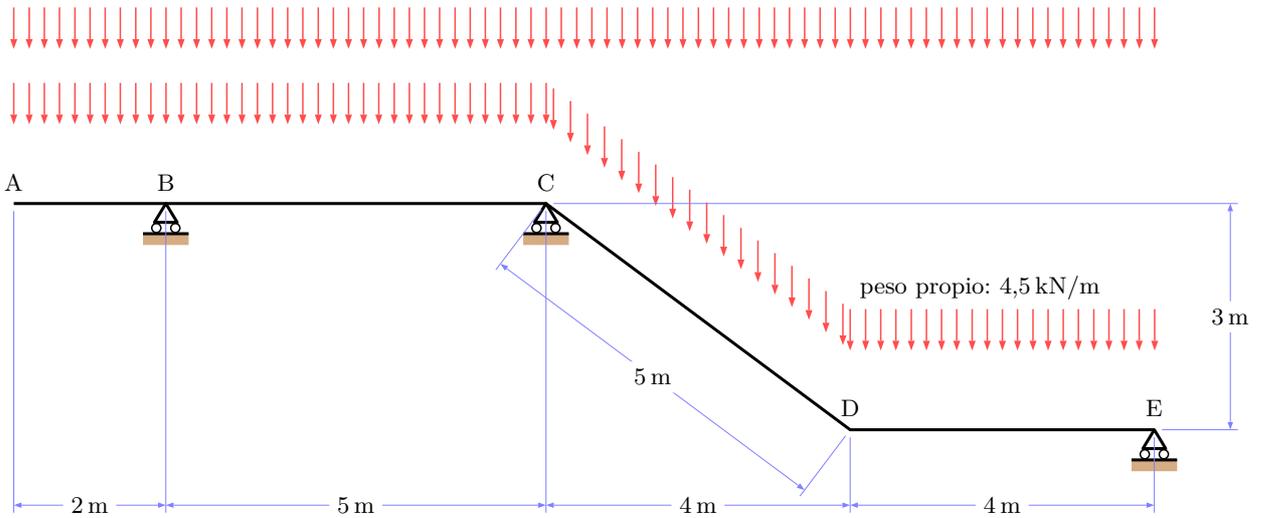


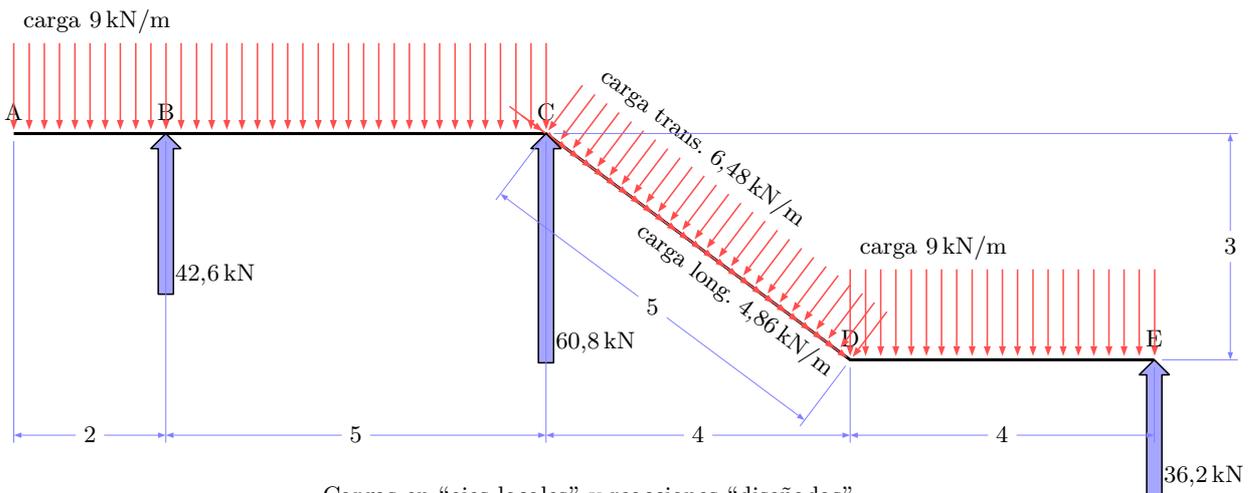
## Diagramas de esfuerzos de una viga quebrada

uso: 4,5 kN/m



### Datos originales

El peso máximo sobre la viga es 139,5 kN. No hay fuerzas externas horizontales y hay tres reacciones verticales: hay infinitas ternas de tres reacciones que pueden cumplir las otras dos ecuaciones de equilibrio (fuerzas verticales y momentos respecto a un punto cualquiera), la sustentación es hiperestática.



