

Estructuras I

Sólido indeformable

Mariano Vázquez Espí

Madrid, 7 de febrero de 2020.

Estructuras de edificación: definiciones

Estructura mecánica: la parte resistente y poco deformable de cualquier cuerpo sometido a acciones mecánicas externas que asegura su existencia en el tiempo en condiciones de ser usado o desarrollar su función. Específicamente, aquella parte que asegura la conservación de la forma del cuerpo incluso cuando soporta acciones mecánicas.

Cuerpos: Vaso, silla, edificio, piramide de Keops, avión, . . .

La estructura de un edificio es lo más rígido de lo que compite para serlo.

JOSÉ LUIS DE MIGUEL (2016)

El Lenguaje de las Fisuras y Grietas, y su diagnosis

Estructuras de edificación: definiciones

Estructuras de edificación:

- deben permanecer *quietas* respecto a su *sustentación*, generalmente el suelo u otros edificios
- deben hacer frente a varios tipos de acciones:
 - su propio peso y el peso del resto del edificio, y el peso variable durante su uso (personas, enseres, libros, mercancías, . . . , *acción gravitatoria*)
 - el viento (*acción eólica*)
 - el movimiento del suelo (terromotos o seismos, *acción sísmica*)
 - . . .

Estructuras de edificación: definiciones

Modelo estático de las acciones:

- aunque muchas de las acciones son dinámicas y consisten en intercambios de energía entre el edificio y el entorno, en la mayor parte de los casos basta con representarlas mediante *fuerzas estáticas equivalentes*
- incluso con una representación estática, el carácter dinámico de la vida del edificio obliga a la consideración de cargas o fuerzas variables (viento, sobrecargas, . . .), lo que requiere formular distintas *hipótesis de carga*, representativas de distintas situaciones durante el uso del edificio.
- las acciones son fuerzas independientes, con valores acotados en un intervalo de **valores característicos**: [mín; máx].

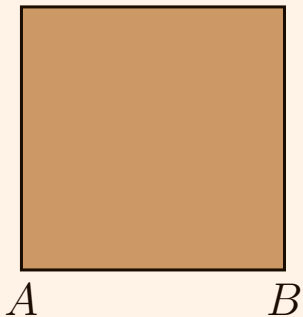
Estructuras de edificación: definiciones

Reacciones de la sustentación:

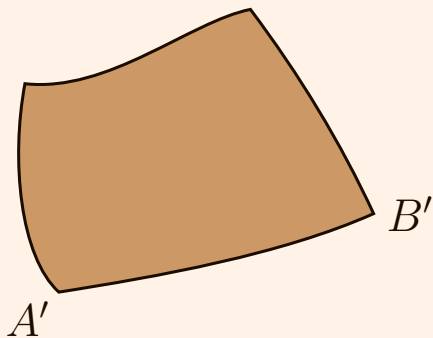
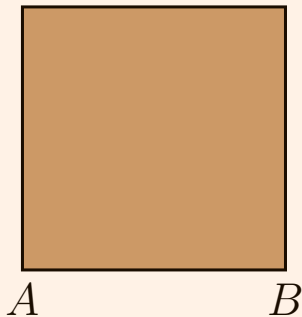
- para asegurar la quietud del edificio bajo carga, la sustentación reacciona para asegurar el *equilibrio estático*; esta reacción se modela también mediante fuerzas, las *reacciones* ejercidas por la sustentación *sobre* el edificio.
- las reacciones son fuerzas dependientes y toman en cada momento el valor necesario y suficiente para asegurar la quietud del edificio

Fuerzas exteriores: el conjunto de *acciones* y *reacciones* en equilibrio en cada hipótesis de carga del edificio

