Sólido deformable: un método universal

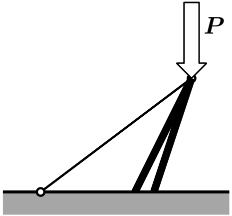
Mariano Vázquez Espí

Madrid, 16 de marzo de 2017.

Claude Louis Marie Henri Navier (1785–1836) —Físico e ingeniero

Hacia 1820 planteó por primera vez —que se sepa— un método universal para la resolución de estructuras hiperestáticas de cables y codales.

Sin embargo, es más conocido por la ecuación de Navier-Stokes de la mecánica de fluidos —aunque las malas lenguas dicen que la planteó por que no tenía ni idea de cómo representar fricciones en un fluido. Entre los físicos, se suele bromear con que la primera pregunta que harán a Dios cuando lleguen al paraiso es como demonios se resuelve. . .

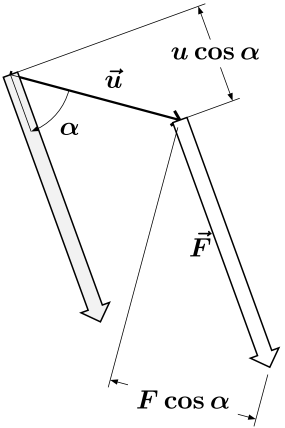


Energía, energía potencial, energía útil, ‘exergía’,. . .

- $\varepsilon\nu\epsilon\rho\gamma\varepsilon\iota\alpha$ grecolatina: el trabajo o esfuerzo, $\mathcal{T}$, que cuesta producir un cambio («hacer algo»). **¡Se gasta!**
- **energía potencial** escolástica, $\mathcal{P}$: como la grecolatina, pero se empieza a poder medir midiendo el trabajo realizado. EULER supuso que los sistemas físicos *tienden* hacia estados de equilibrio en los que la energía potencial es *mínima*.
- **energía**, $\mathcal{E}$, a partir del XIX: un potencial conservativo de cualquier sistema físico; puede intercambiarse entre sistemas (‘se transforma’, cf. CLAUSIUS *et alii*). **¡No se gasta: se conserva!**
- **energía útil** $\mathcal{X}$ (o **exergía** a partir del XX): aquella parte de la energía $\mathcal{E}$ de un sistema que, como máximo, puede aprovecharse para realizar trabajo $\mathcal{T}$ —el resto se transforma en calor $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{E} = \mathcal{X} + \mathcal{Q} \qquad \boxed{\mathcal{T} \leq \mathcal{X}} \qquad \mathcal{X} \approx \mathcal{P}$$

Energía, energía potencial, energía útil, 'exergía',. . .



$$W = \vec{F} \cdot \vec{u} = F u \cos \alpha$$

$$W = \sum_i F_i \cdot u_i$$

Si $\vec{F} \perp \vec{u}$, $W = 0$.

Si $\vec{F} || \vec{u}$, $W = F u$.

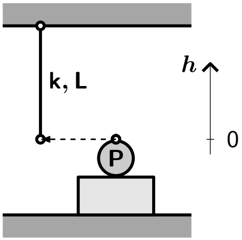
Energía, energía potencial, energía útil, 'exergía',...

- Energía potencial gravitatoria:

$$\mathcal{G} = mgh = \mathbf{P}h$$

  Cuanto más alto esté el peso, más $\mathcal{G}$ tiene.

- Exergía en la posición inicial: $\mathcal{X}_0 \approx 0$

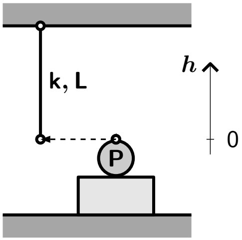


- Energía potencial de deformación $\mathcal{D}$:

  Cuanto más trabajo hagamos para deformar el muelle o el cable, más $\mathcal{D}$ almacena; en el periodo proporcional:

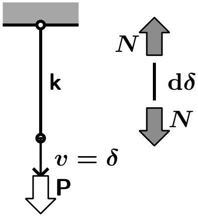
$$\mathrm{d}\mathcal{D} = N\,\mathrm{d}\delta = \mathsf{k}\cdot\delta\,\mathrm{d}\delta$$

  en donde **k** es la constante de Hooke.



