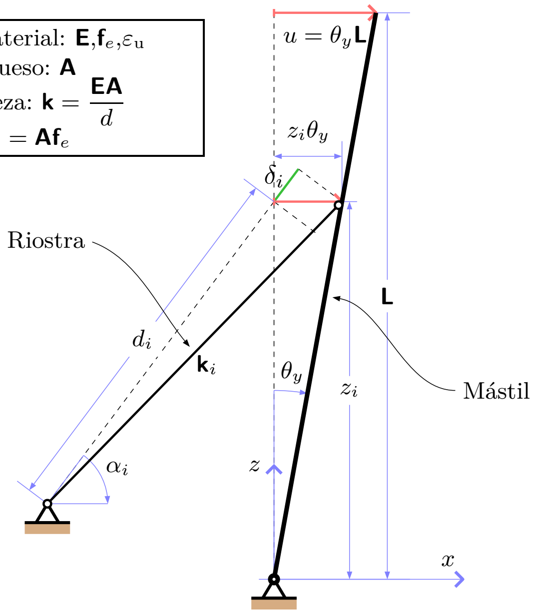
Sólido deformable (IV). Compresión. Estabilidad.

Riostras. Arriostramiento.

Para que un mástil pueda soportar algo distinto de una tracción, o bien se empotra en su base, o bien se estabiliza mediante *riostras*. De otro modo, sin *arriostramiento*, mantenerlo en posición *vertical* es una *proeza acrobática*, incluso solo bajo su peso. Si las riostras son cables sólo resultan eficaces en tanto se tensen con el desplome del mástil. Las riostras, cables o barras, proporcionan rigidez frente al desplome, medido como un giro θ o como un desplazamiento en cabeza u.

Material: $\mathbf{E}$,$\mathbf{f}_e$,ε_u
Grueso: $\mathbf{A}$
Pieza: $\mathbf{k} = \dfrac{\mathbf{EA}}{d}$
$\mathcal{R}_u = \mathbf{A}\mathbf{f}_e$

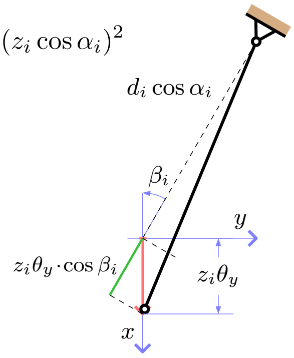


Para cables perpendiculares al eje del giro (el y), la rigidez del arriostramiento en periodo proporcional es:

$$\delta_i \approx z_i\theta_y \cdot \cos\alpha_i; \quad N_i = \mathbf{k}_i\delta_i; \quad M_y \approx z_i \cdot N_i \cos\alpha_i$$

$$\mathbf{K}_{M\theta} = \frac{M_y}{\theta_y} \approx \mathbf{k}_i(z_i\cos\alpha_i)^2$$

Si el cable está en un plano que forma un ángulo β_i con el plano de giro (el xz), el desplazamiento transversal en el plano β_i será $z_i\theta_y \cdot \cos\beta_i$, y la ecuación de compatibilidad $\delta_i \approx z_i\theta_y{\cdot}\cos\beta_i{\cdot}\cos\alpha_i$. La rigidez añadida al arriostramiento se determina como antes:



$$\mathbf{K}_{M\theta} = \frac{M_y}{\theta_y} \approx \mathbf{k}_i(z_i\cos\alpha_i\cos\beta_i)^2$$

Un cable en un plano perpendicular al de giro ($\beta = 90^o$) no aporta ninguna rigidez. La eficiencia aumenta cuando $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$, $d \to 0$ y $z \to \mathbf{L}$, a igualdad de grueso. Si el mástil está arriostrado por varios cables, la rigidez frente al giro es **la suma de la de todos los que se alargan**, lo que depende del **signo de** θ_y. Los cables que no se *tensan* no sirven de nada.