### Cargas en "ejes locales" y reacciones "diseñadas"

En el tramo CD se han calculado cargas perpendiculares y paralelas a CD, sumando vectorialmente las cargas originales; en los otros tramos basta con una suma escalar.

Se ha "diseñado" (elegido) una terna de reacciones. Comprobación del equilibrio:

$$139,5 \text{ kN} - (42,6 + 60,8 + 36,2) \text{ kN} = -0,1 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} \sum M_B &= 4,5 \text{ kN/m} \times 15 \text{ m} \times 5,5 \text{ m} + 4,5 \text{ kN} \times (7 \text{ m} \times 1,5 \text{ m} + 4 \text{ m} \times 11 \text{ m}) + \\ &+ 4,5 \text{ kN/m} \times 5 \text{ m} \times 7 \text{ m} - 60,8 \text{ kN} \times 5 \text{ m} - 36,2 \text{ kN} \times 13 \text{ m} \\ &= -0,6 \text{ kN} \end{aligned}$$

Tenemos un conjunto de fuerzas exteriores (acciones y reacciones) en equilibrio (salvo los inevitables redondeos): *esta es la condición imprescindible para poder obtener las leyes o diagramas de esfuerzos (fuerzas interiores) respecto a la directriz ABCDE.*

En este caso particular, que las reacciones "diseñadas" sean un modelo adecuado para una estructura particular *dependerá de cómo sea el diseño de esta última*: se trata de una comprobación pendiente. Sin embargo, siempre es posible mediante un diseño (sencillo o complicado, "bonito" o "feo", bueno o malo), forzar el funcionamiento de una estructura para que precisamente tenga, bajo las cargas dadas, las reacciones elegidas. *Lo único no negociable es la condición de equilibrio de acciones y reacciones (admisibilidad estática).* Nótese que los errores debidos al redondeo se propagarán a los valores de los esfuerzos, sin que sean importantes.

Convenio de signos para los esfuerzos:

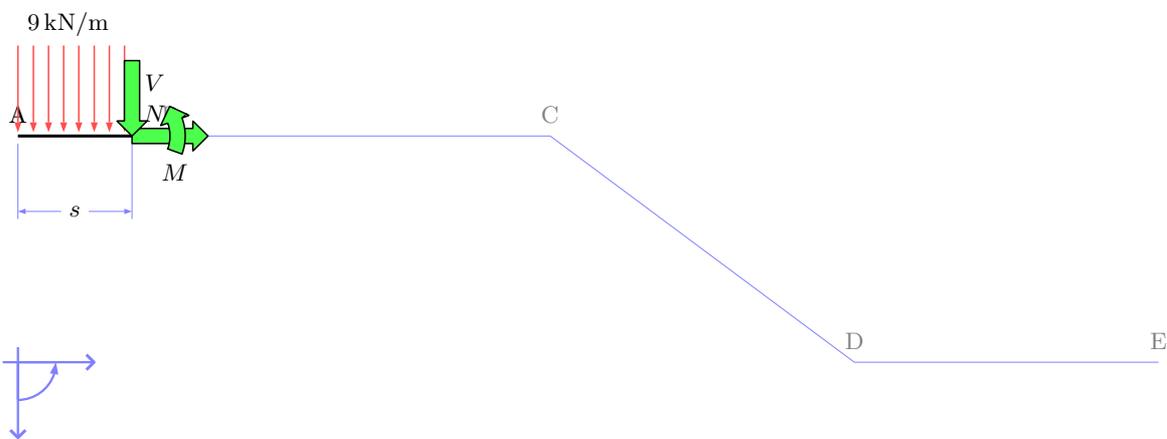


Unidades: kN y m·kN

Los esfuerzos se obtienen mediante equilibrio parcial de un trozo de estructura después de darla un tajo (corte) imaginario. El corte puede darse en un punto concreto y entonces permite calcular valores de los esfuerzos en ese punto. O darse a una distancia variable  $s$  de un punto fijo y entonces permite calcular la expresión funcional de los esfuerzos en función de la distancia  $s$ .

No hay límites respecto a como dar el corte, ni a su número. Tampoco hay límites a la hora de elegir el trozo para plantear el equilibrio. Bueno, no hay más límite que la *imaginación* de quien realiza el análisis. Hay alguna sugerencia de sentido común: el “mejor” trozo de entre los posibles es aquel que conduzca a ecuaciones de equilibrio con menos operaciones; el “mejor” corte (o cortes si se dan varios) es aquel que define un “buen” trozo (según el criterio anterior).