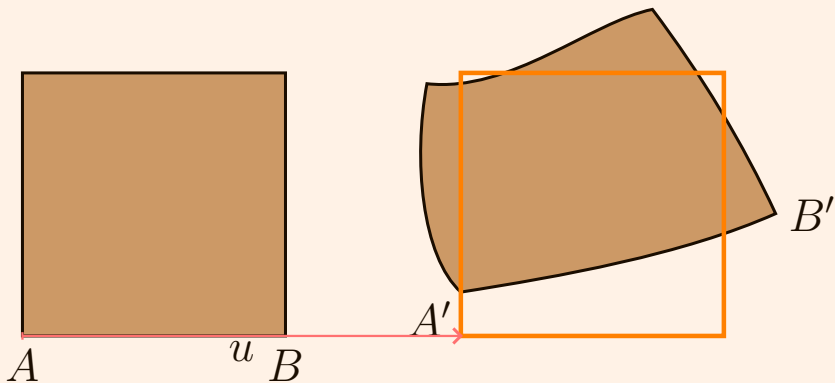
Deformación



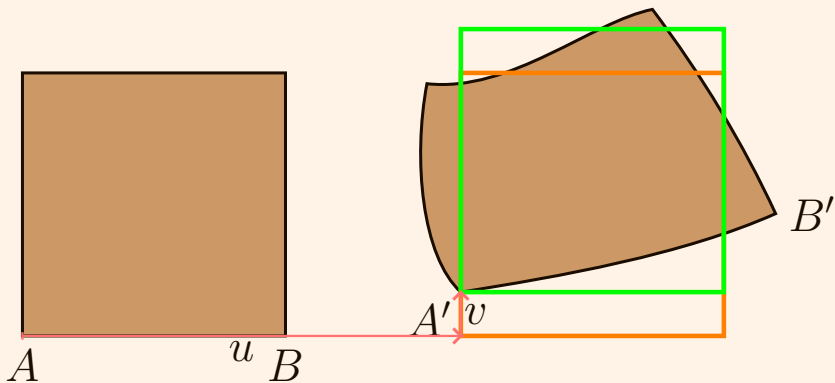
Deformación



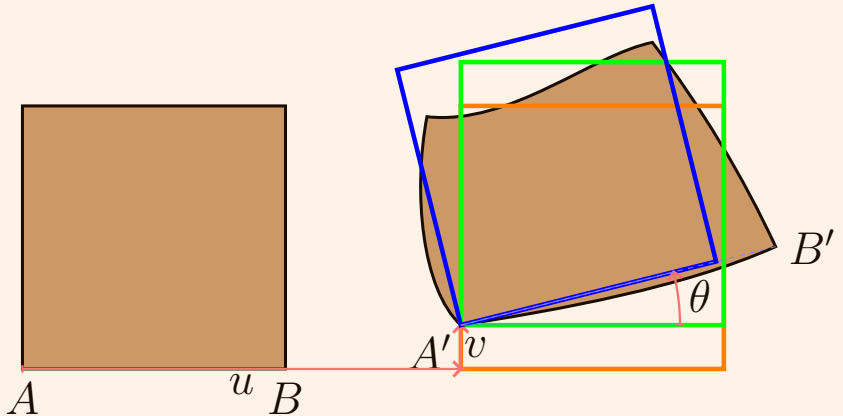
Deformación



Deformación



Deformación

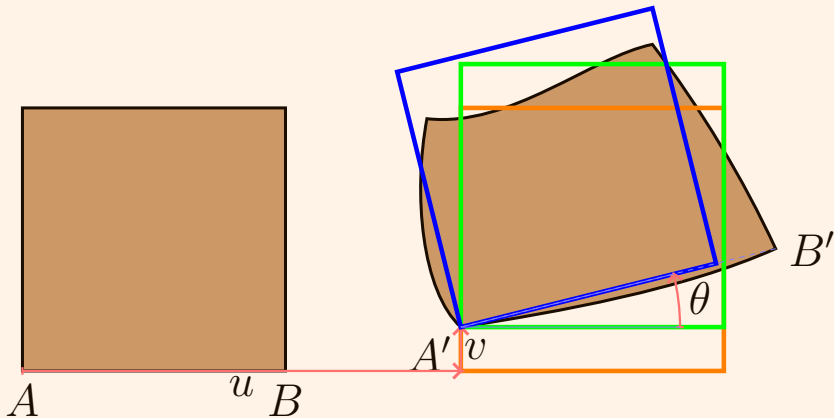


Deformación

Movimientos del sólido indeformable:

u, v, θ referido a AB .

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{AA'}$ θ : ángulo entre AB y AB'



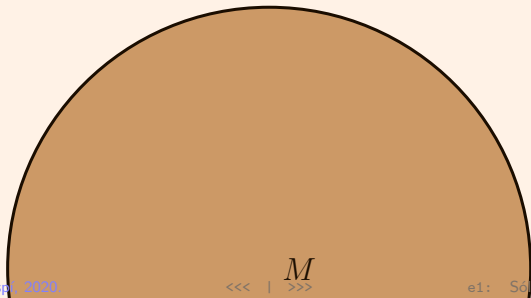
Leyes de Newton

1. **Ley de la inercia. (Galileo).** Todo cuerpo persevera en su estado de reposo, o de movimiento uniforme y rectilíneo, a no ser que sea obligado a cambiar su estado por fuerzas ejercidas sobre él.
2. El cambio de movimiento (o de cantidad de movimiento, $m\vec{v}$) es proporcional a la fuerza motriz ejercida y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se ejerce.

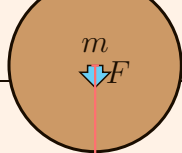
$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \left[\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \right]$$

3. **Ley de acción y reacción.** Cuando un cuerpo ejerce una fuerza \vec{F} sobre otro cuerpo, éste ejerce simultáneamente una fuerza $-\vec{F}$ sobre el primero.