Si como grado de libertad se adopta el desplazamiento transversal de la cabeza del mástil, u, entonces $u \approx \mathbf{L}\theta_y$, y la rigidez se mide ahora con la proporción entre el momento y u:

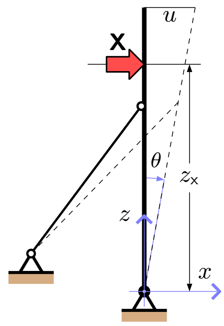
$$\mathbf{K}_{Mu} = \frac{M_y}{u} \approx \frac{M_y}{\mathbf{L}\theta} = \frac{\mathbf{K}_{M\theta}}{\mathbf{L}}$$

Las expresiones anteriores de la rigidez $\mathbf{K}_{M\theta}$ se apoyan en la *hipótesis de desplazamientos pequeños* y comportamiento proporcional, y son una aproximación al primer término del desarrollo en serie de la expresión exacta, y *sobrestima* la rigidez suministrada; pero es *bastante buena* si $\alpha_i \leq 75^o$.

Acciones que provocan desplomes

El conjunto de riostras, el *arriostramiento* hace frente a las acciones que ejercen momentos sobre el mástil.

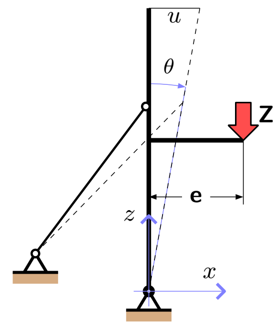
Carga transversal.
Una fuerza transversal $\mathbf{X}$ a una distancia z_x produce un momento $z_\mathrm{x}\mathbf{X}$. Si es posible asegurar que el giro se produce exclusivamente en el plano xz, entonces:



$$\theta_y \approx \frac{z_\mathrm{x}\mathbf{X}}{\mathbf{K}_{M\theta}} = \frac{z_\mathrm{x}\mathbf{X}}{\mathbf{K}_{Mu}\mathbf{L}}$$

$$u \approx \frac{z_\mathrm{x}\mathbf{X}}{\mathbf{K}_{Mu}}$$

Carga longitudinal excéntrica. ($u \ll \mathbf{e}$)
Una fuerza longitudinal $\mathbf{Z}$ actuando con una excentricidad $\mathbf{e}$ produce un momento $\mathbf{eZ}$. Si sólo se produce giro en el plano xz, entonces:



$$\theta_y \approx \frac{\mathbf{eZ}}{\mathbf{K}_{M\theta}} = \frac{\mathbf{eZ}}{\mathbf{K}_{Mu}\mathbf{L}}$$

$$u \approx \frac{\mathbf{eZ}}{\mathbf{K}_{Mu}}$$

En general, con varias acciones simultáneas que ejerzan momento, si el giro se produce en xz, su valor se obtiene dividiendo el momento total M_y por la rigidez total frente al giro. Una vez obtenido el giro necesario para alcanzar el equilibrio queda determinado el esfuerzo en cada cable:

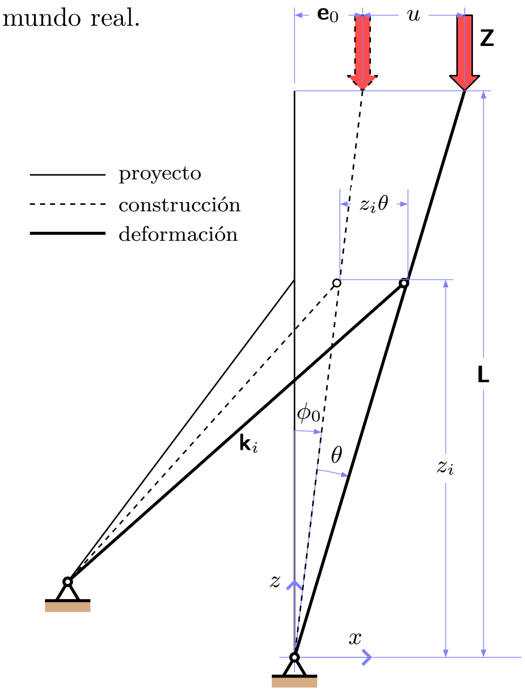
$$\varepsilon_i \approx \frac{z_i}{d_i}\cos\alpha_i\cos\beta_i \cdot \theta_y \quad \text{y si } \varepsilon_i \leq \varepsilon_{ei}, \quad N_i = \mathbf{k}_i\varepsilon_i d_i$$

Compresión centrada o 'simple'

—¿Cuantas veces has estado en New York?
—La verdad: no me acuerdo. Quince o dieciséis, quizás... ¿Y tú?
— ¡Umm! *Tampoco me acuerdo...* Una o ninguna...

