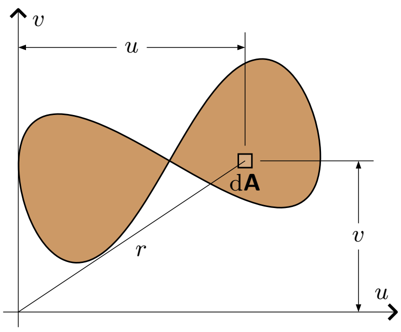
Inercia

inercia. (Del lat. *inertĭa.*) f. Flojedad, desidia, inacción. ‖ **2.** *Mec.* Incapacidad de los cuerpos para salir del estado de reposo, para cambiar las condiciones de su movimiento o para cesar en él, sin la aplicación o intervención de alguna fuerza. ‖ **3.** *Mec.* V. **fuerza**, **momento de inercia**.

momento. (Del lat. *momentum.*) [...] ‖ **de inercia.** *Mec.* Suma de los productos que resultan de multiplicar la masa de cada elemento de un cuerpo por el cuadrado de su distancia a una línea fija.

Momentos de inercia

En un universo 2D, el *volumen* es una superficie, y la *superficie*, una longitud. Los 'momentos' de inercia constituyen una medida del grado en que un volumen se 'aleja' de un eje, lo que depende de la forma de la superficie que encierra el volumen. En lo que sigue, los volúmenes están definidos por una o varias superficies, es decir, no son necesariamente continuos; la generalización a un universo de cualquier dimensión a partir de las definiciones en 2D es relativamente trivial.



El momento de inercia respecto de un eje cualquiera es $\int d^2\,\mathrm{d}\mathbf{A}$ siendo d la distancia al eje. Respecto a dos ejes ortogonales, se tienen dos momentos de inercia:

$$\mathbf{I}_u = \int v^2\,\mathrm{d}\mathbf{A} \qquad \mathbf{I}_v = \int u^2\,\mathrm{d}\mathbf{A}$$

El *producto de inercia* respecto a dos ejes ortogonales se define como:

$$\mathbf{I}_{uv} = \int uv\,\mathrm{d}\mathbf{A}$$

Todavía, respecto a un punto (o a un eje perpendicular al plano xy que pase por él), en este caso el origen de coordenadas, puede definirse el *momento de inercia polar* como:

$$\mathbf{I}_0 = \int r^2\,\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathbf{I}_u + \mathbf{I}_v$$

La última conclusión se obtiene de $r^2 = u^2 + v^2$ y las propiedades del operador $\int(\cdot)$.

En las definiciones anteriores, la integral debe entenderse extendida a todo el volumen, con independencia de que esté limitado por una o varias superficies.

Momentos 'estáticos'

Por "volumen" puede entenderse *el de* cualquier función escalar con valores bien definidos en la región definida por la superficie. Si la función es, por ejemplo, $f = u^2$, la inercia $\mathbf{I}_v$ no es otra cosa que el "volumen" de f en $\mathbf{A}$. Pero, si por el contrario, la función es $f = 1$, el "volumen" de f en $\mathbf{A}$ es simplemente $\int \mathrm{d}\mathbf{A}$, es decir, el propio área de la figura, es decir, lo que hemos denominado "volumen 2D"; en este caso, la inercia $\mathbf{I}_v$ es el momento de segundo orden de $f = 1$, en donde 'segundo' se refiere al exponente de u en $\int u^2\,\mathrm{d}\mathbf{A}$.

Los momentos de *primer orden*, denominados momentos 'estáticos', tienen una definición análoga a los de inercia: basta con cambiar el exponente de la distancia al eje:

$$\mathbf{P}_u = \int v\,\mathrm{d}\mathbf{A} \qquad \mathbf{P}_v = \int u\,\mathrm{d}\mathbf{A}$$

Si se insiste en generalizar esta nomeclatura, el área *es* el momento de orden cero: $\mathbf{A} = \int \mathrm{d}\mathbf{A}$. (Todas estas definiciones tienen una conexión bastante clara con la estadística basada en distribuciones de probabilidad.)