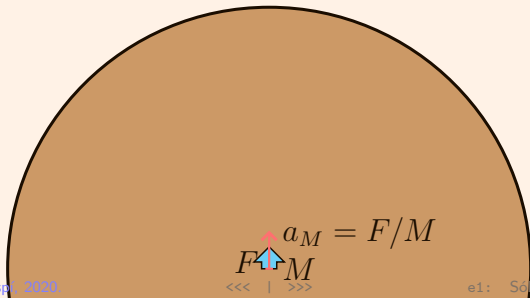
Leyes de Newton



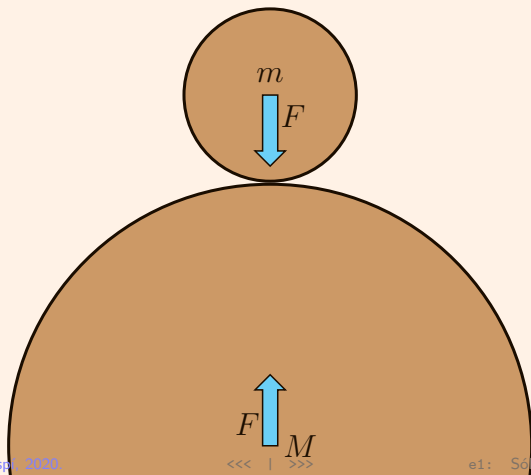
Leyes de Newton



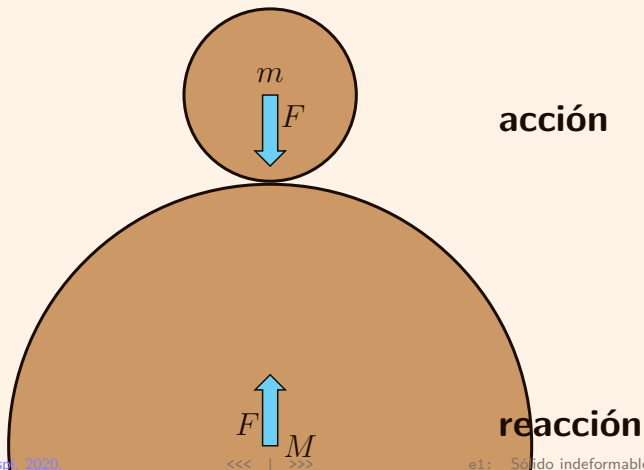
$$a_m = F/m$$



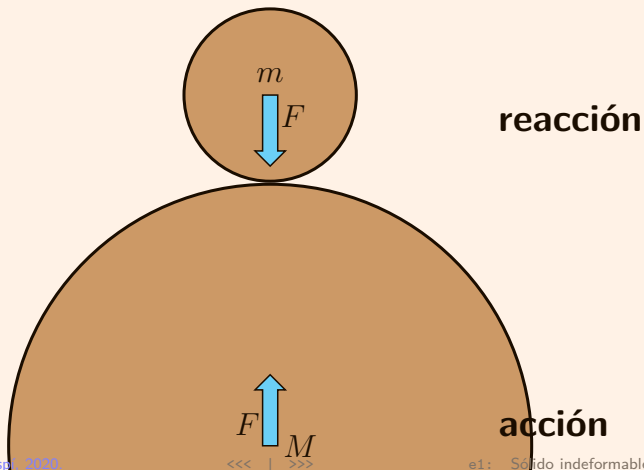
Leyes de Newton



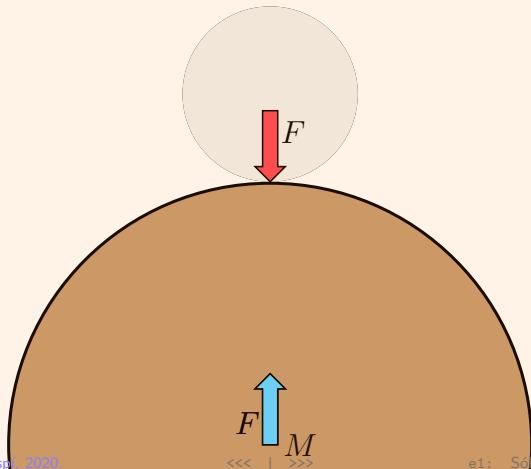
Leyes de Newton



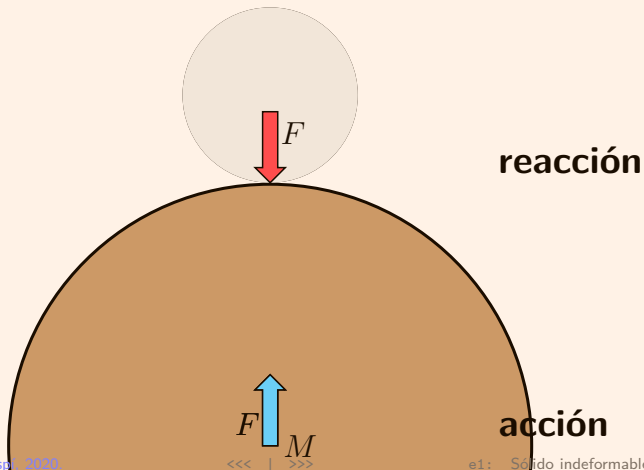
Leyes de Newton



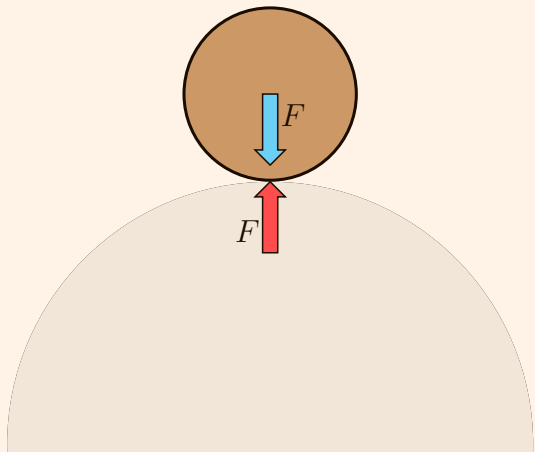
Leyes de Newton



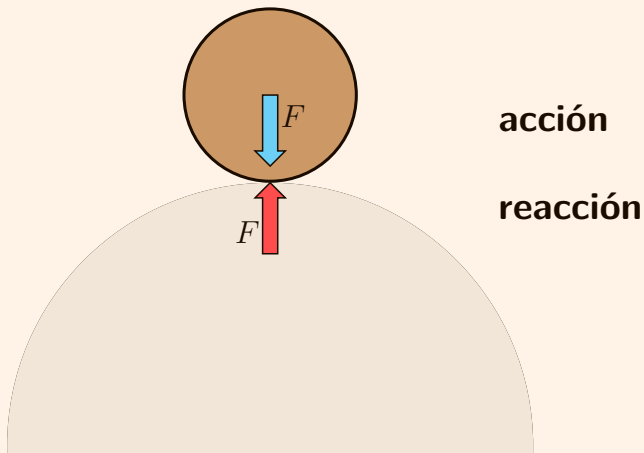
Leyes de Newton



Leyes de Newton

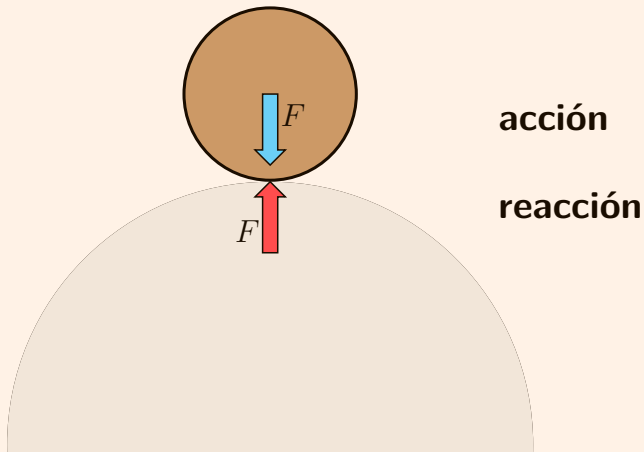


Leyes de Newton

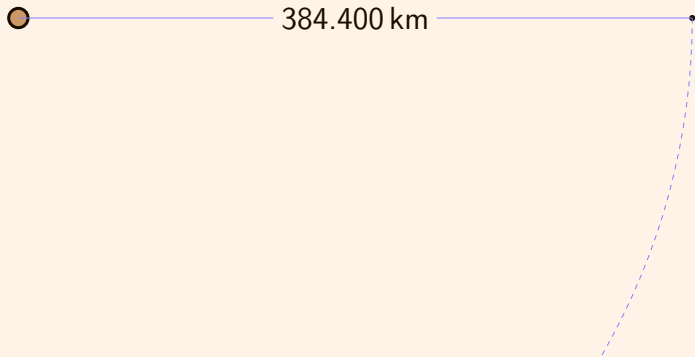


Leyes de Newton

acciones y reacciones \equiv fuerzas exteriores



La Tierra y la Luna



La Tierra y la Luna



Tierra

velocidad orbital media

$29,7 \text{ km/s} = 107\,000 \text{ km/h}$

$\ll c$

masa: $5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$

La Tierra y la Luna



Tierra

velocidad orbital media

$29,7 \text{ km/s} = 107\,000 \text{ km/h}$

$\ll c$

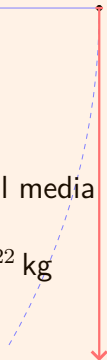
masa: $5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$

