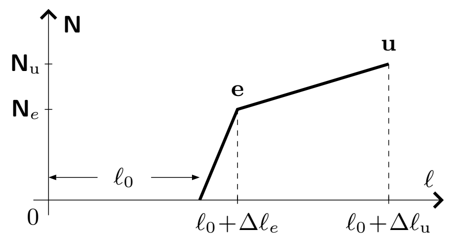
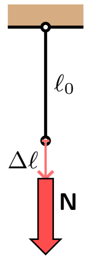
Sólido deformable (I)

Rotura de cables





Con el ensayo de cables de longitud ℓ_0 y sección $\mathbf{A}$ (de volumen $\mathbf{A}\times\ell_0$) se persigue determinar la relación entre la fuerza $\mathbf{N}$ aplicada y el alargamiento $\Delta\ell$ producido. Aunque los resultados conducen a una nube de puntos, se obtiene frecuentemente una aproximación muy razonable con dos rectas.

La fuerza que el cable puede resistir es proporcional a su área (experimento mental: un cable de doble área sería como dos cables paralelos y se necesitaría una fuerza doble, $2\mathbf{N}_u$, para romperlo). El alargamiento que el cable experimenta es proporcional a su longitud (experimento mental: un cable de doble longitud sería como dos cables, uno a continuación del otro, y bajo una fuerza $\mathbf{N}$ se alargaría el doble, $2\Delta\ell$). Esto sugiere definir la *tensión normal media* y la *deformación longitudinal media* como:

$$\overline{\sigma} = \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{A}}; \qquad \overline{\varepsilon} = \frac{\Delta\ell}{\ell_0}.$$

Tensión normal σ: Fuerza por unidad de superficie que un trozo de sólido ejerce sobre otro en un punto, perpendicular a la superficie *imaginaria* que los separa. Para superficies planas: $\mathbf{N} = \int_A \sigma \, \mathrm{d}A$.

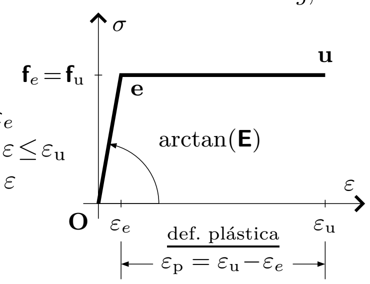
Deformación longitudinal ε: Separación por unidad de longitud que experimentan puntos próximos de un sólido sometido a tensión normal. A lo largo de una recta: $\Delta\ell = \int_L \varepsilon \, \mathrm{d}L$.

Tensiones y deformaciones no son, en general, constantes ni uniformes en el área o longitud considerada. Los valores medios sí lo son, entendidos como valores medios de la función integrada.

Material *elasto-plástico*

El ensayo sistemático de cables del mismo material permite determinar la relación entre tensiones y deformaciones. Para tensiones 'muy pequeñas' *todos* los materiales parecen cumplir con la *Ley de Hooke*: «tensiones y deformaciones son proporcionales». La constante de la proporción se denomina *módulo de Young*, $\mathbf{E}$.

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} \mathbf{E}\varepsilon & \text{si } \varepsilon \le \varepsilon_e \\ \mathbf{f}_u & \text{si } \varepsilon_e < \varepsilon \le \varepsilon_u \\ 0 & \text{si } \varepsilon_u < \varepsilon \end{cases}$$



Un modelo irreal pero suficientemente aproximado en muchos casos es el **modelo elasto-plástico**, definido por tres parámetros: ($\mathbf{E}$,$\mathbf{f}_e$,ε_u) ó ($\mathbf{f}_e$,ε_e,ε_u). En este modelo la relación real se simplifica mediante dos estados: *proporcional*, recta **Oe**, y *plástico*, recta **eu**. El punto **u**, de coordenadas (ε_u,$\mathbf{f}_u$), representa la rotura. En el punto **e**, denominado *límite elástico*, de coordenadas (ε_e,$\mathbf{f}_e$), acaba el estado proporcional y comienza el plástico.

