Tirantes y codales (tracción y compresión)

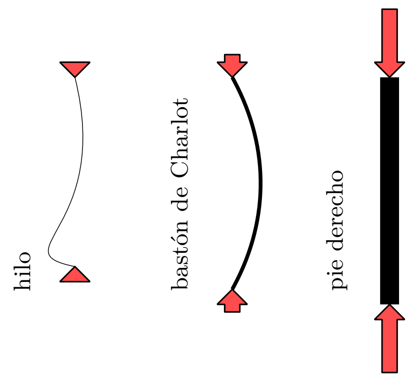
> Os lo repito, es más fácil que un camello entre por el ojo de una aguja que el que un rico entre en el Reino de los cielos.
>
> Mateo **19** 24 — Biblia de Jerusalem, 1985, Bilbao

En la versión castellana de Casiodoro de Reina (1573) figura "cable" en vez de "camello" (y en nota marginal se remite a "maroma" o "camello"): el error proviene de la idéntica pronunciación en el griego bizantino de "camello" ($\xi\acute{\alpha}\mu\eta\lambda o\varsigma$) y "cuerda" ($\xi\acute{\alpha}\mu\iota\lambda o\varsigma$). Mateo, en cualquier caso, escribió en arameo (entre y para un público judío) "gāmāl", raíz semítica para "camello" (también en árabe). Por otra parte, Lucas **18** 25 esribe en griego $\beta\varepsilon\lambda\acute{o}\nu\alpha$ que significa "aguja" y no "puerta" como se sostiene hoy en Internet (junto a muchísimas otras leyendas urbanas), intentando rebajar la radicalidad de la frase.

Cables que resistan compresión

Los cables, las cuerdas, los hilos ... resisten fuertes tracciones pero en general son incapaces de oponer resistencia cuando se les aproxima sus dos extremos. ¿Por qué? *Son muy finos.* Más exactamente, su grueso es muy pequeño en comparación con su longitud y se *doblan, pandean* (curvan) con facilidad y sin esfuerzo. Podemos enhebrar el hilo en la aguja mediante un truco: sostenemos el hilo de tal forma que empujamos un trozo muy corto contra el ojo de la aguja: un trozo que *ahora* no es tan largo en comparación con su grueso y que, por ello, muestra alguna resistencia a ser doblado cuando no atinamos exactamente y tropezamos con el cuerpo de la aguja.

La proporción entre la longitud y el grueso la denominamos *esbeltez geométrica* (o simplemente 'esbeltez'). Y de que sea pequeña o grande va a depender que un elemento lineal sea capaz o no de resistir compresiones. (El fenómeno depende de otros detalles además.)



Resistencia a la compresión

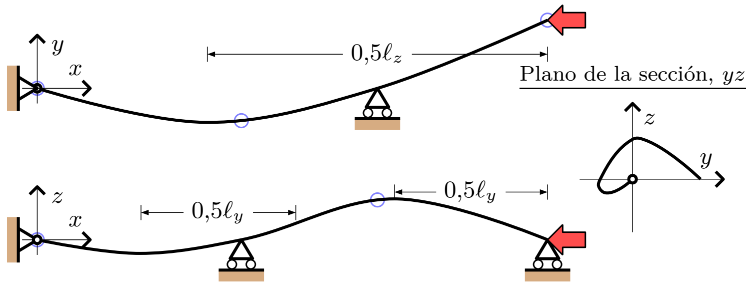
Aunque mediante finos hilos se puede arriostrar un pie derecho, aquellos no pueden sustituirlo (salvo que esté traccionado, caso raro): los hilos tienen *poca o ninguna* rigidez frente al acortamiento: se comban o pandean sin ofrecer resistencia. Una barra cilíndrica puede también pandear si es *esbelta*, pero ofrece resistencia a aumentar su curvatura. Un cubo macizo puede ser aplastado, pero difícilmente pandea o se curva antes de romperse. Nos encontramos con una asimetría en la Naturaleza: mientras que una pieza traccionada se parte en dos, una pieza comprimida puede quedar aplastada y rota en mil pedazos o bien quedar totalmente curvada sin siquiera partirse (o bien en cualquiera de las situaciones intermedias que cabe imaginar).

La resistencia (y la rigidez) frente al pandeo así como la resistencia a la compresión dependen de:

- la esbeltez geométrica
- la forma de la sección (maciza, hueca, redonda, rectangular,...)
- las propiedades del material estructural (**f**,**E**,...)

De forma aproximada, la influencia de las dos primeras puede resumirse con la influencia de la *esbeltez mecánica* de la pieza, λ, proporción entre la *luz de pandeo* y el *radio de giro* en el plano que contiene la pieza pandeada, $\lambda_\pi = \ell_\pi \div \mathbf{i}_\pi$. Nótese que el plano π considerado se suele denominar también con el eje coordenado perpendicular con él: el plano xz con el eje y, etc.