Con la aproximación anterior, una *sola* fuerza $\mathbf{Z}$ sin excentricidad ($\mathbf{e} = 0$) no ejerce momento sobre la base del mástil, y el giro calculado es nulo, y también lo son los esfuerzos en los cables. Si la fuerza es una tracción para el mástil y *es la única previsible*, los cables resultan innecesarios. Pero si se trata de una compresión, *sabemos* que son necesarios aunque parece que no se tensan. Se trata de un *defecto* de la hipótesis de desplazamientos pequeños: al estudiar el equilibrio *en la geometría inicial* de la estructura, $\theta_y = 0$, $u = 0$, no hay efectivamente momento, pero ¿lo habría con una geometría que incluya deformaciones? ¿Hemos estado o no en New York? **¡No podemos olvidarlo!**

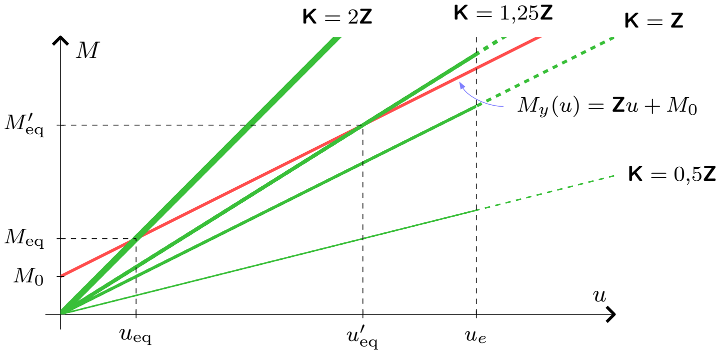
Mundo perfecto. Supongamos el mástil *perfectamente* recto. En un análisis de *segundo orden* se estudia la situación en que se ha producido un desplazamiento u (o un giro θ) mediante una *perturbación momentánea*. Entonces, el momento exterior valdrá $\mathbf{Z}\cdot u$, y la respuesta interna de la estructura, $\mathbf{K}_{Mu}\cdot u$. Sólo habrá equilibrio si ambos momentos son iguales, *indiferente* al valor de u. Si $\mathbf{Z}\cdot u > \mathbf{K}_{Mu}\cdot u$, la deformación aumenta hasta la rotura: *la perturbación es catastrófica*. Si $\mathbf{Z}\cdot u < \mathbf{K}_{Mu}\cdot u$, la estructura vuelve a su posición 'perfecta' inicial. La rigidez $\mathbf{K}_{Mu}$ es *numéricamente* igual al valor de la carga $\mathbf{Z}$ que *diferencia* la *recuperación* de la *catástrofe*; por ello recibió en el pasado la denominación de *carga crítica*, aunque **no es una carga**. De hecho, el requisito de estabilidad exige en este caso $\mathbf{Z} < \mathbf{K}_{Mu}$, pues $\mathbf{Z} = \mathbf{K}_{Mu}$ sería una carga *inestable* en el mundo real.