- Para cualquier deformación compatible se cumplirá $v = \delta$. La energía potencial de deformación en el periodo proporcional será:

$$\mathcal{T} \approx \mathcal{D} = \int_0^\delta N\,\mathrm{d}\delta = \mathsf{k}\int_0^\delta \delta\,\mathrm{d}\delta = \mathsf{k}\cdot\frac{\delta^2}{2}$$



- La exergía total como función de v:

$$\mathcal{X} \approx \mathcal{G}(v) + \mathcal{D}(\delta) = -\mathsf{P}v + \mathsf{k}v^2/2$$

Energía, energía potencial, energía útil, 'exergía',. . .

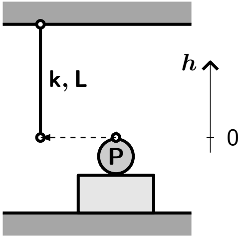
- La exergía total como función de v:

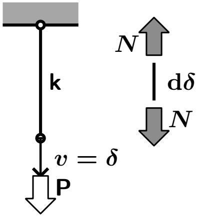
$$\mathcal{X} \approx \mathcal{G}(v) + \mathcal{D}(\delta) = -\mathsf{P}v + \mathsf{k}v^2/2$$

- La segunda ley de la termodinámica asegura que en el equilibrio la exergía total será mínima:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}v} = -\mathsf{P} + \mathsf{k}v = 0$$

es decir: $\boxed{v = \delta = \dfrac{\mathsf{P}}{\mathsf{k}}}$ y $\boxed{N = \mathsf{k}\delta = \mathsf{P}}$





Energía, energía potencial, energía útil, 'exergía',. . .

- La exergía total como función de v:

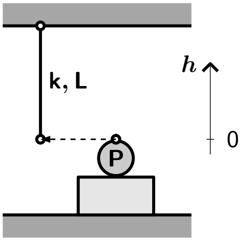
$$\mathcal{X} \approx \mathcal{G}(v) + \mathcal{D}(\delta) = -\mathsf{P}v + \mathsf{k}v^2/2$$

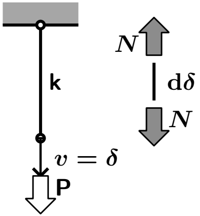
- Otra posibilidad es el calculo de variaciones (EULER) en torno a la posición de equilibrio:

$$\mathrm{d}\mathcal{X} = 0$$

$$-\mathsf{P}\,\mathrm{d}v + \mathsf{k}v\,\mathrm{d}v = 0$$

$$\mathsf{P} = \mathsf{k}v = \mathsf{k}\delta = N$$





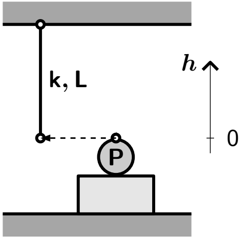
Energía, energía potencial, energía útil, ‘exergía’,. . .

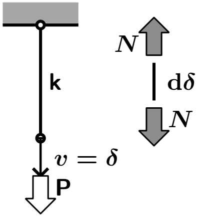
- $\mathrm{d}v$ (o $\mathrm{d}\delta$) es una variación infinitesimal de v y, en mecánica, se le denomina también *desplazamiento virtual*. Para simplificar se simboliza con $v^\star$, $\tilde{v}$, etc. Al método que emplea movimientos virtuales, *trabajos virtuales*. La ecuación:

$$P\,\mathrm{d}v = N\,\mathrm{d}\delta$$

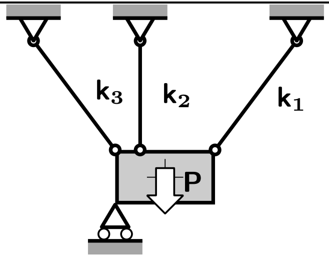
se escribe habitualmente:

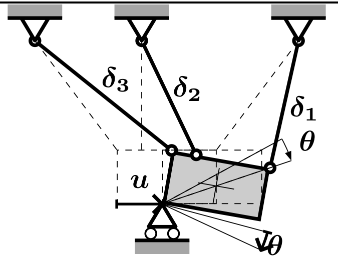
$$\mathrm{d}W_{ext} = \mathrm{d}W_{int} \qquad \text{ó} \qquad W^\star_{ext} = W^\star_{int}$$