Luna

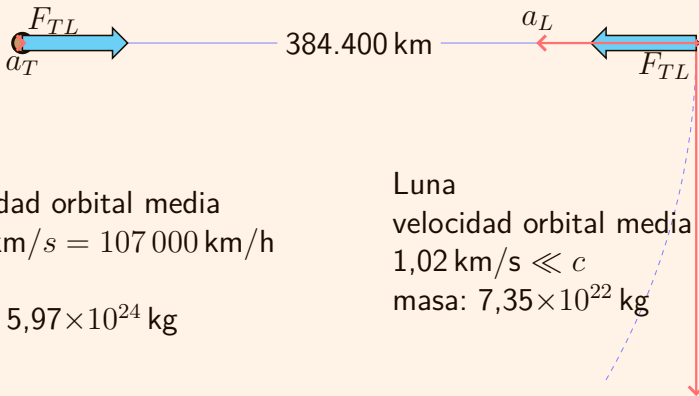
velocidad orbital media v_{omL}

$1,02 \text{ km/s} \ll c$

masa: $7,35 \times 10^{22} \text{ kg}$



La Tierra y la Luna



Tierra

velocidad orbital media

$29,7 \text{ km/s} = 107\,000 \text{ km/h}$

$\ll c$

masa: $5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$

Luna

velocidad orbital media v_{om_L}

$1,02 \text{ km/s} \ll c$

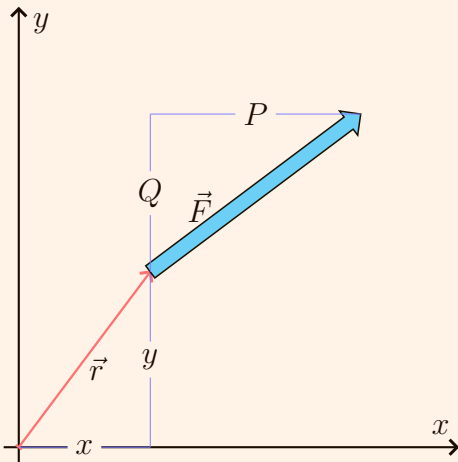
masa: $7,35 \times 10^{22} \text{ kg}$

$$F_{TL} = 1,98 \times 10^{20} \text{ N}$$

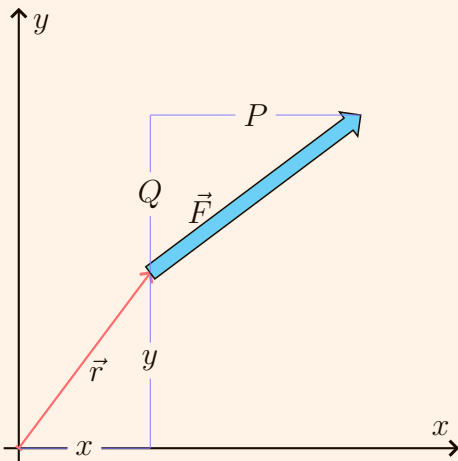
aceleración sobre la Luna:

$$0,0027 \text{ m/s}^2$$

Cálculo vectorial

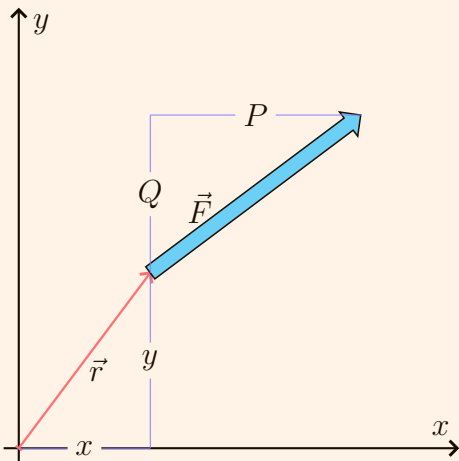


Cálculo vectorial



fuerza: $\vec{F} = (P, Q, R)$

Cálculo vectorial

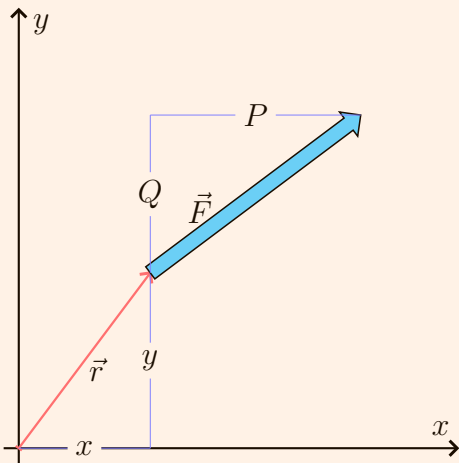


fuerza: $\vec{F} = (P, Q, R)$

Suma de fuerzas:

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 + \vec{F}_2 &= \\ &= (P_1 + P_2, Q_1 + Q_2, R_1 + R_2)\end{aligned}$$

Cálculo vectorial



fuerza: $\vec{F} = (P, Q, R)$

distancia o posición: $\vec{r} = (x, y, z)$

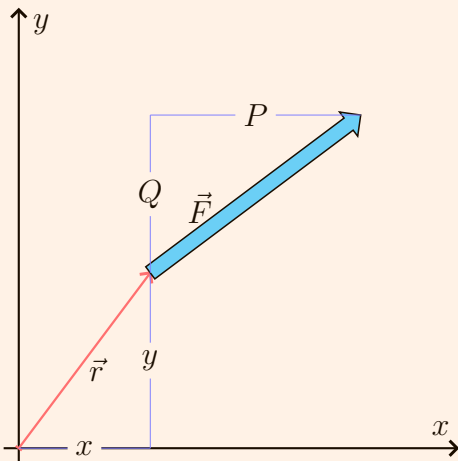
Suma de fuerzas:

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 + \vec{F}_2 &= \\ &= (P_1 + P_2, Q_1 + Q_2, R_1 + R_2)\end{aligned}$$

Suma de distancias:

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Cálculo vectorial



fuerza: $\vec{F} = (P, Q, R)$

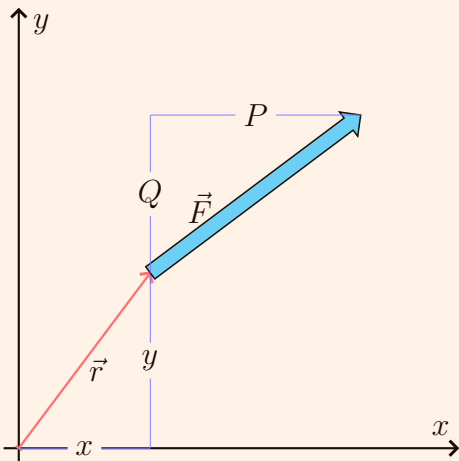
distancia o posición: $\vec{r} = (x, y, z)$

Producto escalar:

$$\text{trabajo} = \vec{F} \cdot \vec{r}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{r} = Fr \cos \alpha = Px + Qy + Rz$$

Cálculo vectorial



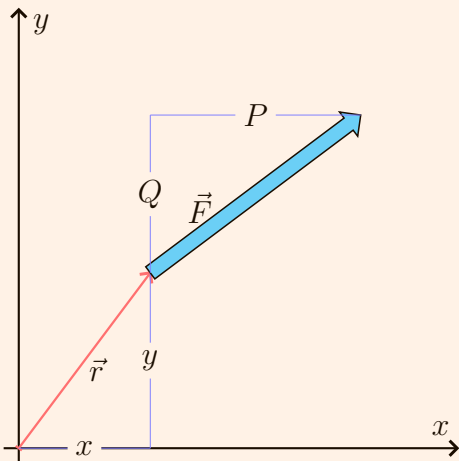
fuerza: $\vec{F} = (P, Q, R)$

distancia o posición: $\vec{r} = (x, y, z)$

Producto vectorial (momento o par de una fuerza):

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{F} \times \vec{r} = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P & Q & R \\ x & y & z \end{vmatrix} = \\ &= M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}\end{aligned}$$

Cálculo vectorial



fuerza: $\vec{F} = (P, Q, R)$

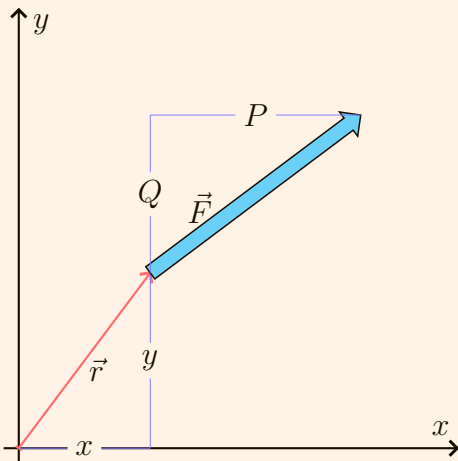
distancia o posición: $\vec{r} = (x, y, z)$

