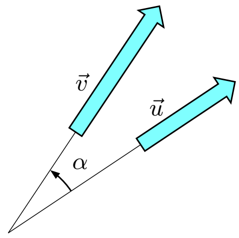
Trabajos virtuales en cerchas

Trabajo de una fuerza

El producto escalar de dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se define como el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forma, α:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$$



El ejemplo más apropiado es, quizás, el trabajo realizado por una fuerza, $\vec{F}$, al desplazarse una cierta distancia, $\vec{a}$:

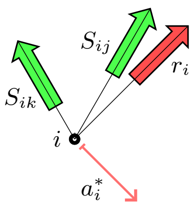
$$W = \vec{F}\cdot\vec{a} = Fa\cos\alpha = F(a\cos\alpha) = a(F\cos\alpha)$$

De acuerdo con las dos últimas expresiones, el trabajo puede interpretarse como el producto de la fuerza por la distancia recorrida en su propia dirección, $a\cos\alpha$, o bien como el producto de la distancia por la componente de la fuerza en la dirección de aquella, $F\cos\alpha$.

El producto escalar de vectores ortogonales es nulo. También es nulo cuando uno cualquiera de los dos vectores es nulo. Igual le pasa al trabajo.

Interpretación 'laboral' del equilibrio

En una cercha en equilibrio, la suma de fuerzas aplicadas en cualquiera de sus partes ha de ser nula. Si cortamos alrededor de un nudo, por ejemplo el i, tendremos la fuerza exterior, r_i, y una fuerza interna, S_{ij}, por cada barra que acabe en el nudo i.



El equilibrio de la cercha exige una suma nula:

$$\vec{r_i} + \sum_j \vec{S_{ij}} = \vec{0}$$

Es evidente que si multiplicamos escalarmente la expresión anterior por un escalar o un vector arbitrarios la expresión resultante será también nula:

$$(\vec{r_i} + \sum_j \vec{S_{ij}})\cdot\lambda = \vec{0} \qquad \text{ó} \qquad (\vec{r_i} + \sum_j \vec{S_{ij}})\cdot\vec{v} = 0$$

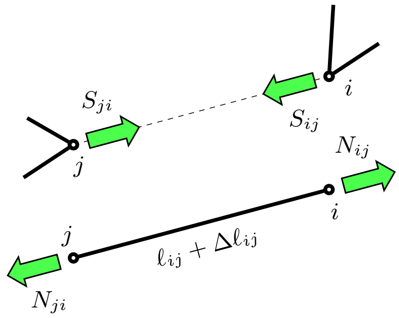
En particular, podemos **imaginar** que desplazamos el nudo i una cierta distancia, a_i^*, lo que involucra un trabajo nulo que, en todo caso, es tan **imaginario** o **virtual** como el propio desplazamiento a_i^*:

$$(\vec{r_i} + \sum_j \vec{S_{ij}})\cdot\vec{a_i^*} = 0$$

Podemos desplazar, siempre imaginariamente, cada uno de los nudos distancias a_i^*, a_j^*,... La suma de los trabajos virtuales de todos los nudos seguirá siendo nula:

$$\sum_i(\vec{r_i} + \sum_j \vec{S_{ij}})\cdot\vec{a_i^*} = 0 \qquad (1)$$

(Debe quedar claro que, antes de moverlos imaginariamente, los nudos ya se habían desplazado a la posición de equilibrio **real**, —y las barras, alargado o acortado.)