Grados de libertad, compatibilidad y equilibrio



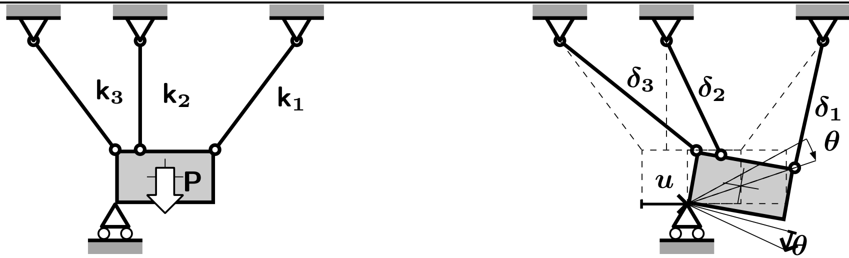


- Grados de libertad ($g = 2$): $[g^T] = [u, \theta]$

  Los grados de libertad pueden elegirse, pero suele convenir:

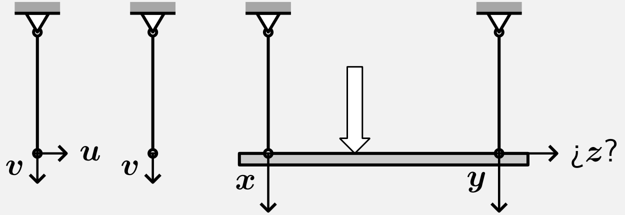
  - Incluir los movimientos de apoyos simples.
  - Los dos movimientos, u y v, de nodos en los que confluyen cables o barras.
  - En los sólidos indeformables, de ser posible, aquellos que permiten eliminar esfuerzos en la ecuación correspondiente.

Grados de libertad, compatibilidad y equilibrio

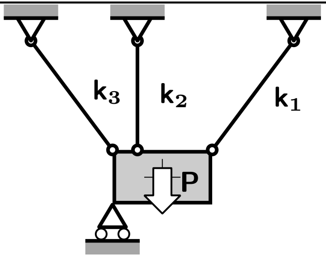


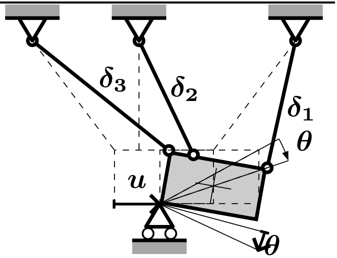
- Grados de libertad ($g = 2$): $[g^T] = [u, \theta]$

  A veces basta con los grados relevantes:



Grados de libertad, compatibilidad y equilibrio

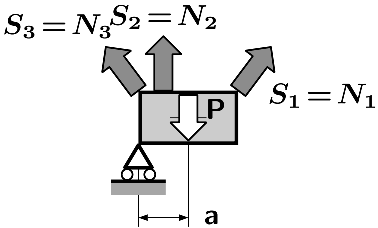


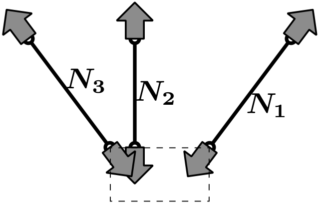


- Grados de libertad ($g = 2$): $[\mathrm{g}^{\mathbf{T}}] = [u, \theta]$
- modos de deformación ($d = 3$): $[\mathrm{b}^{\mathbf{T}}] = [\delta_1, \delta_2, \delta_3]$
- cada grado y cada modo deben ser **independientes** del resto
- d ecuaciones de compatibilidad:

$$\delta_j \approx \sum_{i=1}^{g} B_{ji} g_i \quad j = 1, \ldots, d \quad \text{o bien} \quad \overset{d\times 1}{[\mathrm{b}]} \approx \overset{d\times g}{[\mathrm{B}]} \cdot \overset{g\times 1}{[\mathrm{g}]}$$

Grados de libertad, compatibilidad y equilibrio





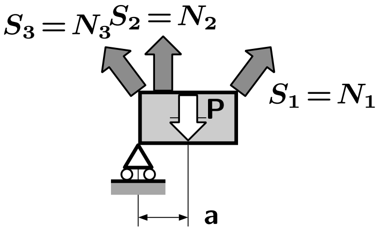
- A cada gdl g_i le corresponderá una componente de acción, a_i: $[\mathrm{a}^{\mathrm{T}}] = [0, \mathsf{Pa}]$.

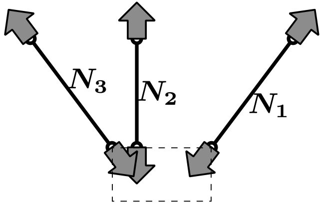
  Cada componente de acción se expresa como la resultante de fuerza (o momento) de todas las cargas en la dirección de **su** grado de libertad, g_i.