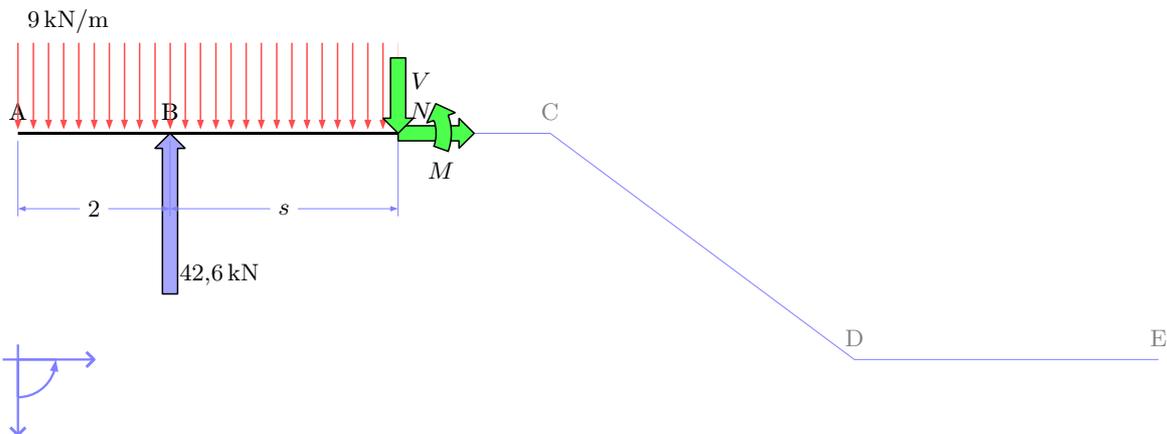
A continuación se muestran algunos “buenos” cortes y las ecuaciones de equilibrio correspondientes, siempre respecto al punto cortado de la directriz, con esfuerzos perpendiculares y paralelos a ella. Además de la convención acerca de los signos de los esfuerzos (*siempre un par de fuerzas o momentos*) de más arriba, se indican los ejes empleados para escribir las ecuaciones de equilibrio. Nótese que  $s$  es una variable comodín, con significado bien distinto en cada corte considerado.



Tramo AB

$$\underline{N(s) = 0} \quad 9 \text{ kN/m} \times s + V(s) = 0 \rightarrow \underline{V(s) = -9 \text{ kN/m} \times s} \quad 9 \text{ kN/m} \times s \times \frac{s}{2} + M(s) = 0 \rightarrow \underline{M(s) = -4,5 \text{ kN/m} \times s^2}$$

