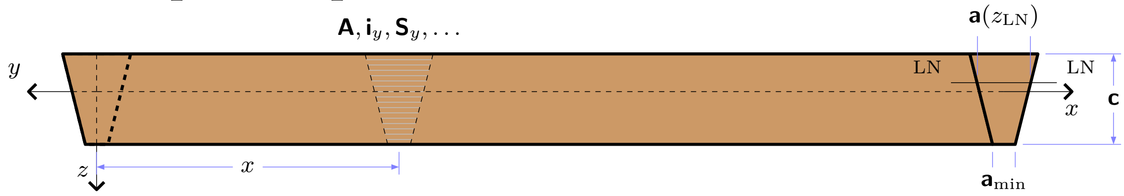
Flexión simple. Capacidad resistente.



Navier formuló en el XIX un modelo, falso pero muy útil, de la deformación de vigas sometidas a flexión. La *key stone* es la suposición de que, tras la deformación, existe una superficie "neutra", o de deformación ε_x nula, y de que los planos perpendiculares a esa superficie neutra *antes* de la deformación seguirían siendo planos *después* de la misma. La intersección de esa superficie con cada plano paralelo al yz, se denomina *línea neutra* (LN).

El modelo puede emplearse con confianza para vigas de esbeltez geométrica mayor que 10 en el plano de flexión, que sufran pequeñas deformaciones, y si se excluyen las zonas denominadas de *Saint Venant*, de longitud aproximadamente igual a dos veces el canto centrada en el punto de aplicación de cargas concentradas (las que habitualmente se representan como vectores aplicados en un punto de la directriz). Para comprobaciones y/o diseños preliminares también puede emplearse en esas zonas, aunque los errores del modelo son mayores e inciertos: puede sub-estimar o sobre-estimar la resistencia de la viga. El siguiente modelo, cuando el de Navier resulta demasiado impreciso, es el de la viga de Timoshenko. ¡Hay más!

Aquí, nos limitaremos a formular el modelo de Navier para vigas rectas, de sección constante y simétrica respecto al eje z, aunque puede utilizarse con provecho para casos sin esas restricciones pero *con formulaciones más generales*.

Basics. Los ejes xyz se eligen de manera que el eje x, paralelo a la directriz de la viga, pase por el centro de gravedad de las secciones; los ejes yz son los de la sección, "horizontal" y "vertical" respectivamente.

La viga está sometida a fuerzas exteriores en equilibrio, contenidas en el plano xz, y debido a la simetría la deformación es plana, manteniéndose la directriz, deformada, en ese plano. Considerando las fuerzas exteriores actuando en la porción de viga a la izquierda de una sección transversal en la abscisa x, las resultantes parciales de momento en la dirección y y fuerza en la dirección z, están dadas por $M_y(x)$ y $V_z(x)$. El equilibrio local en cualquier sección exige que los esfuerzos flector y cortante (resultantes de las tensiones en la viga) equilibren esas resultantes. Se usarán las siguientes abreviaturas: $\mathbf{M}_{\max} = \max_x \operatorname{abs}(M_y(x))$ y $\mathbf{V}_{\max} = \max_x \operatorname{abs}(V_z(x))$.

De la sección de la viga, de altura o canto $\mathbf{c}$, y ancho variable $\mathbf{a}(z)$, normalmente se necesitan su área $\mathbf{A}$, su radio de giro $\mathbf{i}_y (< \frac{1}{2}\mathbf{c})$, y el valor absoluto del momento estático de la porción de la sección por encima o por debajo del eje y, $\mathbf{S}_y$. Otras propiedades se calculan con ellas, por ejemplo la inercia, $\mathbf{I} = \mathbf{i}_y{}^2\mathbf{A}$. Y para algunos detalles pueden necesitarse otras propiedades, v. la apostilla sobre la "Inercia".

Del material estructural, se necesitan su módulo de Young, $\mathbf{E}$, su límite elástico $(\mathbf{f}_e, \varepsilon_e)$ y su deformación de rotura ε_{u}, si se emplea un modelo elasto-plástico perfecto ($\mathbf{f}_{\mathrm{u}} = \mathbf{f}_e$). La tensión normal que con seguridad puede resistir el material, $\mathbf{f}$, define implícitamente el coeficiente de seguridad, $\boldsymbol{\gamma}$, entre las cargas de servicio y las de rotura. También se requiere su tensión tangencial "última" o de rotura, $\mathbf{f}_{\mathrm{u}\tau}$; o alternativamente su tensión tangencial segura $\mathbf{f}_\tau$.

El modelo se generaliza sin dificultad para materiales con resistencia y/o rigidez asimétrica respecto al signo de la tensión normal.