- A cada deformación δ_j le corresponderá un esfuerzo e_j: $[\mathrm{e}^{\mathrm{T}}] = [N_1, N_2, N_3]$

- g ecuaciones de equilibrio: $\boxed{a_i + \sum_{j=1}^{d} H_{ij} S_j = 0 \qquad i = 1, \ldots, g}$

Grados de libertad, compatibilidad y equilibrio





- g ecuaciones de equilibrio: $\boxed{a_i + \sum_{j=1}^{d} H_{ij} S_j = 0 \qquad i = 1,\ldots,g}$

(y como $\vec{S} = -\vec{N}$) $\Rightarrow \quad a_i = -\sum_j H_{ij} S_j = \sum_j H_{ij} N_j$

Es decir: $\boxed{\overset{g\times 1}{[\mathrm{a}]} \approx \overset{g\times d}{[\mathrm{H}]} \cdot \overset{d\times 1}{[\mathrm{e}]}}$

Grados de libertad, compatibilidad y equilibrio

La condición de exergía mínima para una deformación virtual $\mathrm{d}\boldsymbol{g_i}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{b_j}$:

$$\boldsymbol{W^\star_{ext}} = \sum_{i=1}^{g} \mathrm{d}\boldsymbol{g_i}\,\boldsymbol{a_i} = \boldsymbol{W^\star_{int}} = \sum_{j=1}^{d} \mathrm{d}\boldsymbol{b_j}\,\boldsymbol{e_j}$$

o como producto de matrices:

$$\boldsymbol{W^\star_{ext}} = \overset{1\times g}{[\,\mathrm{dg}^{\mathrm{T}}]} \cdot \overset{g\times 1}{[\mathrm{a}]} = \boldsymbol{W^\star_{int}} = \overset{1\times d}{[\,\mathrm{db}^{\mathrm{T}}]} \cdot \overset{d\times 1}{[\mathrm{e}]}$$

Grados de libertad, compatibilidad y equilibrio

La condición de exergía mínima es:

$$\boldsymbol{W}^{\star}_{ext} = [\overset{1\times g}{\mathrm{dg}}{}^{\mathrm{T}}] \cdot \overset{g\times 1}{[\mathrm{a}]} = \boldsymbol{W}^{\star}_{int} = [\overset{1\times d}{\mathrm{db}}{}^{\mathrm{T}}] \cdot \overset{d\times 1}{[\mathrm{e}]}$$

En el ejemplo:

$$\left\{ \begin{array}{cc} \mathrm{d}\boldsymbol{u} & \mathrm{d}\boldsymbol{\theta} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathsf{Pa} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{d}\boldsymbol{\delta}_1 & \mathrm{d}\boldsymbol{\delta}_2 & \mathrm{d}\boldsymbol{\delta}_3 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{N}_1 \\ \boldsymbol{N}_2 \\ \boldsymbol{N}_3 \end{array} \right\}$$

es decir

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\theta} \cdot \mathsf{Pa} = \mathrm{d}\boldsymbol{\delta}_1 \cdot \boldsymbol{N}_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{\delta}_2 \cdot \boldsymbol{N}_2 + \mathrm{d}\boldsymbol{\delta}_3 \cdot \boldsymbol{N}_3$$

Grados de libertad, compatibilidad y equilibrio

La condición de exergía mínima es:

$$\boldsymbol{W}^{\star}_{ext} = [\overset{1\times g}{\mathbf{dg}^{\mathbf{T}}}] \cdot \overset{g\times 1}{[\mathbf{a}]} = \boldsymbol{W}^{\star}_{int} = [\overset{1\times d}{\mathbf{db}^{\mathbf{T}}}] \cdot \overset{d\times 1}{[\mathbf{e}]}$$

La deformación virtual $[\,\mathbf{dg}\,], [\,\mathbf{db}\,]$ cumple, como cualquier otra, con la ecuación de compatibilidad:

$$[\,\mathbf{db}\,] \approx [\mathbf{B}][\,\mathbf{dg}\,] \qquad [\,\mathbf{db}^{\mathbf{T}}] \approx [\,\mathbf{dg}^{\mathbf{T}}][\mathbf{B}^{\mathbf{T}}]$$