Mundo real. *La perfección no existe.* Incluso antes de cargar el mástil, su geometría será distinta a la proyectada, presentando una *imperfección inicial*, medida ya sea por un ángulo ϕ_0, ya por una longitud $\mathbf{e}_0$. Debido a las tolerancias de fabricación, tal imperfección será comparable a un desplazamiento pequeño. En tal caso, desde el inicio del proceso de carga y deformación, *hay momento exterior*, $\mathbf{Z}\mathbf{e}_0$, y la estructura reaccionará deformándose. Si se alcanza el equilibrio tras un pequeño giro *adicional* θ, entonces $u \approx \mathbf{L}\theta$ y $\mathbf{Z} < \mathbf{K}_{Mu}$, y:

$$\boxed{M_y(u) = \mathbf{Z}(\mathbf{e}_0 + u) \approx \mathbf{K}_{Mu}\cdot u} \Rightarrow \boxed{u \approx \mathbf{e}_0 \frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{K}_{Mu} - \mathbf{Z}}}$$

De la primera expresión surge todo lo que sigue. Para "verla", lo mejor es considerar dos funciones: el momento *desestabilizante* $M_y(u) = \mathbf{Z}u + M_0$, y el par flector *estabilizante*, proporcional a la deformación del arriostramiento: $P(u) = \mathbf{K}u$. Si ambas rectas se cortan con $u_{\mathrm{eq}} > 0$ *existe una posición de equilibrio*; en otro caso, la riostra se deforma hasta romperse sin conseguir equilibrar el momento externo. Y todo depende de la proporción entre $\mathbf{K}$ y $\mathbf{Z}$.



Resistencia del arriostramiento. Para una seguridad $\boldsymbol{\gamma}$, el equilibrio debe ser todavía posible bajo $\gamma\mathbf{Z}$, aunque al borde de iniciar el proceso de plastificación y posterior rotura:

$$\boldsymbol{\gamma}\mathbf{Z}(\mathbf{e}_0 + u_e) \le \mathbf{K}_{Mu} u_e \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_e \approx \mathbf{e}_0 \frac{\boldsymbol{\gamma}\mathbf{Z}}{\mathbf{K}_{Mu} - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{Z}}}$$

lo que requiere que $\mathbf{K}_{Mu} > \boldsymbol{\gamma}\mathbf{Z}$. Además, ningún cable debe haber sobrepasado su límite elástico:

$$\varepsilon_i = \frac{\delta_i}{d_i} \le \varepsilon_{ei} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{u_e = \mathbf{L}\cdot \min_i \frac{\varepsilon_{ei}\cdot d_i}{z_i \cos\alpha_i \cos\beta_i}}$$

siendo d_i la longitud del cable. Para dimensionar, determinado u_e, se obtiene el mínimo valor para $\mathbf{K}_{Mu}$.[1]

Rigidez del arriostramiento. Para la carga $\mathbf{Z}$, la deformación de la estructura arriostrada no debe ser excesiva. En general basta con comprobar que el giro θ no supera el valor de la distorsión tolerable, ϕ_{tol}; puesto que la excentricidad inicial está también limitada por las tolerancias de fabricación, tiene que cumplirse también que $\phi_0 + \theta \le \phi_{\mathrm{fab}} + \phi_{\mathrm{tol}}$. En ocasiones, el requisito de rigidez se expresa como un límite a la excentricidad total, entonces hay que comprobar que $\mathbf{e}_0 + u$ no lo supera.

Composición de riostras. Para arriostrar un punto son necesarios al menos dos cables "tensables" en planos ortogonales; para un plano horizontal, tres, cuyos planos no se corten en la misma vertical. Como la imperfección inicial puede producirse en cualquier dirección, hay que comprobar el plano en el que la rigidez sea mínima. Por ello lo aconsejable es usar disposiciones simétricas, al menos mecánicamente.

Para asegurar que todos los cables puedan tensarse cualquiera que sea la dirección de la imperfección inicial, pueden pre-esforzarse: el cable que de otro modo "pandearía", ahora se destensa, pero aporta la misma rigidez que si se tensara. La comprobación de resistencia debe ser ahora $\varepsilon(u) + \varepsilon^0 \le \varepsilon_e$, en donde ε^0 es la deformación del pretensado. ¡Ojo! El preesfuerzo de los cables se hará contra el mástil (o los soportes en un edificio), que resulta así precomprimido, lo que hay que contabilizar al analizar su resistencia.

[1] La consideración del periodo plástico es sencilla pero, en general, no predice mayor capacidad de carga.