La deformación longitudinal en la dirección de la directriz está dada por el producto de la curvatura $\boldsymbol{\kappa}$ de la sección y la distancia vertical a la línea neutra. Si la línea neutra está en la ordenada z_{LN}:

$$\varepsilon_x(x, y, z) \approx \boldsymbol{\kappa}(x) \cdot (z - z_{\mathrm{LN}}) \qquad \text{(Navier)}$$

Las deformaciones varían linealmente con z y $\boldsymbol{\kappa}$, y son nulas en la línea neutra ($z = z_{\mathrm{LN}}$).

Periodo proporcional. Hooke: $\sigma = \mathbf{E}\varepsilon$. La superficie neutra se sitúa a la altura del centro de gravedad de la sección ($z_{\mathrm{LN}} = 0$), y $\varepsilon_x(x, z) \approx \boldsymbol{\kappa}(x) \cdot z$. Curvatura y tensión varían según:

$$\boldsymbol{\kappa}(x) = \frac{M_y(x)}{\mathbf{EI}} \qquad \sigma_x(x, z) = \frac{M_y(x)}{\mathbf{I}} \cdot z$$

La tensión sólo pueden ser máxima (en valor absoluto) en los puntos más alejados: la mayor parte de la viga está con poca tensión resultando una estructura ineficiente; para evitarlo, la forma de la sección *debe* ser "y-simétrica" y agolpar material lejos del CDG por arriba y por abajo. La propiedad geométrica que permite calcular la tensión a partir del esfuerzo es $\mathbf{I}/z$ y recibe el nombre de *módulo resistente a esfuerzo flector* $\mathbf{W}_y(z)$. Juega el mismo papel que el área en el caso de la tracción, pero como en la flexión la tensión es variable (y no uniforme) se necesita un valor para cada cota z. El valor absoluto máximo de la tensión o *tensión de comparación*, $\sigma_{\mathrm{cmp}} = \max_{x,z} \operatorname{abs}(\sigma_x(x, z))$, se obtiene con:

$$\sigma_{\mathrm{cmp}} = \frac{\mathbf{M}_{\max}}{\mathbf{I}} \cdot \max \operatorname{abs}(z) = \frac{\mathbf{M}_{\max}}{\min_z \operatorname{abs}(\mathbf{W}_y(z))}$$

Al valor $\min_z \operatorname{abs}(\mathbf{W}_y(z))$ se le denomina *módulo resistente proporcional de la sección*, $\mathbf{W}_{y_{\mathrm{prop}}}$ (muy mal llamado "módulo resistente <u>elástico</u>" por la normativa vigente), denotado simplemente $\mathbf{W}$ si no hay ambigüedad. Denominando $\mathbf{w}$ a la distancia en la dirección z a la línea neutra del punto de la sección que esté más lejos de ella, $\mathbf{W} = \mathbf{I} \div \mathbf{w}$.

La eficiencia de la sección puede indicarse con la razón $\mathbf{W} \div \mathbf{A} = \mathbf{i}_y{}^2 \div \mathbf{w}$: cuanto más radio de giro, tanto mejor. Como $\mathbf{i}_y < 0{,}5\mathbf{c}$ y $\mathbf{w} < 0{,}5\mathbf{c}$, puede especularse con que $\mathbf{W} \div \mathbf{A} \propto \mathbf{c}$, cuanto más canto mejor; ¡siempre que la viga no pandee lateralmente por la compresión de una de sus caras xy!

El límite elástico se alcanza para una curvatura $\boldsymbol{\kappa}_e = \varepsilon_e \div \mathbf{w}$, cuando se aplica un momento de valor absoluto $\mathbf{W}\mathbf{f}_e$. El límite elástico puede alcanzarse en tracción o en compresión, o en ambos si la sección es simétrica respecto al eje y: todo depende del signo de M_y en la sección considerada.

Periodo plástico. Si $\varepsilon_\mathrm{u} > \varepsilon_e$, cuando la resultante de momento de las fuerzas exteriores supera $\mathbf{W}\mathbf{f}_e$ parte de la sección está plastificada y determinar la posición de la línea neutra (y por tanto z_LN) es sencillo pero engorroso. La rotura convencional se producirá cuando se alcance la deformación de rotura en el punto más alejado, para una curvatura de valor absoluto $\boldsymbol{\kappa}_\mathrm{u} = \varepsilon_\mathrm{u} \div \mathbf{w}$. Para $\varepsilon_\mathrm{u} \gg \varepsilon_e$, el cálculo "asintótico" que resulta de suponer que $\boldsymbol{\kappa}_\mathrm{u} \to \infty$ es mucho más simple (aunque ligerísimamente inseguro).

