

Deformación y movimiento

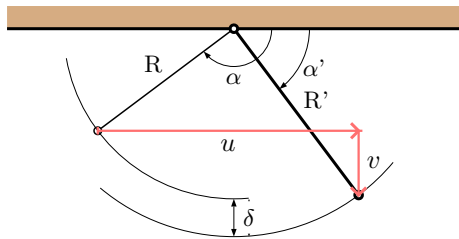
[...] cuando menor es la audiencia de un documento, más fiel puede ser a la realidad y a la verdad. Los informes destinados al gran público van llenos de retórica.

SUSAN GEORGE, *Informe Lugano*.

Un cable...

Para alargar un cable, lo más sencillo es tirar de un extremo. El cable se alinea con el tirón; y la longitud inicial, ℓ , se incrementa justamente en el *alargamiento*, δ , hasta $\ell + \delta$. El movimiento del extremo del cable *coincide* con el alargamiento.

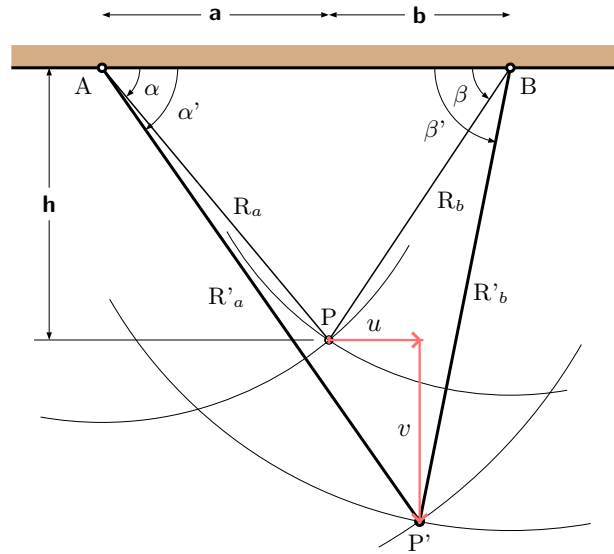
Hay muchas posibles formas de 'tirar': pero siempre movemos un extremo del cable desde un punto situado en una circunferencia de radio $R = \ell$, hasta otro punto en una circunferencia de radio $R' = \ell + \delta$ (el centro común de ambas es el otro extremo). Medido sobre ejes cartesianos, el movimiento del extremo puede describirse como dos desplazamiento simultáneos, (u, v) , uno horizontal, vertical el otro. En consecuencia, hay infinitos pares de valores (u, v) y, por tanto, infinitos movimientos que acaban con el cable alargado justamente δ . Podemos considerar a u y a v como las *variables independientes* en la descripción del movimiento, los *grados de libertad* del artefacto.



En general, el ángulo que forma el cable con la horizontal en su posición inicial, α , puede ser *muy distinto* al de la posición final, α' . Y ello, a pesar de que el alargamiento δ se mantenga muy pequeño ($\delta \ll \ell$). Igual ocurre con u y v : pueden ser *grandes* incluso con δ pequeño. Las estructuras en que cosas así *pueden* ocurrir se conocen como *funiculares*, y en general no son estructuras suficientemente rígidas como para usarlas en edificios (pero sirven para columpios y otras cosas: ocasionalmente se usan en puentes, sobre todo en películas de aventuras). *La clave está en que el número de alargamientos (en este ejemplo, uno) es menor que el de grados de libertad (aquí, dos).*

Dos cables...

Si se pretende alargar dos cables simultáneamente, las posibilidades de movimiento del extremo común se reducen drásticamente. Si los cables son, inicialmente, de longitudes ℓ_a y ℓ_b , el extremo P estará *justamente* en la intersección de dos circunferencias de radios $R_a = \ell_a$ y $R_b = \ell_b$ y centros en A y B, respectivamente. Si los alargamientos, δ_a y δ_b , son conocidos, el extremo común debe moverse hasta la intersección de dos nuevas



circunferencias, con los mismos centros que las anteriores, y con radios $R'_a = \ell_a + \delta_a$ y $R'_b = \ell_b + \delta_b$, respectivamente. El punto P, de coordenadas (x_0, y_0) , se mueve hasta P', de coordenadas (x_e, y_e) . Las componentes cartesianas del movimiento son, entonces, $u = x_e - x_0$ y $v = y_e - y_0$.