Luz de pandeo ℓ. Es el *doble* de la distancia entre un punto de curvatura nula y el *siguiente* punto de pendiente nula en la pieza pandeada. Dependiendo de la sustentación y del arriostramiento, el pandeo puede ser distinto en cada plano que se considere. En cada plano hay que buscar la máxima luz de pandeo. Es una medida *esencialmente* proporcional a la *máxima excentricidad* de la compresión. *En piezas articuladas en ambos extremos es igual simplemente a su longitud.*



Radio de giro i. Se define respecto de un eje de la sección de la pieza que pase por su centro de gravedad.

$$\mathbf{i}_{xz} = \mathbf{i}_y = \sqrt{\frac{\mathbf{I}_y}{\mathbf{A}}} \qquad \mathbf{I}_y = \int_A z^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad \mathbf{A} = \int_A \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

El radio de giro no puede ser mayor que 0,5b siendo b el ancho máximo de la sección en el plano considerado. Para secciones redondas macizas vale un cuarto de su diámetro, para las cuadradas 0,29 de su lado; para redondas huecas de pequeño espesor (comparado con el diámetro) es del orden del 35 % del diámetro, mientras que para las cuadradas huecas, del 40 % de su lado.

Para otras formas más complicadas, los fabricantes ofrecen los valores tabulados en dos o más planos (véase la hoja **DATOS ESTRUCTURALES**).

Plano de pandeo. Cada pieza pandea en un plano 'preferente', aquel con *mayor esbeltez mecánica.* A compresión, la pieza debe dedicar parte de su resistencia y rigidez a *estabilizar* aquellos de sus puntos que no lo estén por el arriostramiento o la sustentación, evitando grandes excentricidades en la posición de equilibrio respecto a la posición de partida, quedando para resistir la compresión sólo una fracción de aquella. Metafóricamente, el área 'eficaz' a compresión sería $\mathbf{A}/\omega$, siendo ω el *coeficiente de pandeo*, función *creciente* de la esbeltez mecánica en el plano de pandeo que la tenga mayor (véase la hoja **DATOS ESTRUCTURALES**). $1/\omega$ sería la fracción del área dedicada a la compresión ($\omega \geq 1$); la fracción restante $(1 - 1/\omega)$ se dedicaría a la flexión (no es más que una metáfora conveniente). En realidad, $\omega - 1$ es una cantidad proporcional a la excentricidad resultante, causa de que tengamos una compresión excéntrica, es decir, acortamiento simultáneo con curvatura.

Para una esbeltez mecánica nula resulta que $\omega = 1$, una situación más bien teórica (con excentricidad nula: una compresión "pura" por así decir). Las piezas poco esbeltas tienen coeficientes de pandeo que tienden a ese valor (pandean poco o nada).

La resistencia a compresión de una pieza comprimida (o codal) viene dada por:

$$\gamma\mathbf{N} \leq \frac{\mathbf{A}\mathbf{f}_e}{\omega} \qquad \text{o bien} \qquad \mathbf{N} \leq \frac{\mathbf{A}\mathbf{f}}{\omega}$$

en donde $\mathbf{N}$ es la compresión *en servicio* y $\mathbf{f}$ es la tensión que el material resiste con seguridad a compresión por aplastamiento ($\mathbf{f} = \mathbf{f}_e \div \gamma$).

La fracción $1/\omega$ se denomina desde hace poco χ (pronúnciese "ji") en muchos documentos técnicos y normas gubernamentales, de manera que χ es directamente la fracción de área que resultaría 'eficaz' para aguantar la compresión combinada con pandeo. Por tanto, todo lo anterior también puede escribirse en función de χ:

$$\gamma\mathbf{N} \leq \chi\mathbf{A}\mathbf{f}_e \qquad \text{o bien} \qquad \mathbf{N} \leq \chi\mathbf{A}\mathbf{f}$$

siendo χ una función *decreciente* de la esbeltez.

Las propiedades del material influyen en la función concreta que hay que considerar para relacionar el valor de la esbeltez mecánica λ con el valor apropiado del coeficiente de pandeo ω. Para el acero y la madera corrientes los valores oficiales se dan tabulados en la hoja mencionada al ser las funciones bastante enojosas de calcular. También pueden obtenerse mediante fórmulas aproximadas:

$$\begin{aligned} \text{madera corriente} \quad &: \quad \omega \approx 1 + \left(\frac{\lambda_{\max}}{70}\right)^2 \\ \text{acero laminado corriente} \quad &: \quad \omega \approx 1 + \left(\frac{\lambda_{\max}}{93{,}3}\right)^{2{,}2} \end{aligned}$$

Cuanto mayor es la deformación por aplastamiento en el límite elástico del material, mayor es el coeficiente de pandeo, de manera que los aceros de mayor resistencia nominal tienen mayor ω a igualdad de todo lo demás, es decir, menor χ, es decir, menor fracción de su área podría dedicarse a resistir la compresión.