Si $\boldsymbol{\kappa}_\mathrm{u} \to \infty$, la línea neutra divide a la sección en dos porciones de *igual área*, $\frac{1}{2}\mathbf{A}$, y eso determina tanto z_LN como $\mathbf{w}$. Cada una de las porciones está o comprimida o traccionada, con tensión constante de valor absoluto $\mathbf{f}_\mathrm{u}$. Denominando $\mathbf{P}_\mathrm{LN}$ al momento estático de la parte de la sección por encima (o por debajo) de la línea neutra respecto al plano $z = z_\mathrm{LN}$, el esfuerzo flector que aporta la sección en la rotura tiene un valor absoluto igual a $(\mathbf{P}_{\mathrm{LN\,inf}} - \mathbf{P}_{\mathrm{LN\,sup}}) \cdot \mathbf{f}_\mathrm{u}$, y por analogía con la formulación proporcional, a la suma de los valores absolutos de ambos momentos estáticos se le denomina *módulo resistente plástico de la sección*, $\mathbf{W}_\mathrm{plas}$. La sección de la viga simplemente no puede equilibrar resultantes de momento de las fuerzas exteriores superiores en valor absoluto a $\mathbf{W}_\mathrm{plas}\mathbf{f}_\mathrm{u}$.

El requisito de rigidez en edificios exige implícitamente que durante su uso no se supere el límite elástico. Esta exigencia puede reformularse como un requisito de resistencia adicional cuando se evalúa la resistencia en periodo plástico, a saber, $\mathbf{M}_\mathrm{max} \leq \mathbf{W}\mathbf{f}_e$.

La razón $\mathbf{W}_\mathrm{plas} \div \mathbf{W}_\mathrm{prop} > 1$ cuantifica la *ganancia plástica*, $\mathcal{G}_\mathrm{plas}$, es decir, cuánta más resistencia puede obtenerse considerando el comportamiento plástico de la viga. Cuando la forma de la sección es eficiente (por ejemplo doble "T"), la ganancia es escasa; cuando la sección es muy ineficiente la ganancia puede ser mucha, y si es mayor que el coeficiente de seguridad requerido *no puede* emplearse toda, debido al requisito de rigidez.

Cuando no ocurre $\varepsilon_\mathrm{u} \gg \varepsilon_e$, la ganancia de usar la formulación plástica es insignificante y basta con la formulación proporcional.

Tensiones tangenciales. Como $\partial M_y(x)/\partial x = V_z(x)$, también es necesario examinar la resistencia a la resultante de fuerza transversal (excepto en flexión pura). El examen del equilibrio local de un volumen infinitesimal de ancho $\mathbf{a}(z)$, altura $\mathrm{d}z$ y longitud $\mathrm{d}x$, conduce a dos conclusiones que resuelven completamente el problema. Denominando τ_{ab} a la tensión tangencial paralela al eje b y aplicada en una cara perpendicular al eje a, y considerando que el elemento está en periodo proporcional:

$$\boxed{\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \forall(x, y, z)} \qquad \tau_{zx}(x, z) = \frac{V_z(x)}{\mathbf{I}} \frac{\mathbf{S}_y(z)}{\mathbf{a}(z)}$$

en donde $\mathbf{S}_y(z) = \int_\mathrm{inf}^z z\mathbf{a}(z)\,\mathrm{d}z$. Como antes, el máximo valor absoluto de la tensión tangencial, o de comparación, puede calcularse con:

$$\tau_\mathrm{cmp} = \frac{\mathbf{V}_\mathrm{max}}{\mathbf{I}} \max_z \operatorname{abs}\left(\frac{\mathbf{S}_y(z)}{\mathbf{a}(z)}\right)$$

El último factor *depende* de la forma concreta de la sección. Sin embargo puede obtenerse una *acotación significativa* de τ_cmp con:

$$\tau_\mathrm{cmp} \leq \frac{\mathbf{V}_\mathrm{max}}{\mathbf{I}} \frac{\max_z \operatorname{abs}(\mathbf{S}_y(z))}{\min_z \mathbf{a}(z)} = \frac{\mathbf{V}_\mathrm{max}}{\mathbf{I}} \frac{\mathbf{S}_y}{\mathbf{a}_\mathrm{min}}$$

De hecho, esta cota es *exacta* en el 99 % de los casos frecuentes (las excepciones son secciones, como la de la figura, para las que la cota del ancho mínimo no coincide con la cota de mayor momento estático). El cociente $\mathbf{I} \div \mathbf{S}_y$ es simplemente la distancia entre el centro geométrico de las tensiones de tracción y aquel otro de las de compresión, $\mathbf{b}$, "brazo de palanca" de la sección:

$$\tau_\mathrm{cmp} \leq \frac{\mathbf{V}_\mathrm{max}}{\mathbf{a}_\mathrm{min}\mathbf{b}} \qquad \mathcal{R}^{V_z}_\mathrm{prop} \geq \mathbf{a}_\mathrm{min}\mathbf{b} \cdot \mathbf{f}_\tau$$

en donde $\mathcal{R}^{V_z}_\mathrm{prop}$ simboliza *el esfuerzo cortante que la sección puede resistir con seguridad.*