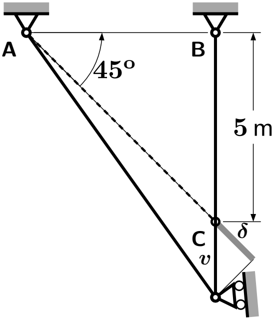
y por tanto:

$$[\overset{1\times g}{\mathbf{dg}^{\mathbf{T}}}] \cdot \overset{g\times 1}{[\mathbf{a}]} \approx [\overset{1\times g}{\mathbf{dg}^{\mathbf{T}}}]\overset{g\times d}{[\mathbf{B}^{\mathbf{T}}]} \cdot \overset{d\times 1}{[\mathbf{e}]} \quad \text{es decir,} \quad \overset{g\times 1}{[\mathbf{a}]} \approx \overset{g\times d}{[\mathbf{B}^{\mathbf{T}}]} \cdot \overset{d\times 1}{[\mathbf{e}]}$$

Comparando con las ecuaciones de equilibrio, $\overset{g\times 1}{[\mathbf{a}]} \approx \overset{g\times d}{[\mathbf{H}]} \cdot \overset{d\times 1}{[\mathbf{e}]}$:

$$\boxed{[\mathbf{H}] = [\mathbf{B}^{\mathbf{T}}] \ \text{ó}\ [\mathbf{H}^{\mathbf{T}}] = [\mathbf{B}]}$$

Dos cables y un peso que desciende



Grados de libertad: $v_{\mathbf{C}}$ ($g = 1$).
Modos de deformación: $\delta_{\mathbf{AC}}$ y $\delta_{\mathbf{BC}}$ ($d = 2$).
$g < d \Rightarrow$ análisis hiperestático.

Equilibrio:

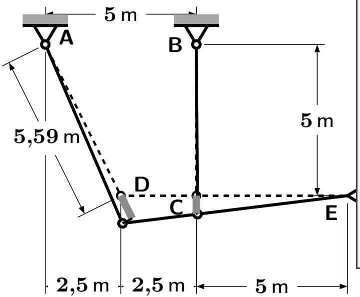
$$P = N_{\mathbf{AC}} \sin(45^{\circ}) + N_{\mathbf{BC}}$$

Compatibilidad:

$$\delta_{\mathbf{AC}} = v_{\mathbf{C}} \sin(45^{\circ})$$

$$\delta_{\mathbf{BC}} = v_{\mathbf{C}}$$

Dos cables y una tabla que gira



Grados de libertad: $\boldsymbol{\theta_{\mathbf{E}}}$ ($\boldsymbol{g = 1}$).
Modos de deformación: $\boldsymbol{\delta_{\mathbf{AD}}}$ y $\boldsymbol{\delta_{\mathbf{BC}}}$ ($\boldsymbol{d = 2}$).
$\boldsymbol{g < d} \Rightarrow$ análisis hiperestático.

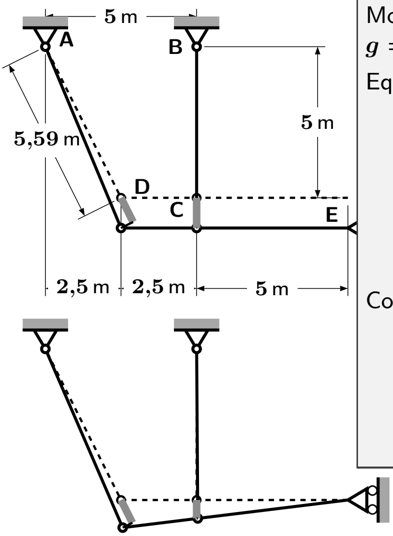
Equilibrio:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{5}\,\mathrm{m} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{6,71}\,\mathrm{m} & \mathbf{5}\,\mathrm{m} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{N_{\mathbf{AD}}} \\ \boldsymbol{N_{\mathbf{BC}}} \end{array}\right]$$

Compatibilidad:

$$\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\delta_{\mathbf{AD}}} \\ \boldsymbol{\delta_{\mathbf{BC}}} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{6,71}\,\mathrm{m} \\ \mathbf{5}\,\mathrm{m} \end{array}\right] \cdot \boldsymbol{\theta_{\mathbf{E}}}$$

Dos cables y una tabla que gira y desciende



Grados de libertad: $v_{\mathbf{E}}, \theta_{\mathbf{E}}$ $(g = 2)$.
Modos de deformación: $\delta_{\mathbf{AD}}$ y $\delta_{\mathbf{BC}}$ $(d = 2)$.
$g = d \Rightarrow$ análisis iso- o hiper-estático.