Producto vectorial:

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$$

$$\begin{aligned} M &= Fr \sin \alpha = \\ &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \end{aligned}$$

Cálculo vectorial



fuerza: $\vec{F} = (P, Q, R)$

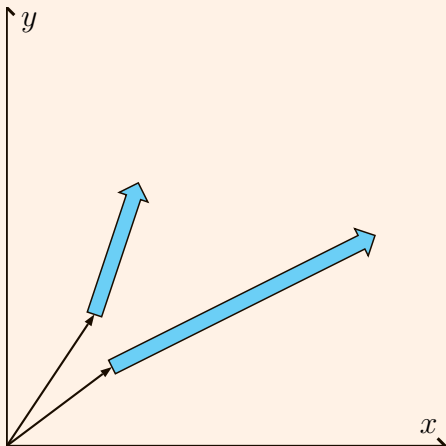
distancia o posición: $\vec{r} = (x, y, z)$

Producto vectorial en el plano xy ($R=z=0$):

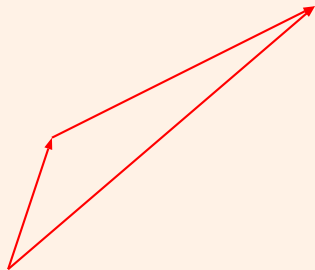
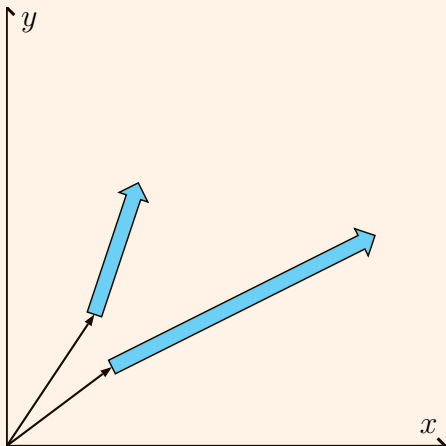
$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$$

$$M = M_z = Fr \sin \alpha = Py - Qx$$

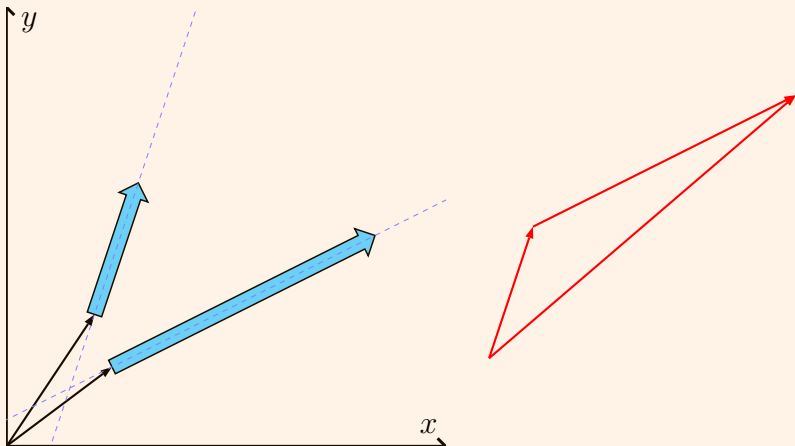
Cálculo gráfico



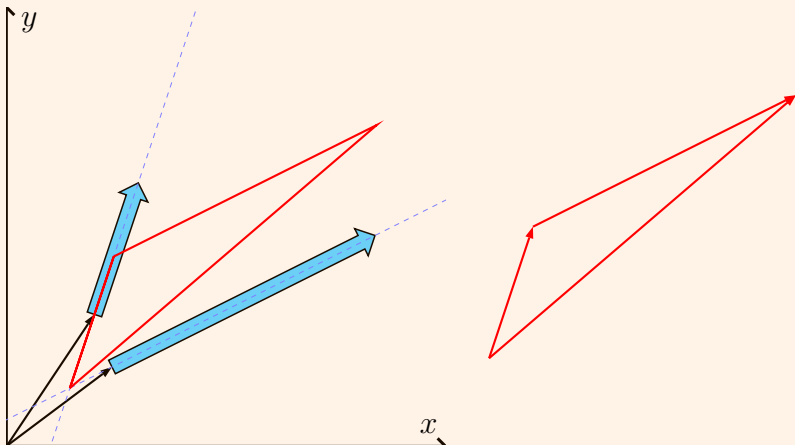
Cálculo gráfico



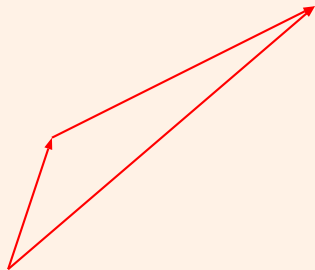
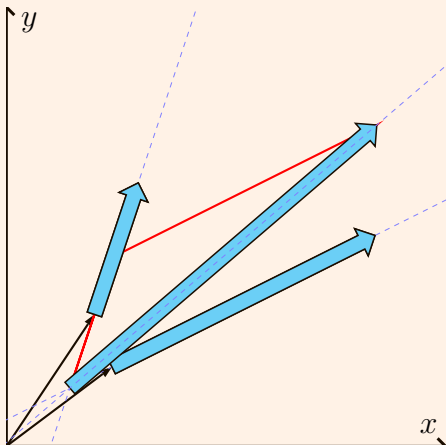
Cálculo gráfico



Cálculo gráfico



Cálculo gráfico



Ecuaciones de equilibrio del sólido indeformable

- Desplazamiento (u, v) nulo (leyes de Newton, principio de Arquímedes, etc):

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

Ecuaciones de equilibrio del sólido indeformable

- Desplazamiento (u, v) nulo (leyes de Newton, principio de Arquímedes, etc):

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

En coordenadas cartesianas:

$$\sum_i P_i = 0 \quad \sum_i Q_i = 0 \quad \sum_i R_i = 0$$

Puesto que para Newton, el cuerpo se asimila a un punto sin dimensiones, todas las fuerzas ejercidas están aplicadas en el mismo punto: basta que su suma sea nula, para que no haya fuerza neta o resultante.

Ecuaciones de equilibrio del sólido indeformable

- Desplazamiento (u, v) nulo (leyes de Newton, principio de Arquímedes, etc):

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

- Giro θ nulo (segunda ley de Euler, ley de la palanca, etc):

$$\sum_i \vec{F}_i \times \vec{r}_i = \vec{0}$$

Esta ecuación es necesaria para cuerpos no reducidos a puntos: con la simple suma de fuerzas se pierde la información sobre la posición de las mismas en el volumen del cuerpo, información que se recupera ahora, con \vec{r}_i .