Modelo 'cable'

Responde a la idea intuitiva de *cable*: algo que cuesta estirar (*tracción*), pero no acortar (*compresión*). Para alargar un cable, de longitud inicial $\mathbf{L}$ y sección $\mathbf{A}$, hasta una longitud $\mathbf{L} + \delta$, se requiere una fuerza $\mathbf{N}$:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\mathbf{L}}; \qquad \sigma = \mathbf{E}\varepsilon; \qquad \mathbf{N} = \sigma\mathbf{A}; \qquad \text{si } \varepsilon \le \varepsilon_e.$$

En el estado proporcional, la relación entre la fuerza de tracción, $\mathbf{N}$, y el alargamiento, δ, se denomina *rigidez de cable*:

$$\mathbf{K}_{\text{cable}} = \frac{\mathbf{N}}{\delta} = \frac{\sigma\mathbf{A}}{\varepsilon\mathbf{L}} = \frac{\mathbf{EA}}{\mathbf{L}}$$

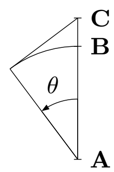
La rigidez, $\mathbf{K}$, es una constante de cada cable. *Por debajo del límite elástico* permite calcular la tracción necesaria para producir un cierto alargamiento:

$$\mathbf{N}(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon < 0 & \text{compresión} \\ \mathbf{K}\delta & \text{si } 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_e & \text{e. proporcional} \\ \mathbf{f}_u\mathbf{A} & \text{si } \varepsilon_e \le \varepsilon \le \varepsilon_u & \text{e. plástico} \\ 0 & \text{si } \varepsilon_u < \varepsilon & \text{rotura} \end{cases}$$

Hipótesis de desplazamientos pequeños

Las estructuras de edificación que cumplen con los *requisitos de rigidez* habituales se deforman inapreciablemente. Las *diferencias* entre la geometría inicial y la de equilibrio (desplazamientos, rotaciones) son tan pequeñas que, cuando convenga, puede usarse *la primera en vez de la segunda*. En particular, si $\theta \to 0$, *puede sustituirse el arco por la tangente*:

$$\cos(\theta) \approx 1; \quad \overline{\mathbf{BC}} \approx 0; \quad \overline{\mathbf{AB}} \approx \overline{\mathbf{AC}}.$$

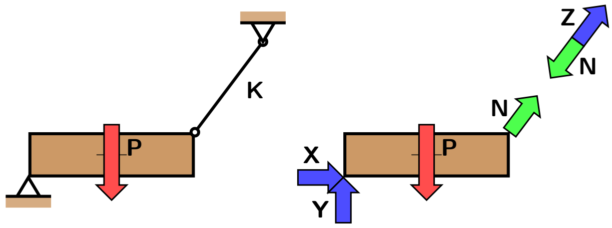


Si además θ está expresado en *radianes*, entonces también $\theta \approx \sin(\theta) \approx \tan(\theta)$.

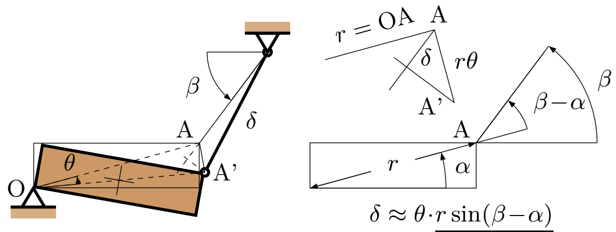
Equilibrio y deformación

Las reacciones están en equilibrio *teórico* con las acciones si se cumplen las ecuaciones de la estática para la estructura como un todo. El equilibrio *real* depende de que una *estructura* ponga en comunicación acciones y reacciones. Ese flujo de 'información' **tensiona** y **deforma** la estructura. Pero **cualquier parte de la estructura** tiene que estar también en equilibrio.

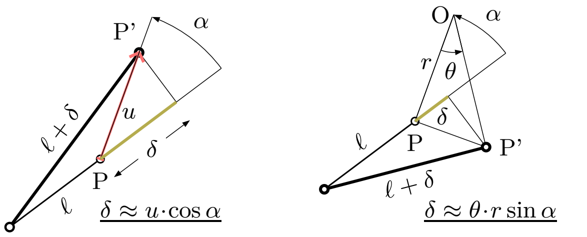
Cada vínculo de la sustentación puede sustituirse por sus reacciones. **Cada sólido deformable** puede sustituirse por las resultantes de tensión que aparecen en las superficies de los cortes imaginarios necesarios para retirarle de la estructura; estas fuerzas se denominan **fuerzas interiores** o **esfuerzos**. Una vez suprimido lo deformable, lo que queda de la estructura es indeformable y debe estar también en equilibrio: puede tratarse de puntos o **nodos**, o de sólidos indeformables (supuestamente). El conjunto de las ecuaciones de la estática aplicadas a cada parte indeformable más las condiciones de equilibrio de cada parte deformable representa el equilibrio de la estructura y de sus partes.