Al considerar cada barra ij aisladamente también debe tratarse de un cuerpo en equilibrio. Debido a ello y al principio de acción y reacción se cumplirá en cada barra:

$$\vec{S_{ij}} = -\vec{N_{ij}} \qquad \vec{S_{ij}} = -\vec{S_{ji}} \qquad \vec{N_{ij}} = -\vec{N_{ji}}$$

Y la expresión (1) puede transformarse en:

$$\sum_i(\vec{r_i} - \sum_j \vec{N_{ij}})\cdot\vec{a_i^*} = 0$$

es decir:

$$\sum_i \vec{r_i}\cdot\vec{a_i^*} = \sum_i\sum_j \vec{N_{ij}}\cdot\vec{a_i^*}$$

En la última expresión, el primer término es el trabajo virtual de las fuerzas exteriores o, abreviadamente, trabajo virtual exterior, W^*_{ext}; el segundo término, análogamente, es el trabajo virtual interior, W^*_{int}. En consecuencia, la última expresión puede leerse así:

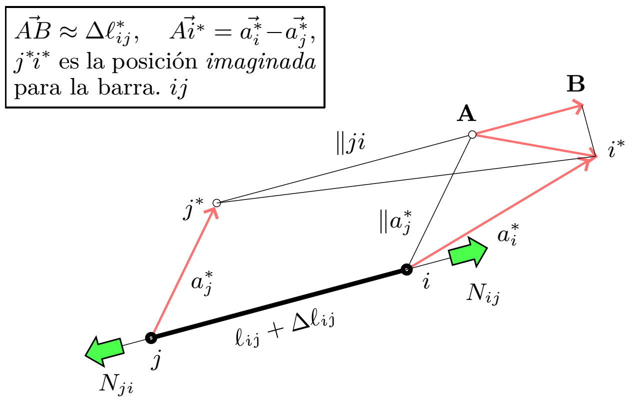
> *En una cercha en equilibrio, el trabajo virtual exterior debe ser igual al trabajo virtual interior, cualquiera que sean los desplazamientos virtuales empleados.*

Trabajo interior en una cercha

En la suma del trabajo virtual interior,

$$W^*_{\text{int}} = \sum_i\sum_j \vec{N_{ij}}\cdot\vec{a_i^*}$$

cada barra contribuirá con dos sumandos, uno por cada uno de sus extremos. Así, la contribución de la barra ij será: $\vec{N_{ij}}\cdot\vec{a_i^*} + \vec{N_{ji}}\cdot\vec{a_j^*}$. Ahora bien, como $\vec{N_{ij}} = -\vec{N_{ji}}$, podemos sacar factor común a N_{ij} y la contribución de ij será $\vec{N_{ij}}\cdot(\vec{a_i^*} - \vec{a_j^*})$.



Para desplazamientos virtuales o reales *suficientemente pequeños*, la proyección de la diferencia $\vec{a^*_i} - \vec{a^*_j}$ sobre la dirección del esfuerzo es, esencialmente, el alargamiento de la barra (*ecuación de compatibilidad*), véase la figura:

$$\vec{N_{ij}} \cdot (\vec{a^*_i} - \vec{a^*_j}) \approx \vec{N_{ij}} \cdot \vec{\Delta\ell^*_{ij}} = N_{ij}\Delta\ell^*_{ij}$$

Según esto podemos redefinir el trabajo virtual interior en una cercha como:

$$W^*_{\text{int}} \approx \sum_i \sum_{j>i} N_{ij}\Delta\ell^*_{ij} = \sum_k N_k \Delta\ell^*_k$$

En la última expresión, las barras se han numerado independientemente, sin depender de la numeración de los nudos. (La expresión $j > i$ en el segundo sumatorio evita contabilizar dos veces la misma barra.)

Trabajo virtual con desplazamientos pequeños

En conclusión, para cualquier conjunto de fuerzas exteriores e interiores en equilibrio, actuando sobre una cercha de n nudos y e barras suficientemente rígida, y para un conjunto arbitrario de desplazamientos que produzca pequeñas deformaciones, debe cumplirse que:

$$W^*_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \cdot \vec{a^*_i} = W^*_{\text{int}} \approx \sum_{k=1}^{e} N_k \Delta\ell^*_k$$

En la expresión del trabajo exterior r_i y a^*_i pueden interpretarse como componentes cartesianas de la fuerza y el desplazamiento. En tal caso:

$$W^*_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{2n} r_i a^*_i = W^*_{\text{int}} \approx \sum_{k=1}^{e} N_k \Delta\ell^*_k \qquad (2)$$

Nótese que las únicas condiciones son que las fuerzas r_i deben estar en equilibrio con los esfuerzos N_k, y que los alargamientos $\Delta\ell^*_k$ deben ser compatibles con los movimientos a^*_i. Por lo demás fuerzas y movimientos pueden no tener más relación que la de estar aplicados a la misma forma estructural.