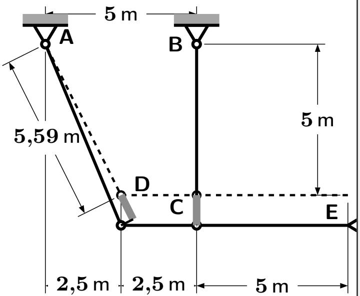
Equilibrio:

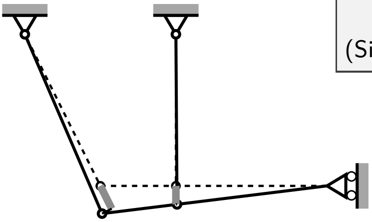
$$\begin{aligned} P &= N_{\mathbf{AD}} \cdot \frac{5}{5{,}59} + N_{\mathbf{BC}} \\ 5\,\mathrm{m} \cdot P &= N_{\mathbf{AD}} \cdot \frac{5}{5{,}59} \cdot 7{,}5\,\mathrm{m} + N_{\mathbf{BC}} \cdot 5\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Compatibilidad:

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{AD}} &= v_{\mathbf{E}} \cdot \frac{5}{5{,}59} + \theta_{\mathbf{E}} \cdot 7{,}5\,\mathrm{m} \cdot \frac{5}{5{,}59} \\ \delta_{\mathbf{BC}} &= v_{\mathbf{E}} + \theta_{\mathbf{E}} \cdot 5\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Dos cables y una tabla que gira y desciende





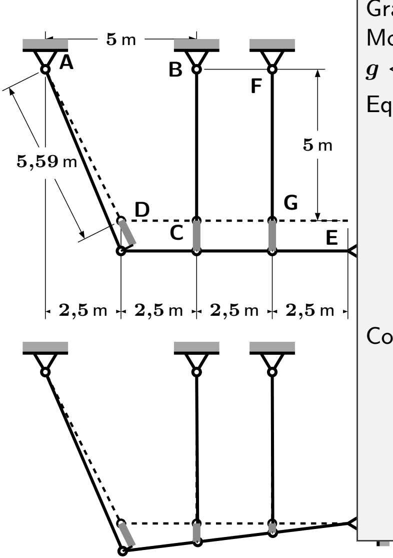
Grados de libertad: $v_{\mathbf{E}}, \theta_{\mathbf{E}}$ $(g = 2)$.
Modos de deformación: $\delta_{\mathbf{AD}}$ y $\delta_{\mathbf{BC}}$ $(d = 2)$.
$g = d \Rightarrow$ análisis iso- o hiper-estático.
En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} P \\ 5\,\mathrm{m}\cdot P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{5}{5{,}59} & 1 \\ \dfrac{5}{5{,}59}\cdot 7{,}5\,\mathrm{m} & 5\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_{\mathbf{AD}} \\ N_{\mathbf{BC}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{\mathbf{AD}} \\ \delta_{\mathbf{BC}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{5}{5{,}59} & \dfrac{5}{5{,}59}\cdot 7{,}5\,\mathrm{m} \\ 1 & 5\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{\mathbf{E}} \\ \theta_{\mathbf{E}} \end{bmatrix}$$

(Simplemente, se ve mejor la relación entre $[\mathbf{H}]$ y $[\mathbf{B}]$)

Tres cables y una tabla que gira y desciende



Grados de libertad: $v_{\mathbf{E}}, \theta_{\mathbf{E}}$ ($g = 2$).
Modos de deformación: $\delta_{\mathbf{AD}}$, $\delta_{\mathbf{BC}}$ y $\delta_{\mathbf{FG}}$ ($d = 3$).
$g < d \Rightarrow$ análisis hiperestático.