Ecuaciones de equilibrio del sólido indeformable

- Desplazamiento (u, v) nulo (leyes de Newton, principio de Arquímedes, etc):

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

- Giro θ nulo (segunda ley de Euler, ley de la palanca, etc):

$$\sum_i \vec{F}_i \times \vec{r}_i = \vec{0}$$

En coordenadas cartesianas 2D:

$$\sum_i (P_i y_i - Q_i x_i) = 0$$

En coordenadas cartesianas 3D:

$$\sum_i (Q_i z_i - R_i y_i) = 0 \quad \sum_i (R_i x_i - P_i z_i) = 0 \quad \sum_i (P_i y_i - Q_i x_i) = 0$$

Ecuaciones de equilibrio del sólido indeformable

- Desplazamiento (u, v) nulo (leyes de Newton, principio de Arquímedes, etc):

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

- Giro θ nulo (segunda ley de Euler, ley de la palanca, etc):

$$\sum_i \vec{F}_i \times \vec{r}_i = \vec{0}$$

- Ecuaciones: 2 ecuaciones vectoriales, que resultan en 3 ecuaciones escalares en 2D (6 en 3D)

$$2D: \quad \sum_i P_i = 0 \quad \sum_i Q_i = 0 \quad \sum_i (P_i y_i - Q_i x_i) = 0$$

Ecuaciones de equilibrio del sólido indeformable

- Desplazamiento (u, v) nulo (leyes de Newton, principio de Arquímedes, etc):

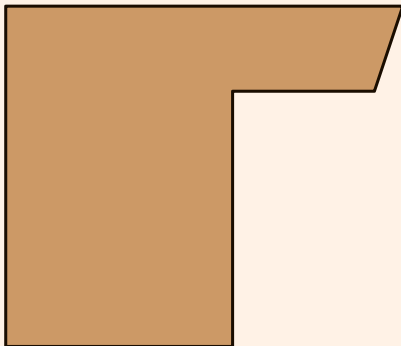
$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

- Giro θ nulo (segunda ley de Euler, ley de la palanca, etc):

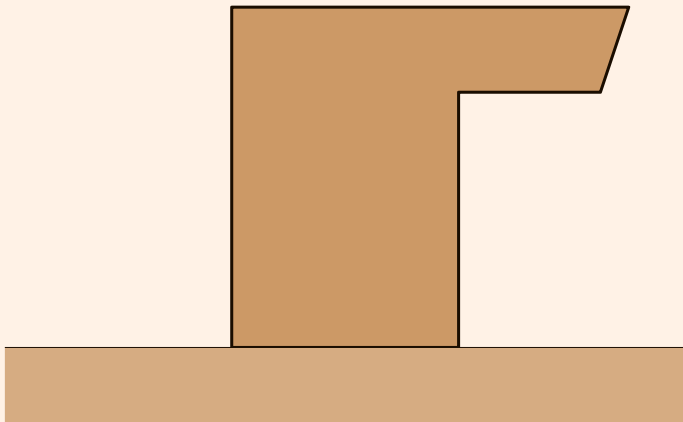
$$\sum_i \vec{F}_i \times \vec{r}_i = \vec{0}$$

- Ecuaciones: 2 ecuaciones vectoriales, que resultan en 3 ecuaciones escalares en 2D (6 en 3D)
- La ausencia de movimiento se mide respecto a la **sustentación** en el caso de estructuras, generalmente el suelo en que se apoyan.