La definición de centro geométrico $\mathbf{G}$ del área es la de aquel punto para el que los momentos de primer orden del volumen respecto a ejes x, y que pasen por él son nulos:

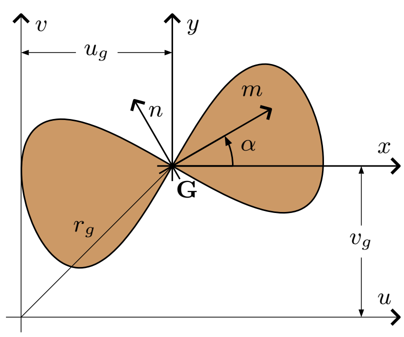
$$\mathbf{P}_x = \int x\,\mathrm{d}\mathbf{A} = 0; \qquad \mathbf{P}_y = \int y\,\mathrm{d}\mathbf{A} = 0$$

es decir, aquel eje respecto al cual el volumen de la función a un lado equidista de aquel al otro lado.

El momento estático respecto a un eje que forme un ángulo α con el eje x y que pasa por $\mathbf{G}$ es igualmente nulo:

$$\mathbf{P}_m = \int n\,\mathrm{d}\mathbf{A} = -\sin\alpha \int x\,\mathrm{d}\mathbf{A} + \cos\alpha \int y\,\mathrm{d}\mathbf{A} = 0$$

puesto que $n = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$.



Teorema de *Steiner*

Si consideramos unos ejes paralelos a los originales u, v pero con el origen en el centro geométrico $\mathbf{G}$ del volumen, x, y, las relaciones entre los momentos respecto a unos y otros ejes son:

$$\mathbf{I}_u = \mathbf{I}_x + \mathbf{A}\cdot v_g^2 \qquad \mathbf{I}_v = \mathbf{I}_y + \mathbf{A}\cdot u_g^2$$
$$\mathbf{I}_{uv} = \mathbf{I}_{xy} + \mathbf{A}\cdot u_g v_g \qquad \mathbf{I}_0 = \mathbf{I}_\mathrm{G} + \mathbf{A}\cdot r_g^2$$
$$\mathbf{P}_u = \mathbf{A}\cdot v_g \qquad \mathbf{P}_v = \mathbf{A}\cdot u_g$$

En definitiva los momentos respecto a **G** son mínimos. El último sumando de cada expresión suele denominarse 'término de *Steiner*'. (Las dos últimas expresiones muestran como calcular la posición de **G** respecto a los ejes uv.)

Cálculo práctico

Nótese que si $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$, entonces cualquier integral extendida a $\mathbf{A}$, puede calcularse como:

$$\int_\mathbf{A} (\cdot) = \int_{\mathbf{A}_1} (\cdot) \; + \; \int_{\mathbf{A}_2} (\cdot)$$

En la práctica podemos calcular la integral de volúmenes complicados mediante la descomposición en figuras simples, aquellas de las que podamos saber su inercia mediante fórmulas canónicas. La descomposición puede ser también substractiva: $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2$. Si de las figuras simples se conoce la inercia respecto a su centro de gravedad resultará necesario, además, aplicar '*Steiner*'.

Radio de giro

Si consideramos el valor medio de la función $f = u^2$ en el volumen $\mathbf{A}$, tenemos:

$$\bar{f} = \overline{u^2} = \frac{\int f \, \mathrm{d}\mathbf{A}}{\int \mathrm{d}\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{I}_v}{\mathbf{A}}$$

es decir, $\bar{f}$ es el cuadrado de la distancia por la que habría que multiplicar $\mathbf{A}$, para obtener $\mathbf{I}_v$; su raíz cuadrada es una distancia que podemos interpretar como aquella distancia constante a la que tendríamos que separar $\mathbf{A}$ para obtener la misma inercia. Esta constante de la figura aparece en todos aquellos fenómenos en que su forma (y no sólo la magnitud de su volumen) es significativa; recibe el nombre de *radio de giro* y hay uno respecto a cada eje:

$$\mathbf{i}_u = \sqrt{\frac{\mathbf{I}_u}{\mathbf{A}}} \qquad \mathbf{i}_v = \sqrt{\frac{\mathbf{I}_v}{\mathbf{A}}}$$

Nótese que $\mathbf{i}_u$ es una ordenada mientras que $\mathbf{i}_v$ es una abscisa: si pudieramos concentrar todo el área en un punto de coordenadas $(\mathbf{i}_v, \mathbf{i}_u)$ obtendríamos igual inercia respecto de ambos ejes (pero no el mismo producto de inercia).