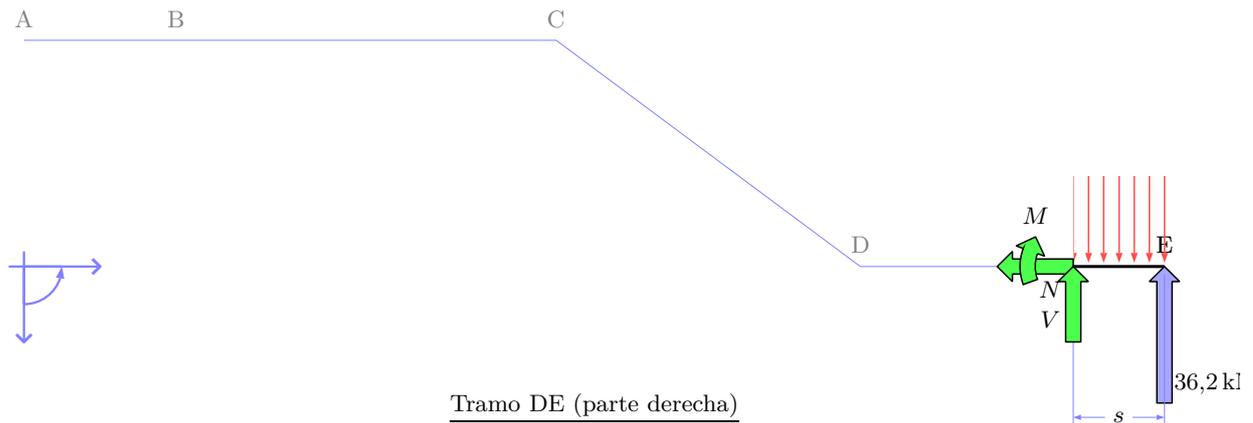
-o-0-o-



Tramo BC

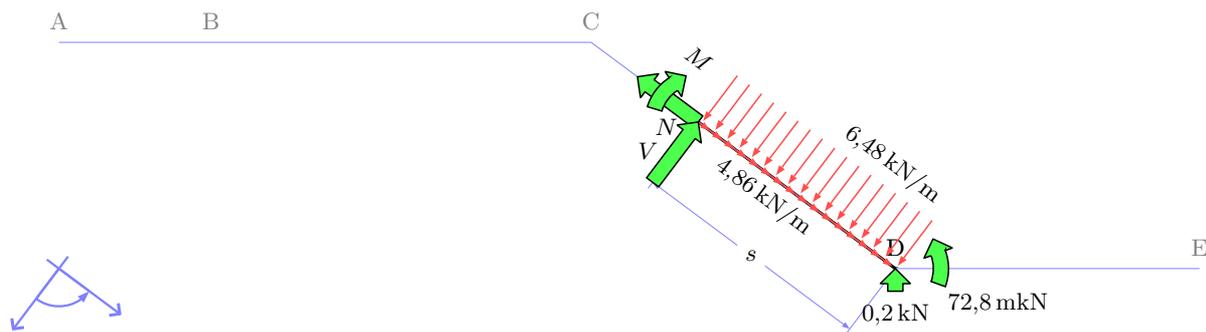
$$\underline{N(s) = 0} \quad 9 \text{ kN/m} \times (2 \text{ m} + s) - 42,6 \text{ kN} + V(s) = 0 \rightarrow \underline{V(s) = -9 \text{ kN/m} \times s + 24,6}$$

$$9 \text{ kN/m} \times 2 \text{ m} \times (1 \text{ m} + s) + 9 \text{ kN/m} \times s \times \frac{s}{2} - 42,6 \text{ kN} \times s + M(s) = 0 \rightarrow \underline{M(s) = -18 \text{ m kN} + 24,6 \text{ kN} \times s - 4,5 \text{ kN/m} \times s^2}$$



$$\underline{N(s) = 0 \quad -V(s) - 36,2 \text{ kN} - 9 \text{ kN/m} \times s = 0 \rightarrow V(s) = -36,2 \text{ kN} - 9 \text{ kN/m} \times s}$$

$$\underline{-M(s) + 36,2 \text{ kN} \times s - 9 \text{ kN/m} \times s \times \frac{s}{2} \rightarrow M(s) = 36,2 \text{ kN} \times s - 4,5 \text{ kN/m} \times s^2}$$



Se ha cortado por D y a una distancia  $s$  de D. Los valores de los esfuerzos justo a la derecha de D se obtienen de las expresiones del corte anterior para el tramo DE.