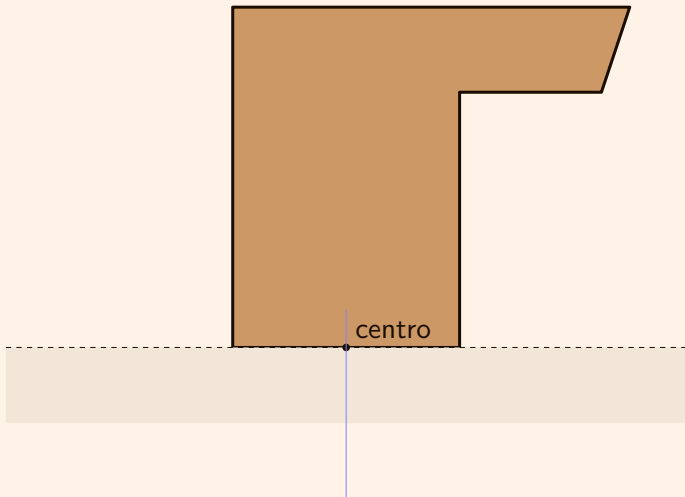
Apoyos reales



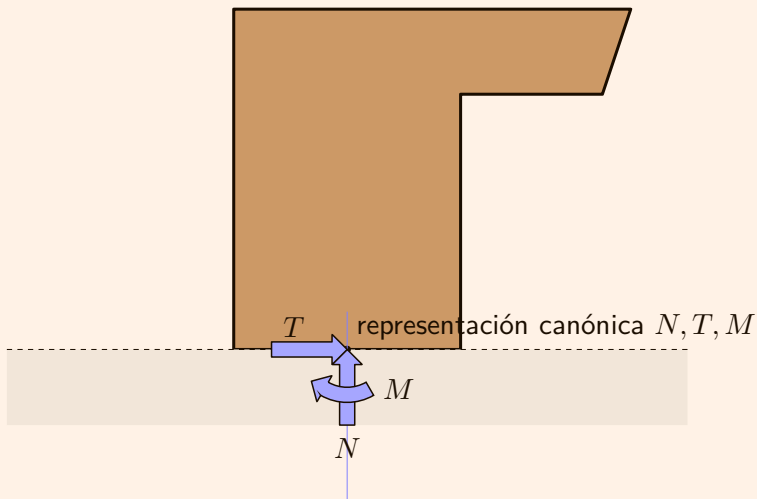
Apoyos reales



Apoyos reales



Apoyos reales



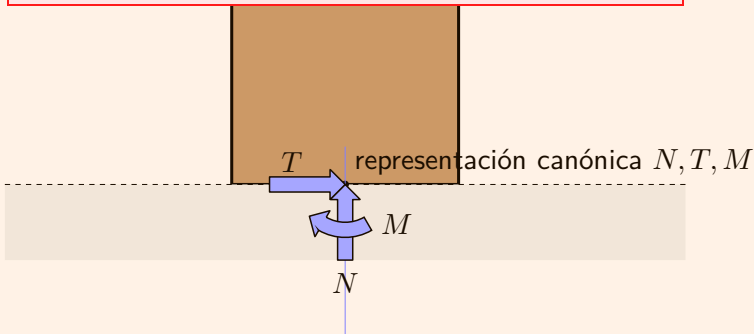
Apoyos reales

N : reacción normal a la superficie de contacto

T : reacción tangencial

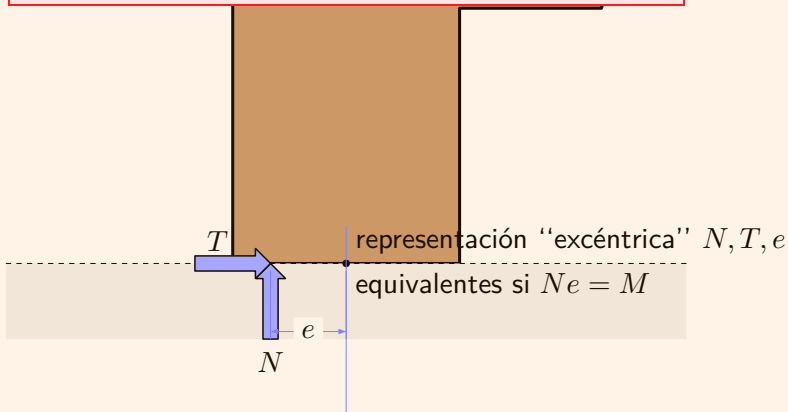
M : momento o par

M, N, T : vectores aplicados en el punto de referencia (por ejemplo, el centro geométrico de la superficie de contacto)

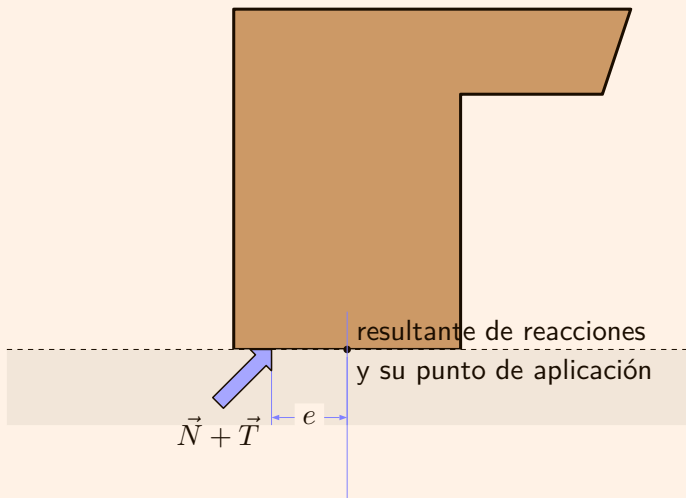


Apoyos reales

e : excentricidad del punto de aplicación de N, T (posición de ese punto) respecto al punto de referencia (v.g., centro geométrico) de la superficie de contacto

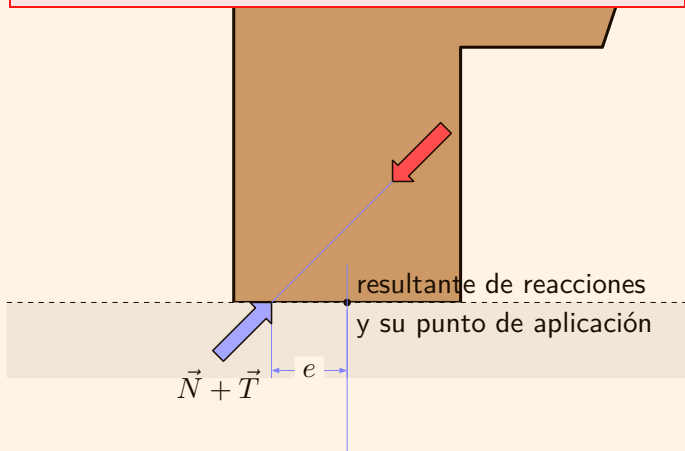


Apoyos reales



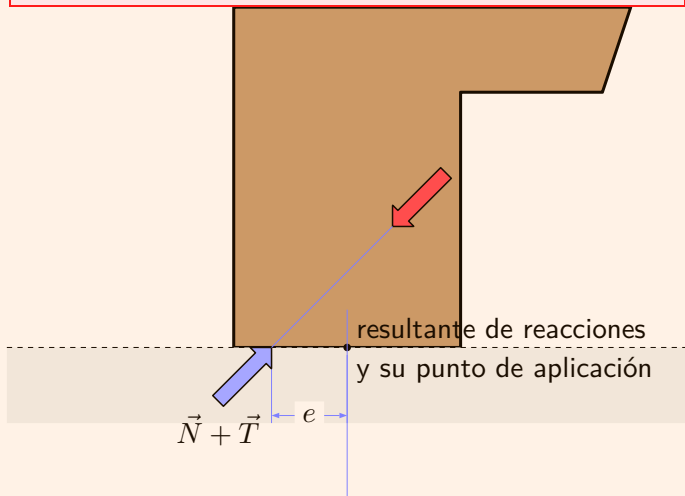
Apoyos reales

Las acciones (o su resultante) son conocidas. Las reacciones (o su resultante) se determinan con la condición de que exista equilibrio.



Apoyos reales

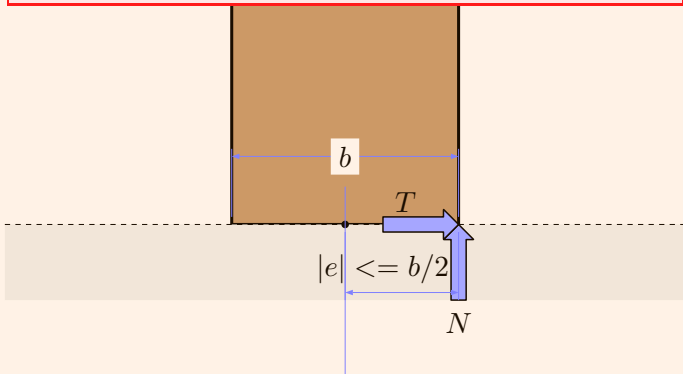
Las sustentaciones reales no son indeformables ni infinitamente resistentes.



Apoyos reales

Las sustentaciones reales no son indeformables ni infinitamente resistentes.

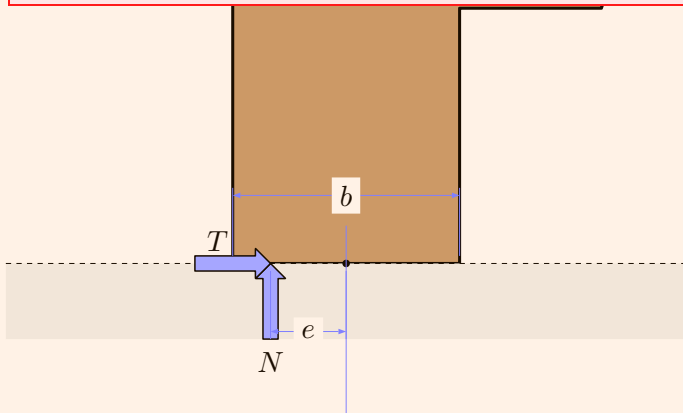
- La excentricidad no puede ser tal que N se aplique **fuera** del área de contacto. Más allá del límite se produce el **vuelco**.