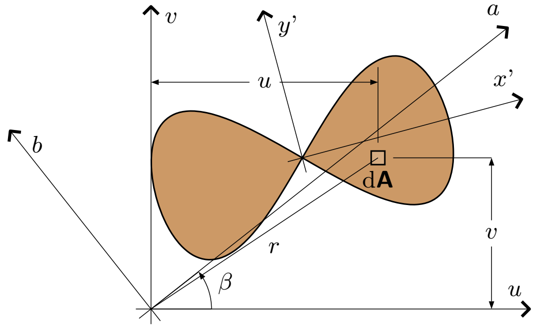
Tensor de inercia

Los momentos y el producto de inercia respecto a unos ejes uv definen el tensor de inercia en esos ejes:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_u & \mathbf{I}_{uv} \\ \mathbf{I}_{uv} & \mathbf{I}_v \end{bmatrix}$$

en todo similar al tensor de tensiones. El tensor puede diagonalizarse eligiendo unos ejes ab con una orientación β respecto a los originales, con la condición simple de que $\mathbf{I}_{ab} = 0$. El formulismo algebraico es idéntico a muchos otros tensores. En particular, basta con considerar las analogías $\sigma_x \equiv \mathbf{I}_u$, $\sigma_y \equiv \mathbf{I}_v$ y $\tau_{xy} \equiv \mathbf{I}_{uv}$, para aplicar la construcción de la circunferencia de Mohr, y sus fórmulas asociadas, en el cálculo de inercias en ejes rotados respecto a los originales.

$$\tan(2\beta) = -\frac{\mathbf{I}_{uv}}{\mathbf{I}_u - \mathbf{I}_v}$$
$$\mathbf{I}_{u'} = \frac{\mathbf{I}_u + \mathbf{I}_v}{2} + \frac{\mathbf{I}_u - \mathbf{I}_v}{2}\cos(2\alpha) - \mathbf{I}_{uv}\sin(2\alpha)$$
$$\mathbf{I}_{u'v'} = \frac{\mathbf{I}_u - \mathbf{I}_v}{2}\sin(2\alpha) + \mathbf{I}_{uv}\cos(2\alpha)$$



Aparte de en direcciones principales, $\mathbf{I}_{uv}$ es nulo si u o v es un eje de simetría del volumen: la integral la podemos dividir en las dos de los volumenes simétricos y, por la simetría y la definición de $\mathbf{I}_{uv}$, ambas integrales son de igual valor pero de distinto signo. Por tanto, los ejes de simetría son siempre direcciones principales del tensor de inercia. Tal es el caso de los ejes x'y'.

Si respecto de un punto cualquiera, el volumen tiene dos ejes de simetría *no ortogonales*, entonces cualquier par de ejes ortogonales con origen en ese punto son direcciones principales, $\mathbf{I}_{uv}$ es nulo en cualquier orientación y $\mathbf{I}_u = \mathbf{I}_v$ para cualquier par de ejes u y v: la figura resulta isótropa respecto a la inercia. Tal es el caso de polígonos y poliedros regulares.

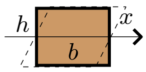
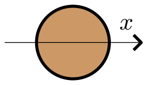
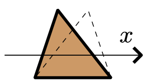
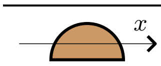
Volúmenes no geométricos

Estas ideas pueden generalizarse a cualquier volumen matemático distinto al volumen del espacio métrico. La idea es que si el volumen métrico es $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$, el 'volumen' de la función no es sino $f(u,v)\,\mathrm{d}\mathbf{A}$. Por esta razón en la jerga hay expresiones como "volumen de tensiones". f puede interpretarse como una densidad (de tensión, de energía, etc).

$$\bar{f} = \frac{\int f(u,v)\,\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathbf{A}} \qquad u_f = \frac{\int f(u,v)\cdot u\,\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathbf{A}} \qquad \text{etc}$$

Fórmulas canónicas

Referidas a un eje que pase por el centro geométrico, para figuras de altura h y base b paralela a x.

Figura	G	A	$\mathbf{I}_x$	$\mathbf{i}_x$	
	$\frac{h}{2}$	bh	$\frac{1}{12}bh^3 = \frac{\mathbf{A}h^2}{12}$	$\frac{h}{\sqrt{12}}$	
	$\frac{b}{2}$	$\frac{\pi}{4}b^2$	$\frac{\pi}{64}b^4 = \frac{\mathbf{A}b^2}{16}$	$\frac{b}{4}$	$[h = b]$
	$\frac{h}{3}$	$\frac{1}{2}bh$	$\frac{1}{36}bh^3 = \frac{\mathbf{A}h^2}{18}$	$\frac{h}{3\sqrt{2}}$	
	$\frac{2b}{3\pi}$	$\frac{\pi}{8}b^2$	$0{,}11r^4$	$0{,}264r$	$[h = r]$