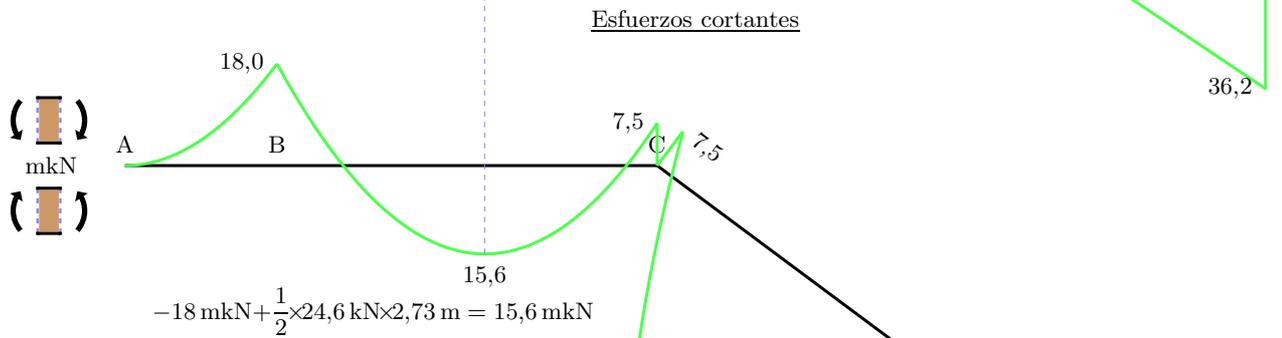
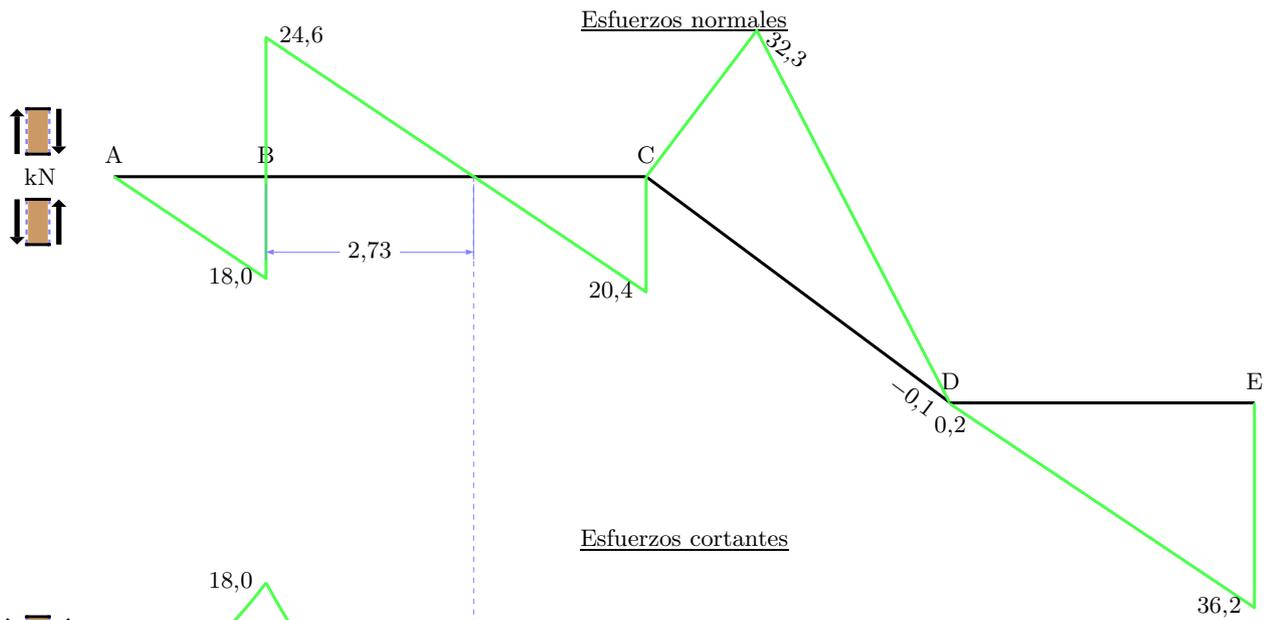
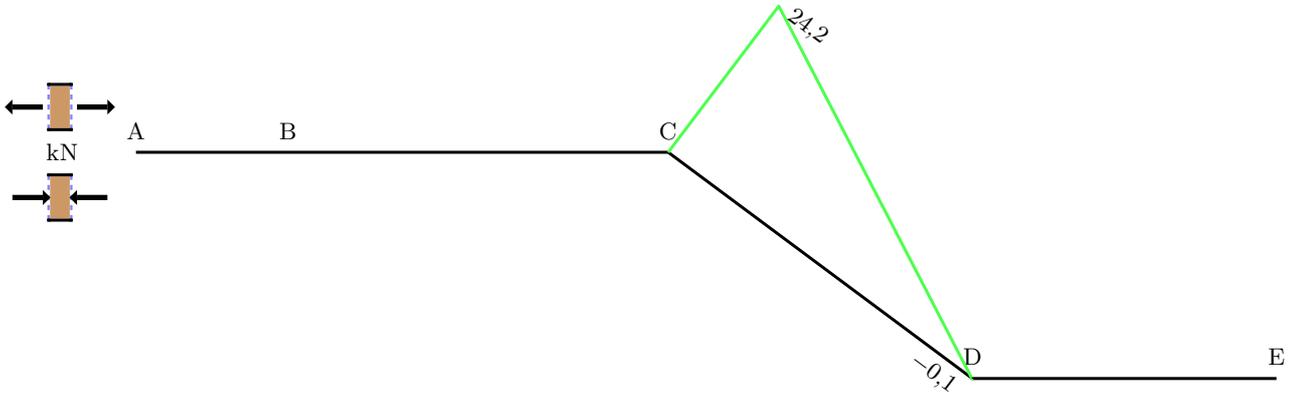
$$4,86 \text{ kN/m} \times s - N(s) - 0,2 \text{ kN} \times \frac{3}{5} = 0 \rightarrow \underline{N(s) = 4,86 \text{ kN/m} \times s - 0,1 \text{ kN}}$$

$$\underline{-V(s) + 6,48 \text{ kN/m} \times s - 0,2 \text{ kN} \times \frac{4}{5} = 0 \rightarrow V(s) = 6,48 \text{ kN/m} \times s - 0,2 \text{ kN}}$$

$$\underline{-M(s) - 6,48 \text{ kN/m} \times s \times \frac{s}{2} + 72,8 \text{ kN} + 0,2 \text{ kN} \times s \times \frac{4}{5} = 0 \rightarrow M(s) = 72,8 \text{ kN} + 0,2 \text{ kN} \times s - 3,24 \text{ kN/m} \times s^2}$$