Calcular (u, v) dados (δ_a, δ_b) es conceptualmente sencillo: la intersección de circunferencias se reduce a resolver un conjunto de dos ecuaciones. Pero un somero vistazo a esas ecuaciones permite intuir que la fórmula resultante para (u, v) no va a ser precisamente sencilla; siendo las coordenadas de A y B (x_a, y_a) y (x_b, y_b) , respectivamente, se tendrá:

$$\begin{aligned} (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 &= R_a^2 \\ (x - x_b)^2 + (y - y_b)^2 &= R_b^2 \end{aligned}$$

Si el eje x pasa por A y B, entonces $y_a = y_b = 0$, y es posible despejar x , tras restar ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} (x - x_a)^2 + y^2 &= R_a^2 \\ (x - x_b)^2 + y^2 &= R_b^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ (x - x_a)^2 - (x - x_b)^2 &= R_a^2 - R_b^2 \Rightarrow \\ x &= \frac{1}{2} \frac{(x_a^2 - x_b^2) - (R_a^2 - R_b^2)}{x_a - x_b} \end{aligned}$$

Con la última expresión se obtiene x_0 ó x_e según que para los radios se empleen las longitudes iniciales o las incrementadas con los alargamientos correspondientes. Como $u = x_e - x_0$, tras unas pocas transformaciones resulta que:

$$u = \frac{\delta_b(\delta_b + 2\ell_b) - \delta_a(\delta_a + 2\ell_a)}{2(x_a - x_b)}$$

En esta expresión vemos que la relación entre movimiento, u , y alargamientos, δ , *no es lineal*. Pero en las estructuras suficientemente rígidas que nos interesan siempre va a ocurrir que $\delta_i \ll \ell_i$ para $i \in \{a, b\}$, de manera que una buena aproximación resulta de despreciar

el alargamiento de cada barra frente a su longitud:

$$u \approx \frac{\delta_b \ell_b - \delta_a \ell_a}{x_a - x_b} \quad (1)$$

Teniendo en cuenta las relaciones que existen entre coordenadas y cotas ($\mathbf{a} + \mathbf{b} = x_b - x_a$, $\mathbf{h} = \mathbf{a} \tan \alpha$, $\mathbf{a} = \ell_a \cos \alpha$, etc; véase la figura), es posible transformar la expresión para u en:

$$u \approx \frac{\delta_a \frac{\mathbf{h}}{\sin \alpha} - \delta_b \frac{\mathbf{h}}{\sin \beta}}{\frac{\mathbf{h}}{\tan \alpha} + \frac{\mathbf{h}}{\tan \beta}} = \frac{\delta_a \sin \beta - \delta_b \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (2)$$

Con esta aproximación, vemos que en una estructura suficientemente rígida, el movimiento varía *casi linealmente* con los alargamientos, y si éstos son pequeños también lo será aquel. Pero también se ve que incluso si uno de los cables no se alargara (por ejemplo, $\delta_b = 0$), su geometría sigue influyendo en el movimiento producido por el alargamiento del otro cable, es decir, sigue determinando el valor de u a través de su inclinación (ángulo β): la deformación de cada cable *debe ser compatible* con la del otro:

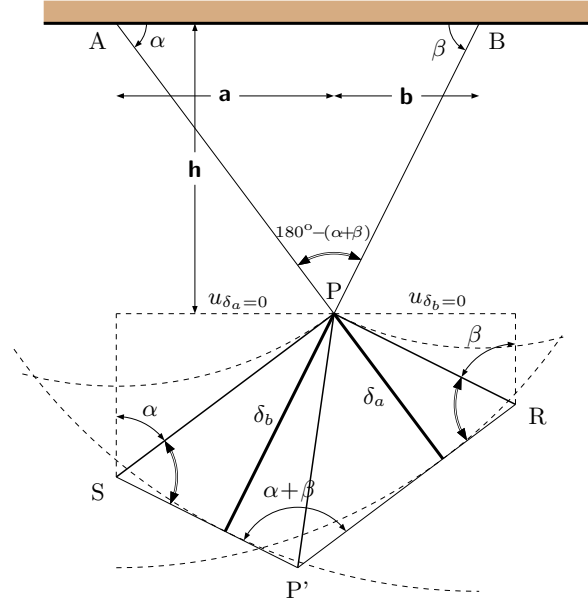
$$u_{\delta_b=0} \approx \frac{\delta_a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (3)$$

De esta última expresión, o de la general para u , ecuación (2), es posible dar una interpretación geométrica (lo que resulta conveniente para recordarla). Con la hipótesis de *alargamientos y desplazamientos pequeños* (y no enormes como los de la figura) podemos sustituir cada arco de una circunferencia por una tangente a ella. Si $\delta_b = 0$, P se traslada a R; si $\delta_a = 0$, P se traslada a S. Si ninguno de los dos alargamientos es nulo, P se mueve hasta P', es decir que $\widehat{PP'} = \widehat{PR} + \widehat{PS}$. Las claves para interpretar la figura son:

- PRP'S es una paralelogramo en el que $\widehat{PRP'} = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ y $\widehat{SPR} = \alpha + \beta$.
- $PR = \delta_a \div \sin(180^\circ - (\alpha + \beta))$, pero $\sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta)$.
- La proyección sobre la horizontal de PR (es decir, $u_{\delta_b=0}$) se obtiene simplemente multiplicando por $\sin \beta$.
- Además de las tangentes, he dibujado las circunferencias cuyas intersecciones señalan las posiciones de P', R y S, en el caso de que los alargamientos fueran realmente los dibujados.

Una vez entendida la figura, es fácil obtener la expresión para v :

$$v = v_{\delta_b=0} + v_{\delta_a=0} \approx PR \cos \beta + PS \cos \alpha \approx \frac{\delta_a \cos \beta + \delta_b \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (4)$$

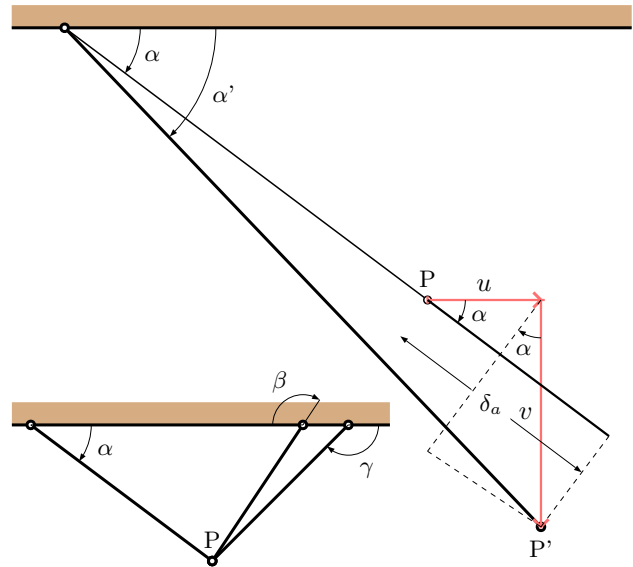


Dos, tres o n cables...

Puesto que tres circunferencias no tienen en general un punto común de intersección, no tiene sentido plantearse hallar (u, v) dados los alargamientos de tres o más cables: al fijar dos de los alargamientos, los restantes quedan determinados por los desplazamientos (u, v) resultantes. De hecho, lo más directo es fijar los grados de libertad u y v , aunque optar por δ_a y δ_b es *elegir otra representación* de los *mismos* grados de libertad de la estructura.