Equilibrio:

$$\begin{aligned} P &= N_{\mathbf{AD}} \cdot \frac{5}{5{,}59} + N_{\mathbf{BC}} + N_{\mathbf{FG}} \\ 5\,\mathrm{m} \cdot P &= N_{\mathbf{AD}} \frac{5}{5{,}59} \cdot 7{,}5\,\mathrm{m} + N_{\mathbf{BC}} \cdot 5\,\mathrm{m} + \\ &\quad + N_{\mathbf{FG}} \cdot 2{,}5\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Compatibilidad:

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{AD}} &= v \cdot \frac{5}{5{,}59} + \theta \cdot 7{,}5\,\mathrm{m} \cdot \frac{5}{5{,}59} \\ \delta_{\mathbf{BC}} &= v + \theta \cdot 5\,\mathrm{m} \\ \delta_{\mathbf{FG}} &= v + \theta \cdot 2{,}5\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Un método universal

La solución 'universal' para cualesquiera g y $d \geq g$ pasa por especificar el comportamiento de cada cable. **Por ejemplo, en el periodo proporcional**:

$$e_j = \mathsf{k}_j \delta_j \quad (j = 1, \ldots, d) \quad \text{o bien} \quad \boxed{\overset{d\times 1}{[\mathrm{e}]} = \overset{d\times d}{[\mathbf{D_p}]} \cdot \overset{d\times 1}{[\mathrm{b}]}}$$

Ecuaciones que añadimos a las de equilibrio y compatibilidad:

$$\boxed{\overset{g\times 1}{[\mathbf{a}]} \approx \overset{g\times d}{[\mathbf{H}]} \cdot \overset{d\times 1}{[\mathbf{e}]}} \qquad \boxed{\overset{d\times 1}{[\mathbf{b}]} \approx \overset{d\times g}{[\mathbf{B}]} \cdot \overset{g\times 1}{[\mathbf{g}]}}$$

Contabilidad de ecuaciones e incógnitas para acciones dadas:

	ecuaciones	incógnitas	
equilibrio	g	d	esfuerzos
material	d	d	deformaciones
compatibilidad	d	g	movimientos
TOTAL	$2d + g$	$2d + g$	*That's ok!*

Un método universal

La solución 'universal' para cualesquiera g y $d \geq g$ pasa por especificar el comportamiento de cada cable. **Por ejemplo, en el periodo proporcional**:

$$e_j = \mathsf{k}_j \delta_j \quad (j = 1, \ldots, d) \quad \text{o bien} \quad \boxed{\overset{d\times 1}{[\mathrm{e}]} = \overset{d\times d}{[\mathrm{D_p}]} \cdot \overset{d\times 1}{[\mathrm{b}]}}$$

Ecuaciones que añadimos a las de equilibrio y compatibilidad:

$$\boxed{\overset{g\times 1}{[\mathrm{a}]} \approx \overset{g\times d}{[\mathrm{H}]} \cdot \overset{d\times 1}{[\mathrm{e}]}} \qquad \boxed{\overset{d\times 1}{[\mathrm{b}]} \approx \overset{d\times g}{[\mathrm{B}]} \cdot \overset{g\times 1}{[\mathrm{g}]}}$$

$$\boxed{\underline{\overset{g\times 1}{[\mathrm{a}]}}} \approx \overset{g\times d}{[\mathrm{H}]} \overset{d\times d}{[\mathrm{D_p}]} \overset{d\times 1}{[\mathrm{b}]} \approx \overset{g\times d}{[\mathrm{B^T}]} \overset{d\times d}{[\mathrm{D_p}]} \overset{d\times g}{[\mathrm{B}]} \cdot \overset{g\times 1}{[\mathrm{g}]} = \boxed{\underline{\overset{g\times g}{[\mathrm{K_p}]} \cdot \overset{g\times 1}{[\mathrm{g}]}}}$$

$[\mathrm{K_p}]$ se denomina **rigidez de la estructura** —con un papel análogo al de **k** en un cable, o **E** en un material.

Un método universal

La solución se expresa en función de la inversa de la rigidez (matriz de flexibilidad):

$$\overset{g\times 1}{[\mathbf{g}]} \approx \overset{g\times g}{[\mathbf{K_p}^{-1}]} \cdot \overset{g\times 1}{[\mathbf{a}]}$$

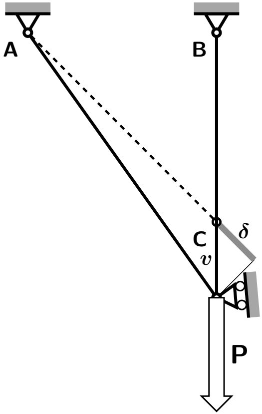
y

$$\overset{d\times 1}{[\mathbf{e}]} \approx \overset{d\times d}{[\mathbf{D_p}]}\overset{d\times g}{[\mathbf{B}]} \cdot \overset{g\times 1}{[\mathbf{g}]} = \overset{d\times d}{[\mathbf{D_p}]}\overset{d\times g}{[\mathbf{B}]} \cdot \overset{g\times g}{[\mathbf{K_p}^{-1}]} \cdot \overset{g\times 1}{[\mathbf{a}]}$$