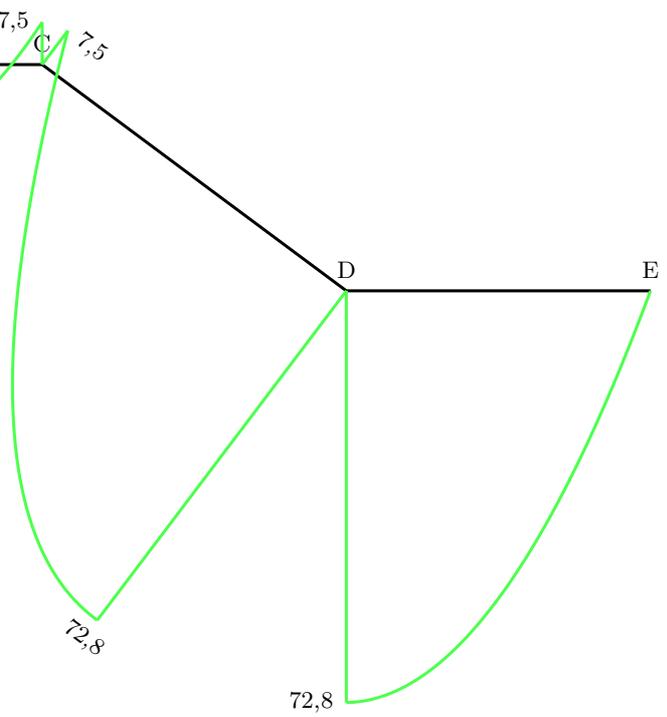
Con los trozos analizados hasta ahora quedan determinados y pueden dibujarse los diagramas de esfuerzos.

En el tramo BC, el punto donde el esfuerzo cortante es nulo se determina resolviendo  $V(s) = 0$  con la expresión de  $V$  apropiada para ese tramo. En ese punto el esfuerzo flector es localmente máximo. En los tramos CDE el cortante es aproximadamente cero en D, y en ese punto el flector también es localmente máximo, aproximadamente.