Durante la deformación de la estructura, los **vínculos** permanecen quietos, mientras que los **nodos** experimentan desplazamientos, y los **sólidos indeformables**, además, giros (siempre que lo permita la sustentación). El conjunto de estos desplazamientos y giros son los **grados de libertad** de la estructura. Las relaciones geométricas de los grados de libertad con las deformaciones de la estructura se denominan **ecuaciones de compatibilidad**. *Empleando la geometría inicial* (hipótesis de desplazamientos pequeños) se obtiene una aproximación lineal para estas ecuaciones.



La manera menos equívoca de establecer las ecuaciones de compatibilidad consiste en dibujar (a escala) un desplazamiento 'unidad' para cada grado de libertad y medir las deformaciones *compatibles* con él. El planteamiento analítico se apoya en dos relaciones básicas para 'cables': el alargamiento δ originado por un desplazamiento u, y aquel otro ocasionado por un giro θ ('pequeños' ambos). El alargamiento total de un cable será la suma de las contribuciones de cada grado.

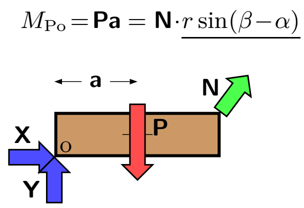


Si se puede modelar una estructura de forma que el número de grados de libertad sea igual al número de deformaciones, entonces el número de fuerzas interiores es igual al número *mínimo* de ecuaciones de equilibrio y, gracias a la hipótesis de desplazamientos pequeños, se puede obtener el valor aproximado de los esfuerzos a partir de las acciones, sin ninguna información acerca de la deformación de la estructura. Este tipo de análisis se denomina **isostático**.

Si el número de deformaciones es mayor que el número de grados de libertad de la estructura o las deformaciones pueden ser arbitrariamente grandes, el análisis **isostático** es inviable.

Las ecuaciones de equilibrio más relevantes corresponden a la ausencia de movimiento para cada grado de libertad: a un giro respecto a un eje, la ecuación de momentos respecto a ese eje; a un desplazamiento, la ecuación de fuerzas en su dirección. Este conjunto *mínimo* de ecuaciones permite relacionar los esfuerzos con las acciones. Las reacciones se calculan *a posteriori* mediante ecuaciones adicionales.

La aproximación lineal a las ecuaciones de compatibilidad y de equilibrio describe una relación de 'contravarianza' entre esfuerzos y deformaciones. A efectos prácticos, nótese que los coeficientes de los grados de libertad en unas son *idénticos* a los de los esfuerzos en las otras.



'Superposición de estados'. Debido al carácter lineal de las ecuaciones obtenidas mediante la hipótesis de desplazamientos pequeños, se cumplen todas las propiedades de las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales. En particular, *el efecto de la suma es idéntico a la suma de los efectos, para cualquier causa (acciones, tensiones, etc).*

Resistencia, rigidez, estabilidad.

Las acciones sobre una estructura deben ser conocidas (o suponerse). Se denomina *valor característico*, A_{k}, a su máximo valor probable. Las acciones *constantes* quedan así determinadas. Las *variables* oscilan entre sus valores característicos mínimo y máximo. Las acciones que sean entre sí independientes pueden combinarse con sus distintos valores. La estructura ha de analizarse o diseñarse a la vista de todas las *hipótesis de carga* que sean plausibles. Los valores de las acciones de cada hipótesis se denominan *de servicio*: son las que actúan durante la vida *útil* de la estructura en esa hipótesis.

El equilibrio de la estructura bajo cualquier combinación de acciones debe cumplir con requisitos de **resistencia** y **rigidez** fijados de antemano. La estructura debe *resistir* cualquier combinación *imaginaria* que resulte de amplificar las acciones desfavorables por un *coeficiente de seguridad* $\boldsymbol{\gamma}$ acordado; además, bajo las acciones *de servicio* las tensiones o deformaciones no deben superar el límite elástico. Para alcanzar el equilibrio bajo las acciones *de servicio*, la estructura *no debe deformarse en exceso*: debe ser *suficientemente rígida*: los grados de libertad y/o las deformaciones deben ser inferiores a valores tolerables por las partes no estructurales del edificio (que no deben *entrar en tensión* por la deformación de la estructura).

La estructura debe ser, además, *estable*: pequeñas variaciones en los valores supuestos para las acciones, su geometría o las características de sus materiales *no deben acarrear* el incumplimiento de los requisitos anteriores.