Tanto por evitar un despilfarro excesivo de material como por otros detalles (que quedan fuera del alcance de esta apostilla) **deben usarse siempre soluciones con** $\omega \leq 2$. Para conseguirlo suele bastar con cambiar de forma de sección (v.g., pasar de maciza a hueca) o, en último extremo, cambiando el trazado de la estructura (v.g., cambiando un pie derecho por una estructura triangulada de tres o más cordones paralelos). Por sorprendente que parezca, cuanta más 'compresión' haya menos 'pandeo' se produce, a igualdad de todo lo demás, v.g. los soportes de la planta baja de un rascacielos 'no pandean' y puede tantearse su diseño con $\omega \approx 1$ (si su docente de Proyectos Arquitectónicos le dice otra cosa, cámbielo).

Comprobación y diseño

⋆ **Para piezas traccionadas** ("tirantes"):

$$\text{comprobación: } \sigma_{\text{cmp}} = \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{A}} \leq \mathbf{f} \qquad \text{diseño: } A \geq \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{f}}$$

siendo σ_{cmp} la tensión para comparar con la segura del material y que, en este caso, es también la "de trabajo" o "servicio" de la pieza.

⋆ **Para piezas comprimidas** ("codales"), la comprobación es más complicada. En el plano π, dados $\ell_\pi, \mathbf{A}, \mathbf{i}_\pi, \mathbf{N}$ y $\mathbf{f}$:

$$\lambda_\pi = \frac{\ell_\pi}{\mathbf{i}_\pi} \Rightarrow \omega_\pi = f(\lambda_\pi); \quad \sigma_{\text{cmp}} = \frac{\omega_\pi\mathbf{N}}{\mathbf{A}} \leq \mathbf{f} \qquad (1)$$

Para piezas simplemente comprimidas, bastará la comprobación en el plano que tenga mayor esbeltez mecánica. Si la pieza resulta segura, la tensión de trabajo será $\sigma_t \approx \mathbf{N}/\mathbf{A}$.

No es fácil derivar una regla de diseño para piezas comprimidas, dada la complicada relación (no analítica en general) entre $\mathbf{A}$ y ω. Dados $\mathbf{N}$ y $\mathbf{f}$, lo primero es decidir un tipo de sección, lo que permitirá apostar por cuál será el plano de mayor esbeltez mecánica, dadas las longitudes de pandeo. Para ese plano hay que resolver la ecuación $\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{f}}\omega(A) = A$ y habrá que proceder por tanteos.

Es un problema semejante a resolver ecuaciones trascendentes, como $x = \arccos x$, que tienen solución pero que sólo pueden calcularse numéricamente: con una calculadora, se pone el modo "radianes", se introduce un valor cualquiera para x y se aprieta la tecla "arccos" una y otra vez hasta que el número x permanece constante en la pantalla… Pero no tenemos una tecla "$\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{f}}\omega$". A la vista de cómo son las relaciones funcionales entre $\lambda, \mathbf{i}(A)$ y $\omega(A)$ siempre ocurrirá que si $A_1 < A_2$ entonces $\omega(A_1) > \omega(A_2)$ a igualdad de todo lo demás. Además, como la solución 'exacta' de la ecuación cumple con:

$$A = \frac{\omega(A)\mathbf{N}}{\mathbf{f}}$$

y el valor inferior de ω es la unidad:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{inf}} = 1 \quad &\text{y} \quad A_{\text{inf}} = \frac{\omega_{\text{inf}}\mathbf{N}}{\mathbf{f}} \leq A \\ \omega_{\text{sup}} = \omega(\ell, \mathbf{i}(A_{\text{inf}})) \quad &\text{y} \quad A_{\text{sup}} = \frac{\omega_{\text{sup}}\mathbf{N}}{\mathbf{f}} \geq A \end{aligned}$$

Si $A_{\text{sup}} - A_{\text{inf}}$ es muy pequeña, ambos valores de A conducirán a elegir el mismo perfil del catálogo y basta con comprobar que la sección diseñada cumple con (1). En otro caso, podemos probar con un área $0{,}5(A_{\text{inf}} + A_{\text{sup}})$ y si la tensión de comparación con (1) es menor que la segura sustituimos A_{inf} por el nuevo valor, o en otro caso A_{sup}. Y seguimos así hasta que la diferencia acabe siendo muy pequeña.