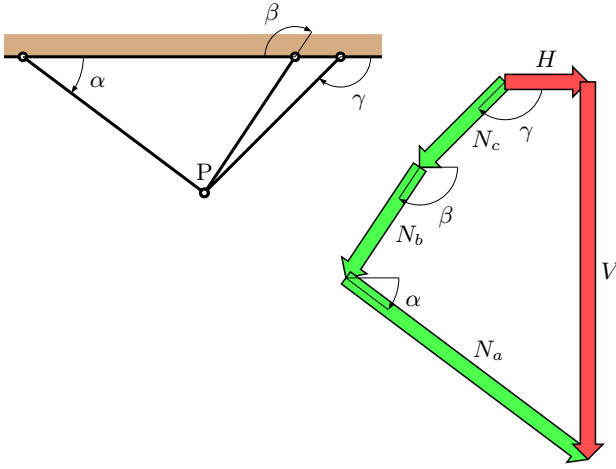
Siguiendo el camino directo, hay que ver como se alarga cada cable bajo desplazamientos (u, v) de su extremo. Con la hipótesis de desplazamientos pequeños, si $\delta_a \ll \ell_a$, u y v son también pequeños, $\alpha \approx \alpha'$, y podemos sustituir la circunferencia por su tangente. En consecuencia, la *ecuación de compatibilidad* para cada cable la podemos escribir como:

$$\delta_a \approx u \cos \alpha + v \sin \alpha \quad (5)$$



Y para todos ellos:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \\ \delta_c \\ \vdots \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \cos \beta & \sin \beta \\ \cos \gamma & \sin \gamma \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{a}$$



Puede descubrirse una propiedad notable de la *mecánica de las estructuras* al considerar como se relacionan las fuerzas interiores en cada cable con las componentes horizontal y vertical de la acción exterior aplicada en el extremo común. Consideremos el polígono vectorial de fuerzas en ese punto y un convenio *mecánico* para los signos, lo que significa representar los esfuerzos como la fuerza que el resto de la estructura ejerce sobre cada cable, véase la figura. Gracias otra vez a la hipótesis de desplazamientos pequeños, podemos establecer la *equivalencia estática* entre esfuerzos y acciones en la posición inicial, con la estructura sin deformar, y escribir:

$$\begin{aligned} H &\approx N_a \cos \alpha + N_b \cos \beta + N_c \cos \gamma + \dots \\ V &\approx N_a \sin \alpha + N_b \sin \beta + N_c \sin \gamma + \dots \end{aligned}$$

o en forma matricial:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} H \\ V \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma & \dots \\ \sin \alpha & \sin \beta & \sin \gamma & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_a \\ N_b \\ N_c \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{B}^T \mathbf{s}$$

Es decir, los *factores de proporcionalidad* que permiten transformar los desplazamientos en alargamientos **son los mismos** que aquellos que transforman las fuerzas interiores en acciones exteriores (salvo el orden, de ahí que aparezca la matriz \mathbf{B} y su transpuesta, \mathbf{B}^T). En términos prácticos, esto significa que una vez determinada una relación (entre movimientos o fuerzas), *ya se sabe* la otra (entre fuerzas o movimientos). (Esta es una propiedad que *sólo* puedo mostrar para una estructura suficientemente rígida, con deformaciones pequeñas.)

De nuevo, dos cables...

Si hay dos cables (o, en general, tantos alargamientos como grados de libertad) se puede elegir entre determinar primero los esfuerzos —*análisis isostático*—,

y deducir de ellas deformaciones y movimientos; o determinar los grados de libertad, (u, v) , y deducir de ellos todo lo demás —*análisis hiperestático*. (Con más cables —alargamientos— que grados de libertad no hay elección: sólo el último método, *hiperestático*, de análisis es viable; por ello se le llama *universal*.)