¿Para qué todo este lío?

Para calcular desplazamientos en cerchas "isostáticas". La situación es como sigue. Si tenemos una cercha totalmente diseñada (incluyendo el grueso de sus barras) podemos calcular, para la carga de servicio, los esfuerzos y alargamientos de las barras. Si ahora deseamos saber, por ejemplo, el desplazamiento vertical del nudo j de esa cercha, podemos proceder imaginando una cercha gemela de la anterior, en adelante **cercha patrón**, que cargamos con una fuerza vertical unidad en el nudo j, ($V_j = \mathbf{1}$). Podemos aplicar la expresión (2) a esta cercha patrón. Como podemos elegir arbitrariamente desplazamientos y fuerzas, podemos elegir de hecho los desplazamientos de la cercha real bajo su carga de servicio, y el conjunto de fuerzas y esfuerzos de la cercha patrón. La ecuación (2) quedará entonces en la forma:

$$\sum_{i=1}^{2n} r_i a^*_i = \underline{\mathbf{1} \cdot v^*_j} \approx \sum_k N_k \Delta\ell^*_k$$

en la que $\mathbf{1}$ es V_j, la única fuerza exterior que figura en la suma del trabajo exterior (el resto son nulas, o corresponden a movimientos nulos, caso de las reacciones); N_k son los esfuerzos en la cercha patrón bajo la carga $V_j = \mathbf{1}$, fáciles de calcular puesto que la cercha patrón es tan "isostática" como la original; $\Delta\ell^*_k$ son los alargamientos reales de la cercha original, actuando como virtuales en la patrón. En consecuencia, de la expresión anterior puede despejarse v^*_j, el desplazamiento **real** que deseamos calcular. (Véase también mi anterior apostilla, *Deformación y movimiento*.)

En resumen, las reglas para calcular un desplazamiento son:

1. Analizar la cercha patrón para una carga unidad en el mismo punto, dirección y sentido del desplazamiento que se desea calcular, obteniéndose los esfuerzos bajo esa carga ($\mathbf{1}$ y N_k).

2. Aplicar la expresión (2) a la cercha patrón usando como desplazamientos y alargamientos virtuales los de la cercha original bajo la carga de servicio (a^*_i y $\Delta\ell^*_k$).

3. Despejar de la ecuación resultante el desplazamiento deseado.

Energía, equilibrio y compatibilidad

La expresion (1) es prácticamente obvia, *si hay equilibrio*, pues una fuerza nula no produce trabajo. A la formulación (2), puede llegarse por el análisis termodinámico de la posición de equilibrio, siempre que se convenga en que a éste le corresponde una posición del sistema con energía útil mínima: en tal caso, la variación de la energía respecto a la posición de equilibrio debe ser nula. Ambas formulaciones son expresión del *principio de los trabajos virtuales*, **PTV**.

La hipótesis de desplazamientos pequeños permite expresar en forma de relaciones lineales tanto el equilibrio como la compatibilidad. En el primer caso, nos aproximamos al equilibrio con la forma *original* de la estructura, *sin deformar*; en el segundo, dibujamos aproximadamente la posición *deformada* de la estructura sustituyendo las circunferencias por sus tangentes.

Partiendo del **PTV** y de ecuaciones lineales de compatibilidad se deducen las ecuaciones lineales de equilibrio. Partiendo del **PTV** y de ecuaciones lineales de equilibrio se deducen las ecuaciones lineales de compatibilidad. Finalmente, con ecuaciones lineales de compatibilidad y equilibrio se deduce el **PTV**, ecuación (2). **PTV**, equilibrio y compatibilidad, en las formas empleadas aquí, sólo dependen de la hipótesis de desplazamientos pequeños.