Como $\mathbf{a}_\mathrm{min}\mathbf{b}$ es un área que podemos visualizar en la sección de la viga, recibe por ello el nombre de *área eficaz a esfuerzo cortante*, $\mathbf{A}^{V_z}_\mathrm{ef} < \mathbf{A}$, y todo es *como sí* para resistir las resultantes $V_z(x)$ la viga distribuyera uniformemente tensiones tangenciales en una pequeña o gran fracción de todo el área disponible. Ese área también puede visualizarse en una rebanada obtenida mediante cortes verticales a una distancia $\mathbf{b}$, cortada a su vez por un plano horizontal allí donde el ancho sea mínimo, su valor es el mismo, pero no su posición (horizontal ahora). $\mathbf{a}_\mathrm{min}$ puede considerarse como el *espesor eficaz a esfuerzo rasante*, es decir, lo que como poco hay que rasgar para romper la viga en dos mitades mediante un corte horizontal. En materiales como la madera, nada isótropos, la rotura por tensión tangencial excesiva, ocurre ya por rasante ya por cortante, raramente por ambas: depende de la orientación de las vetas respecto a la directriz.

Aunque similar planteo puede hacer para secciones plastificadas, no se gana mucho. O bien la sección de $\mathbf{M}_\mathrm{max}$ corresponde a una sección en la que $V_z(x) \approx 0$; o bien, se trata de zonas de Saint Venant, donde un planteo realista toma otro camino. De momento, la formulación proporcional basta y sobra para diseños y comprobaciones *preliminares*.

CAPACIDAD RESISTENTE SEGURA

$\mathcal{R}^a_b$: esfuerzo a que la sección resiste con seguridad [según el modelo b, si es que resulta aplicable].

esfuerzo	material: frágil	material: plástico	criterio de rotura
$M_y(x)$	$\mathcal{R}^{M_y}_\mathrm{prop} = \mathbf{W}\mathbf{f}$	$\mathcal{R}^{M_y}_\mathrm{plas} = \mathbf{W}_\mathrm{plas}\mathbf{f}$	$\mathcal{R}^{M_y} < \mathbf{M}_\mathrm{max}$
$V_z(x)$	$\mathcal{R}^{V_z}_\mathrm{prop} = \mathbf{a}_\mathrm{min}\mathbf{b}\mathbf{f}_\tau$		$\mathcal{R}^{V_z}_\mathrm{prop} < \mathbf{V}_\mathrm{max}$

Si se cumple el criterio de rotura, la viga debe reputarse como insegura, salvo que un análisis más preciso demuestre lo contrario.

SECCIONES "z-e-y"-SIMÉTRICAS

propiedad	tipo de sección: cualquiera	rectangular	perfil
$\mathbf{w}$	$0{,}5\mathbf{c}$	$0{,}5\mathbf{c}$	$0{,}5\mathbf{c}$
$\mathbf{W}$	$2\mathbf{I}/\mathbf{c}$	$\mathbf{a}\mathbf{c}^2 \div 6$	(catálogo)
$\mathbf{W}_\mathrm{plas}$	$2\mathbf{S}_y$	$\mathbf{a}\mathbf{c}^2 \div 4$	(catálogo)
$\mathbf{W}_\mathrm{plas} \div \mathbf{W}$	$\mathbf{c} \div \mathbf{b}$	1,5	
$\mathbf{S}_y$	$< \frac{1}{4}\mathbf{c}\mathbf{A}$	$\mathbf{a}\mathbf{c}^2 \div 8$	(catálogo)
$\mathbf{b}$	$\mathbf{I} \div \mathbf{S}_y < \mathbf{c}$	$2\mathbf{c} \div 3$	
$\mathbf{A}^{V_z}_\mathrm{ef}$	$\mathbf{a}_\mathrm{min}\mathbf{b} < \mathbf{A}$	$2\mathbf{A} \div 3$	(catálogo)

Para secciones sensatas, $0{,}67 < \mathbf{b}/\mathbf{c} < 1$ y para cálculos preliminares (o comprobaciones) puede situarse a *ojo de buen cubero*. Lo mismo ocurre con la posición del CDG en secciones no-simétricas. Si cálculos más precisos no dan el mismo orden de magnitud, ¡revíselos! (salvo que tenga que ir al oculista de *cuberos*: dibujar del natural ayuda mucho a curar la miopía).