El análisis isostático es posible gracias a la hipótesis de desplazamientos pequeños. Con tantos cables como grados de libertad la matriz \mathbf{B} es cuadrada y tiene inversa, de manera que, para dos cables, se puede escribir:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \end{bmatrix} \approx \mathbf{B} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{g}$$

o bien

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \approx \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Esta flexibilidad permite métodos alternativos para calcular u y v , es decir, \mathbf{g} . Veámoslo. La relación entre acciones y esfuerzos es:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} H \\ V \end{bmatrix} \approx \mathbf{B}^T \begin{bmatrix} N_a \\ N_b \end{bmatrix}$$

o bien

$$\mathbf{a}^T = [H \quad V] \approx [N_a \quad N_b] \mathbf{B}$$

Si multiplicamos escalarmente el vector de acciones, \mathbf{a} , por el vector de desplazamientos, \mathbf{g} :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T \mathbf{g} &= [H \quad V] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \approx [N_a \quad N_b] \mathbf{B} \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \end{bmatrix} \\ &= [N_a \quad N_b] \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \end{bmatrix} = \mathbf{s}^T \mathbf{b} \end{aligned} \quad (6)$$

Esta expresión es bastante general: sólo requiere emplear esfuerzos *en equilibrio* con las acciones, y alargamientos *compatibles* con los desplazamientos. Pero fuerzas y movimientos pueden no estar relacionados entre sí, salvo por referirse a la misma estructura (y, en consecuencia, estar regidos por la misma matriz \mathbf{B}). Como quiera que los esfuerzos de una estructura “isostática” se pueden obtener independientemente de su deformación, podemos considerar el caso particular en el que, por ejemplo, $H=0$ y $V=1$ (da igual en qué unidades):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = v$$

y, por tanto, podemos calcular v con (6):

$$v \approx [N_{a,(H=0,V=1)} \quad N_{b,(H=0,V=1)}] \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \end{bmatrix}$$

expresión que permite calcular v para los alargamientos de los cables (δ_a y δ_b), con sólo calcular los esfuerzos hipotéticos o *virtuales* para unas acciones igualmente hipotéticas o *virtuales* ($H=0$ y $V=1$). Aunque puede parecer como cosa de magia, sólo hay que notar que $N_{a,(H=0,V=1)}$ tiene precisamente el mismo valor que el coeficiente que multiplica a δ_a en la expresión (4). Y lo mismo ocurre con $N_{b,(H=0,V=1)}$. Análogamente puede calcularse u . En esencia, la ecuación (6) es una forma del *teorema de los trabajos virtuales*.

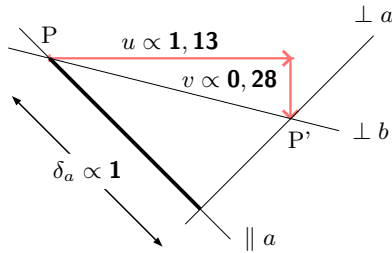
Ejemplos...

En el caso de la figura, N_b y δ_b son nulos, debido a la peculiar orientación de \mathbf{F} . Sin embargo, el movimiento de P no puede seguir la dirección del cable a . Para un alargamiento δ_a conocido, es posible calcular el desplazamiento de P con las fórmulas (2) y (4), si es que se es capaz de recordarlas. Puesto que $\alpha = 45^\circ$ y $\beta \approx 76^\circ$, se tendrá:

$$u \approx \frac{\delta_a \sin 76^\circ}{\sin(45^\circ + 76^\circ)} = 1,13 \cdot \delta_a$$

$$v \approx \frac{\delta_a \cos 76^\circ}{\sin(45^\circ + 76^\circ)} = 0,28 \cdot \delta_a$$

Pero también es posible realizar la construcción geométrica con los valores de los alargamientos y medir sobre el propio dibujo. La clave es que P' se encontrará en la perpendicular a b puesto que este cable ni se acorta ni se alarga:



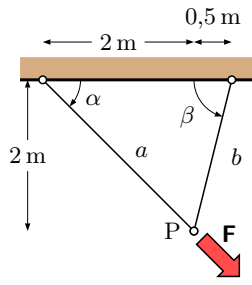
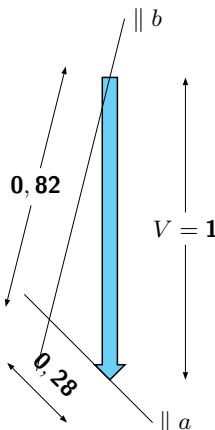
Otra solución numérica se obtiene con la formulación general de la ecuación de compatibilidad, ecuación (5): basta con escribir una ecuación de compatibilidad para cada alargamiento conocido:

$$\begin{cases} \delta_a \approx u \cos 45^\circ + v \sin 45^\circ \\ 0 \approx u \cos 104^\circ + v \sin 104^\circ \end{cases} \Rightarrow$$

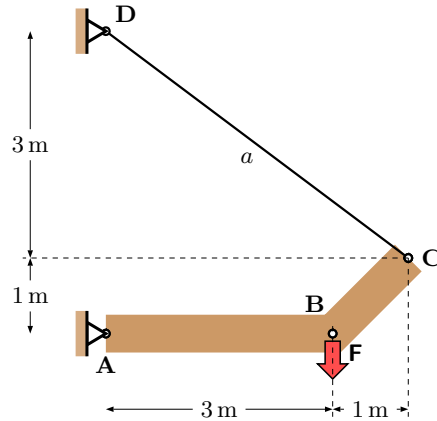
$$(u; v) \approx (1,13; 0,28) \cdot \delta_a$$

Por último, para calcular, por ejemplo, v , se puede recurrir a analizar los esfuerzos bajo una carga vertical unitaria (polígono vectorial de la figura); y según la ecuación (6) tendremos:

$$0 \times u + 1 \times v \approx 0,28 \times \delta_a + 0,82 \times \delta_b \Rightarrow v \approx 0,28 \cdot \delta_a$$

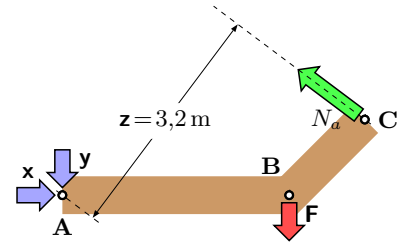


Como se ve, hay suficiente diversidad de métodos como para satisfacer casi todos los gustos. Aunque, según el caso, algunos métodos pueden ser más directos que otros...



En el ejemplo de la figura, la viga ABC se considera indeformable respecto al cable a . ¿Cuál será la relación entre el alargamiento del cable, δ_a , con el descenso de un punto de la viga, por ejemplo el B? Lo esencial es que la estructura sólo tiene un grado de libertad, el giro respecto de A; y, por tanto, la ecuación de equilibrio relevante es la de equilibrio de momentos respecto a A. Considerando ese equilibrio, el momento de las fuerzas exteriores debe ser igual al de los esfuerzos:

$$M_A = 3,2 \text{ m} \times N_a$$



Si las acciones se reducen a la fuerza \mathbf{F} , el momento exterior M_a es $3 \text{ m} \times \mathbf{F}$, de suerte que $N_a = \mathbf{F} \times 3 \text{ m} \div 3,2 \text{ m}$; lo que permite determinar el alargamiento del cable cuando se conoce su rigidez: $\delta_a = N_a \div \mathbf{k}_a$.

De la ecuación de equilibrio puede deducirse de forma inmediata la ecuación de compatibilidad (en este caso, la matriz \mathbf{B} se reduce a un escalar y resulta idéntica a su transpuesta):

$$M_A = 3,2 \text{ m} \times N_a \Rightarrow \delta_a = 3,2 \text{ m} \times \theta_A$$

Por otra parte, el descenso de B es simplemente el producto del giro en A por la distancia AB, de manera que:

$$v_B = 3 \text{ m} \times \theta_A = \frac{3 \text{ m}}{3,2 \text{ m}} \delta_a$$