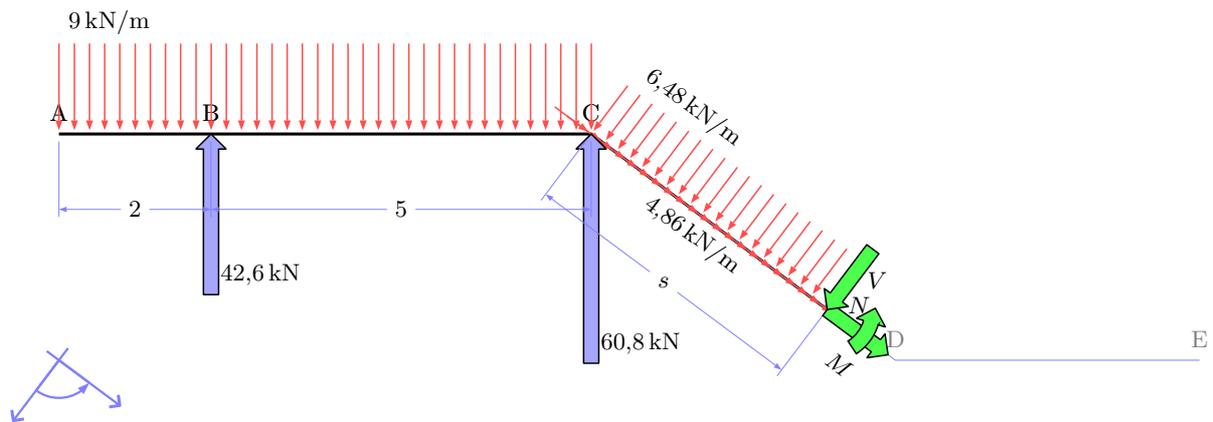


Esfuerzos flectores

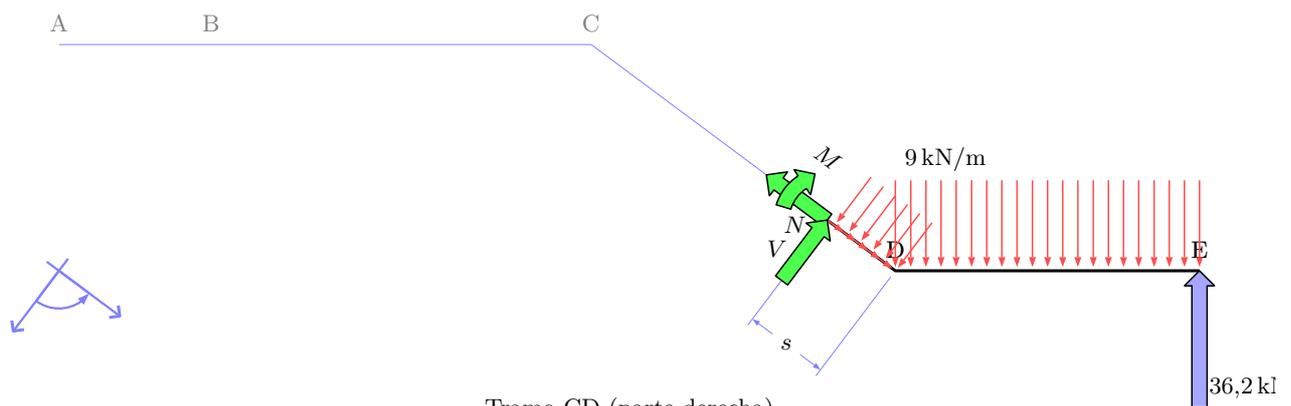
$$-18 \text{ mkN} + \frac{1}{2} \times 24,6 \text{ kN} \times 2,73 \text{ m} = 15,6 \text{ mkN}$$



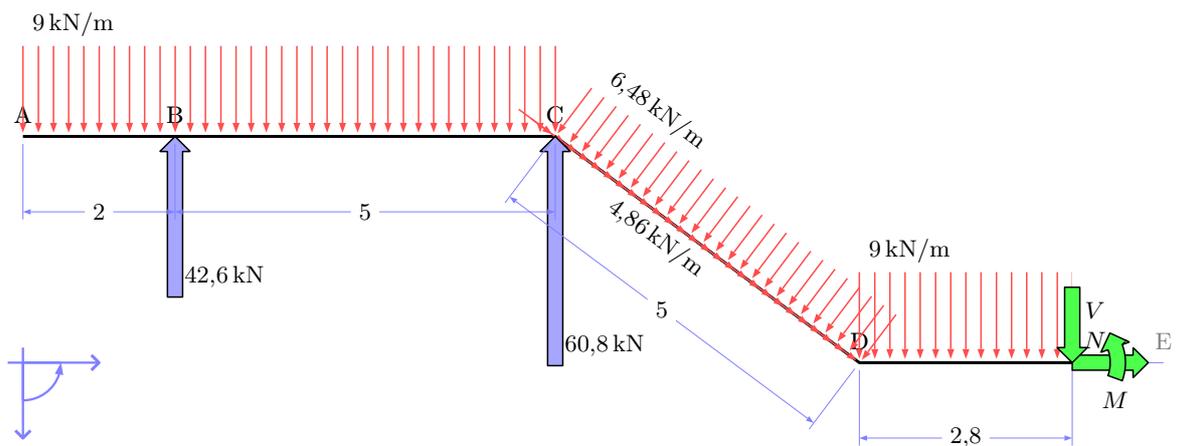
A continuación se muestran cortes alternativos para algunos de los tramos. En todos los casos se obtendrán los mismos resultados que con anterioridad, pero tras más sumas y multiplicaciones (y con mayor probabilidad de equivocarse), al intervenir más términos de fuerza exterior. (Pueden considerarse como ejercicios: las soluciones, salvo el significado de  $s$ , deben ser consistentes con las ya obtenidas.)



Tramo CD (parte izquierda)