Apoyos reales

Las sustentaciones reales no son indeformables ni infinitamente resistentes.

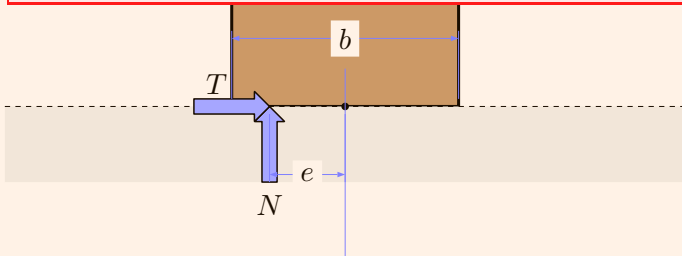
- En apoyos por simple contacto, N no puede ser negativo: el cuerpo **ascendería**.



Apoyos reales

Las sustentaciones reales no son indeformables ni infinitamente resistentes.

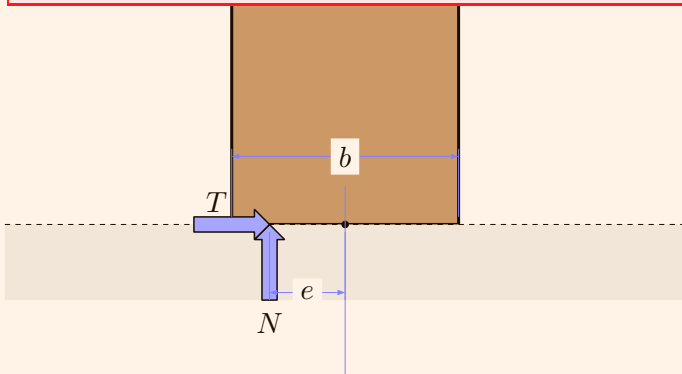
- N no puede superar la resistencia del suelo, dada por la **presión de hundimiento** multiplicada por el área de contacto que sea cobaricéntrica con su punto de aplicación (de ancho $2 \times \left(\frac{b}{2} - e\right)$ en la figura). En otro caso, el cuerpo se **hundiría**.



Apoyos reales

Las sustentaciones reales no son indeformables ni infinitamente resistentes.

- En apoyos por simple contacto, $|T|$ no puede ser mayor que la máxima fuerza de rozamiento, dada por $N\mu$: el cuerpo **deslizaría**.



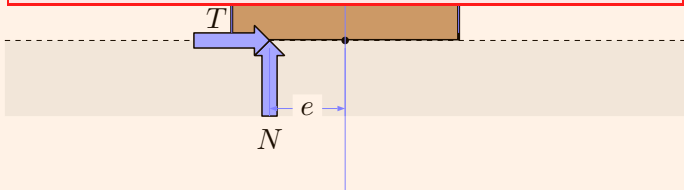
Apoyos reales

Las sustentaciones reales no son indeformables ni infinitamente resistentes.

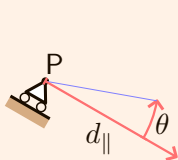
Si los valores de M, N, T necesarios para equilibrar las acciones no superan tales límites el equilibrio es posible, pero en el límite sería **inestable**.

El **requisito de estabilidad** exige un **margen de seguridad**. El coeficiente de seguridad se define como:

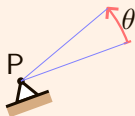
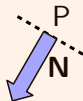
$$\gamma = \frac{\text{valor límite}}{\text{valor de equilibrio}}$$



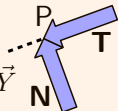
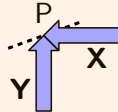
Vínculos teóricos



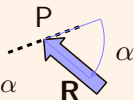
Apoyo (deslizante, simple)



Articulación



$$\vec{N} + \vec{T} = \vec{X} + \vec{Y}$$

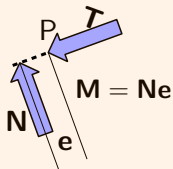
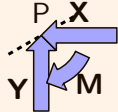


$$\vec{N} + \vec{T} = \vec{R}; \quad \mathbf{T} = \mathbf{R} \cos \alpha; \quad \mathbf{N} = \mathbf{R} \sin \alpha$$

¡La sustentación ahora es indeformable e irrompible!



Empotramiento



Sustentación isostática y otras

En 2D hay tres ecuaciones de equilibrio.

Si la sustentación está definida por tres parámetros (por ejemplo, M, N, T o N_1, N_2, T), las reacciones pueden determinarse con las ecuaciones en función de las acciones: la **sustentación es isostática**.

Si hay menos de tres parámetros, la sustentación es **hipostática**: existirán combinaciones de acciones que **no pueden equilibrarse**.

Si hay más de tres, las reacciones **no pueden determinarse** con las ecuaciones: hay que usar condiciones de deformación adicionales o **diseñar** el valor del número de reacciones que exceden de tres: **sustentación hiperestática**

Pro memoria: **Una mesa con dos patas, vuelca; una con cuatro, casi siempre cojea; una con tres, nunca cojea. . . ¡pero puede ser inestable! (como la de cuatro)**

Acciones

Las acciones pueden clasificarse por su naturaleza:

- **gravitatorias**: pesos, empujes de materiales granulares (el suelo) o de líquidos en reposo, . . . Pesos por unidad de volumen, de superficie o de longitud.
- **impacto de fluidos**: acción eólica (la del viento), el roción en zonas costeras (aire con agua en suspensión). Son acciones dinámicas (lo que cuenta es la energía) pero admiten una representación con fuerzas (estática); fuerza por unidad de superficie
- **acción sísmica**: terremotos; admite en España una representación estática (masa por aceleración).
- . . .

Acciones

Por su variación:

- **permanentes:** peso de la estructura y de otros elementos permanentes, . . .
- **variables:** sobrecarga de uso (la gente entra o sale); el viento puede soplar desde cualquier dirección, el peso de la nieve, . . .

Acciones

Por su papel en el equilibrio, *en cada hipótesis de carga considerada*:

- **favorables**: si aumentan, las reacciones de equilibrio se alejan de sus valores límite
- **desfavorables**: si aumentan, las reacciones de equilibrio se acercan a sus valores límite

La **evaluación de la seguridad** de cualquier situación límite (vuelco, deslizamiento, etc) requiere emplear los valores máximos de las acciones desfavorables y los mínimos de las favorables.

Estructuras I
Sólido indeformable

Mariano Vázquez Espí

GIAU+S (UPM)

Grupo de Investigación en Arquitectura, Urbanismo y Sostenibilidad

Universidad Politécnica de Madrid

<http://habitat.aq.upm.es/gi>

Edición del 7 de febrero de 2020

compuesto con *free software*:

GNULinux/L^AT_EX/dvips/ps2pdf

Copyright © Vázquez Espí, 2020