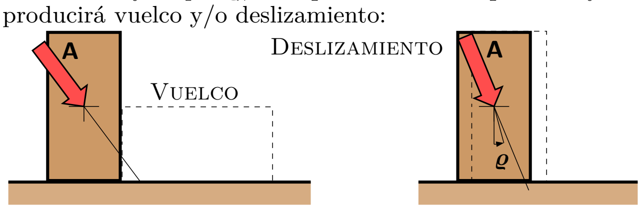


Apoyo sobre el suelo. La mayoría de los edificios se sustentan así, por simple contacto. La reacción del suelo ha de aplicarse en la superficie de contacto y, salvo cimentaciones especiales, debe 'comprimirla'. La reacción puede describirse por una componente normal, **N**; una tangencial, **T**; y una *excentricidad*, **e**.

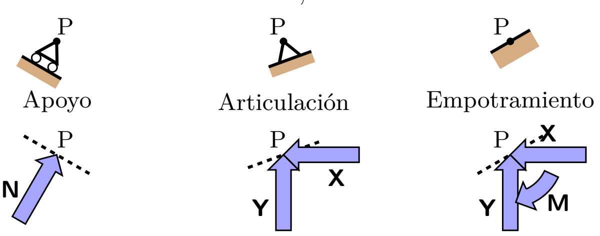
La reacción del suelo puede ser oblícua respecto a la vertical ($\mathbf{T}\neq 0$), pero no más que el ángulo de rozamiento. Si el ángulo de rozamiento entre sustentación y estructura es ϱ, la razón $\mathbf{T}/\mathbf{N}$ no puede superar al coeficiente de rozamiento: $\boldsymbol{\mu}=\tan\varrho \geq \mathbf{T}/\mathbf{N}$. Esto determina el valor máximo de **T** ($\boldsymbol{\mu}\mathbf{N}$). Para sólidos indeformables, con los signos indicados, los *límites* son:

$$0 \leq \mathbf{N}; \quad \text{abs}(\mathbf{T}) \leq \boldsymbol{\mu}\cdot\text{abs}(\mathbf{N}); \quad \text{abs}(\mathbf{e}) \leq 0{,}5\mathbf{a}$$

Si la línea de acción de la resultante de acciones, **A**, no pasa por la superficie de sustentación; o si la inclinación de **A** es mayor que ϱ, el **equilibrio es imposible** y se producirá vuelco y/o deslizamiento:



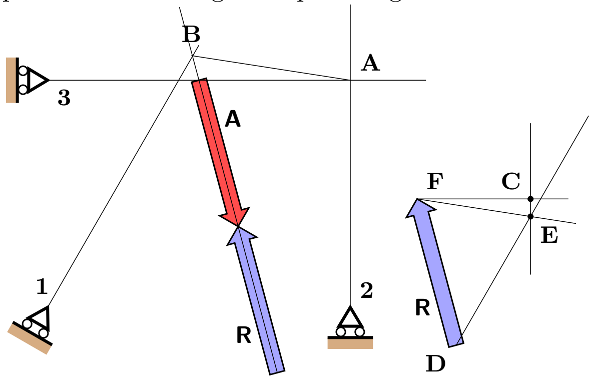
Vínculos teóricos: modelos. La sustentación es un limitación al movimiento. Habitualmente, los apoyos reales —como el anterior— se modelan mediante *vínculos teóricos*, libres de rozamiento y de complejidad geométrica. Son **vínculos en puntos**. El *apoyo simple* —o *deslizante*, o *apoyo* a secas— **sólo** impide al punto P moverse perpendicularmente a la superficie; la *articulación* impide cualquier desplazamiento, pero permite el giro; el *empotramiento* impide los tres movimientos en el plano. (En el espacio se consideran otros vínculos). A cada limitación del movimiento le corresponderá la aparición de una componente de reacción, y en el modelo de sólido indeformable, sin límite sobre su valor.



A pesar de su parecido con aparatos de apoyo reales, **se trata de constructos teóricos**: en particular, *las reacciones pueden tener sentido contrario al dibujado, y cualquier valor*. Las fuerzas representadas no son las únicas posibles, cualesquiera otras estáticamente equivalentes son válidas, a condición de que definan una, dos o tres variables independientes, según se trate de apoyo, articulación o empotramiento.

Sustentación isostática. En el plano, con tres ecuaciones de equilibrio, una sustentación 'universal' debe aportar como mínimo **tres** componentes de reacción independientes. Esta sustentación mínima se denomina *isostática*. Ejemplos: apoyo simple en el suelo (sin superar sus límites mecánicos y geométricos); un empotramiento; una articulación y un apoyo; tres apoyos cuyas reacciones **no** concurran en un punto.

Determinación de reacciones. Con sólidos indeformables, sólo es posible determinar las reacciones si la sustentación es isostática. La resultante de las reacciones es conocida: es la opuesta a la resultante de las acciones. ¿Como descomponerla en reacciones en los vínculos? Aparte de utilizar ecuaciones, gráficamente puede usarse la regla del paralelogramo *al revés*.



En el ejemplo, las reacciones en **1**, **2** y **3**, son, respectivamente, **DE**, **EC** y **CF**. Se obtienen como sigue: por **A** ha de pasar $\vec{\mathrm{EC}}+\vec{\mathrm{CF}}$, y también por **B**, lo que determina la direccion **AB**. Descomponiendo **R** según **AB** y **1B** se determina **E**. Solo queda descomponer **EF** para obtener **C**.

Equilibrio estable: seguridad.

En sustentaciones reales, como el simple apoyo en el suelo, los valores posibles de las reacciones tienen límites mecánicos y geométricos (incluso considerando a los sólidos indeformables e infinitamente resistentes). Las ecuaciones de equilibrio, *junto* a las inecuaciones que expresan tales límites, permiten explorar el intervalo en el que las acciones son compatibles con el equilibrio.

No basta con restringirse a ese intervalo. El equilibrio *estricto*, **en el límite**, es *inestable*. Para asegurar la estabilidad se utilizan *coeficientes de seguridad*. En cada *condición de equilibrio* se agrupan en cada miembro las acciones **favorables** y las **desfavorables**. Para las acciones favorables se adopta su mínimo valor si son variables; para las acciones desfavorables, al revés, su valor máximo. Finalmente, el miembro *desfavorable* se multiplica por el coeficiente de seguridad, γ —mayor que la unidad. Con esta condición **segura**, puede determinarse el valor mínimo o máximo compatible con la *seguridad* de la variable de interés.

$$\underbrace{a_1F_1+\cdots+a_iF_i}_{\text{favorables}} \geq \underbrace{a_jF_j+\cdots+a_nF_n}_{\text{desfavorables}}$$

$$\text{mín}(a_1F_1+\cdots+a_iF_i) \geq \text{máx}(a_jF_j+\cdots+a_nF_n)$$

$$\text{mín}(a_1F_1+\cdots+a_iF_i) = \gamma\times\text{máx}(a_jF_j+\cdots+a_nF_n)$$

Más documentación *on line*:
http://habitat.aq.upm.es/gi/mve/mmcyte/