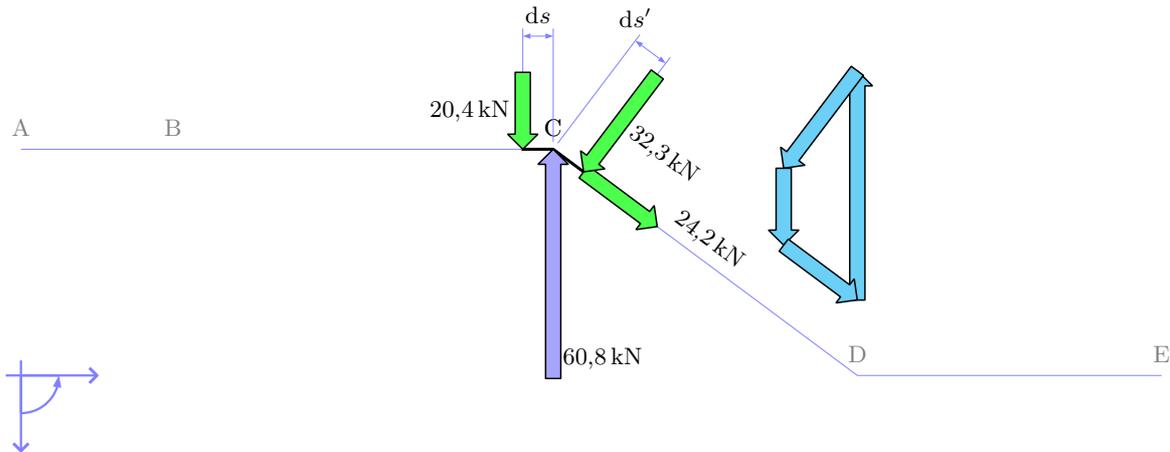


Tramo CD (parte derecha)



Tramo DE (parte izquierda)

Aparte de los cortes “macroscópicos”, también son útiles los “microscópicos”, alrededor de puntos como el B, el C o el D. El equilibrio de esos puntos (en realidad de cualquier otro) puede servir tanto como comprobación de los cálculos anteriores como para calcular los esfuerzos a un lado del punto en cuestión una vez conocidos los esfuerzos al otro lado.

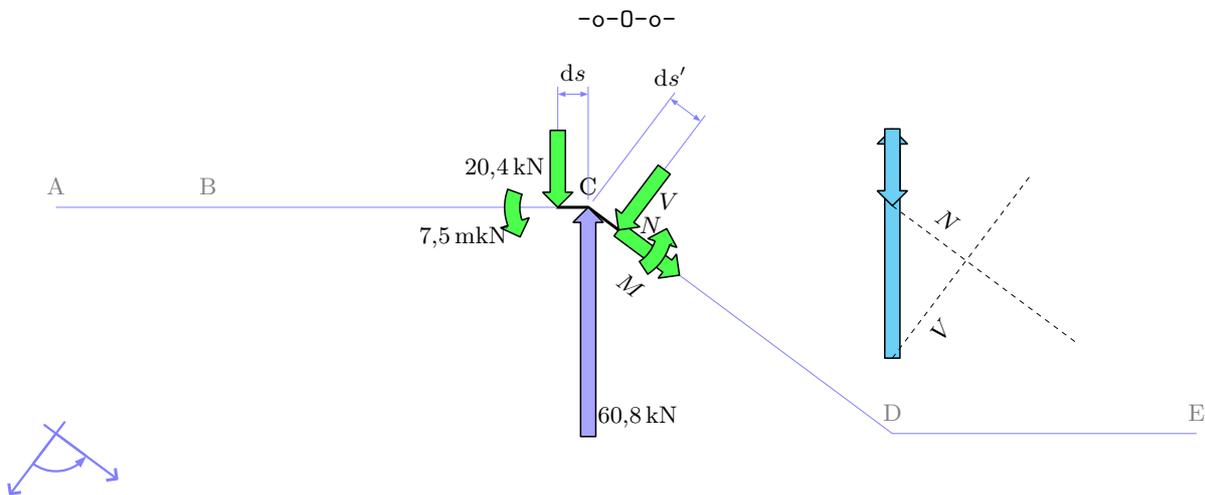


### Comprobación del equilibrio en C

No se representan los esfuerzos flectores, solo cortantes y normales, pues el equilibrio de flectores es trivial en este caso.

$$20,4 \text{ kN} - 60,8 \text{ kN} + 32,3 \text{ kN} \times \frac{4}{5} + 24,2 \text{ kN} \times \frac{3}{5} = 0 \text{ kN}$$

$$-32,3 \text{ kN} \times \frac{3}{5} + 24,2 \text{ kN} \times \frac{4}{5} = 0 \text{ kN}$$



### Cálculo de esfuerzos a la derecha de C

$$M_{C+} + 7,5 \text{ mkn} = 0 \rightarrow \underline{M_{C+} = -7,5 \text{ mkn}}$$

$$20,4 \text{ kN} \times \frac{3}{5} - 60,8 \text{ kN} \times \frac{3}{5} + N_{C+} = 0 \rightarrow \underline{N_{C+} = +24,2 \text{ kN}}$$

$$20,4 \text{ kN} \times \frac{4}{5} - 60,8 \text{ kN} \times \frac{4}{5} + V_{C+} = 0 \rightarrow \underline{V_{C+} = +32,3 \text{ kN}}$$