Si existe una solución ($\left\|[\mathbf{K_p}]\right\| \neq \mathbf{0}$) debe cumplir con:

- deformaciones y movimientos pequeños
- proporcionalidad entre tensiones y deformaciones

Dos cables y un peso que desciende



Equilibrio:

$$P = N_{\mathbf{AC}} \sin(45^{\mathbf{o}}) + N_{\mathbf{BC}}$$

Compatibilidad:

$$\delta_{\mathbf{AC}} = v_{\mathbf{C}} \sin(45^{\mathbf{o}}) \qquad \delta_{\mathbf{BC}} = v_{\mathbf{C}}$$

Comportamiento proporcional:

$$N_{\mathbf{A}} = \mathsf{k}_{\mathbf{A}} \delta_{\mathbf{A}} \qquad N_{\mathbf{B}} = \mathsf{k}_{\mathbf{B}} \delta_{\mathbf{B}}$$

Sustituimos las de compatibilidad en estas últimas...

Comportamiento proporcional respecto a v:

$$N_{\mathbf{A}} = \mathsf{k}_{\mathbf{A}} \sin(45^{\mathbf{o}}) v_{\mathbf{C}} \qquad N_{\mathbf{B}} = \mathsf{k}_{\mathbf{B}} v_{\mathbf{C}}$$

Y ahora empleamos éstas en las de equilibrio...

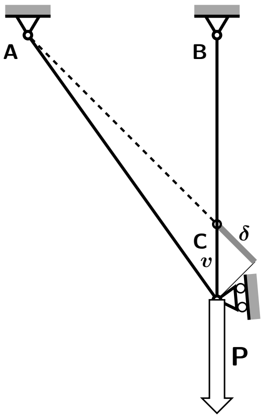
Equilibrio en función de $v_{\mathbf{C}}$:

$$P = (\mathsf{k}_{\mathbf{A}} \sin^2 45^{\mathbf{o}} + \mathsf{k}_{\mathbf{B}}) \cdot v_{\mathbf{C}}$$

Con esta ecuación se determina $v_{\mathbf{C}}$, y de las anteriores todo lo demás.

Esto mismo puede hacerse con matrices...

Dos cables y un peso que desciende



$$[\mathrm{B}] = \begin{bmatrix} 0,71 \\ 1 \end{bmatrix}$$

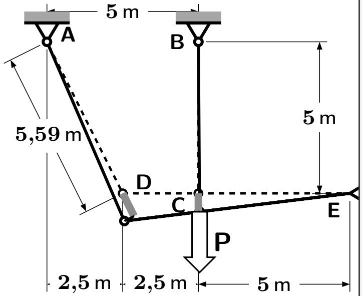
$$[\mathrm{D}] = \begin{bmatrix} \mathsf{k}_{\mathrm{A}} & \\ & \mathsf{k}_{\mathrm{B}} \end{bmatrix}$$

siendo $\mathsf{k} = \mathsf{E}A \div L$.
Con igual área y del mismo material:

$$[\mathrm{D}] = \begin{bmatrix} 0,71\mathsf{k}_{\mathrm{B}} & \\ & \mathsf{k}_{\mathrm{B}} \end{bmatrix}$$

$[\mathrm{K}] = 1,36\mathsf{k}_{\mathrm{B}}$; $[\mathrm{K}^{-1}] = 0,74 \div \mathsf{k}_{\mathrm{B}}$;
$[[\mathrm{D}][\mathrm{B}][\mathrm{K}^{-1}]^{\mathrm{T}}]\ \mathsf{P} = [0,37\ \ 0,74]\ \mathsf{P}$.

Dos cables y una tabla que gira



$$[\mathbf{H}]=[\mathbf{B^T}]=[\mathbf{6{,}71}\,\mathsf{m}\;\;\mathbf{5}\,\mathsf{m}]$$

Con $A_\mathbf{A} = A_\mathbf{B}$ y $\mathsf{E}_\mathbf{A} = \mathsf{E}_\mathbf{B}$:

$$[\mathbf{D}]=\begin{bmatrix} \mathbf{0,89k_B} & \\ & \mathbf{k_B} \end{bmatrix}$$

siendo $\mathbf{k} = \mathbf{E}A \div \mathbf{L}$.

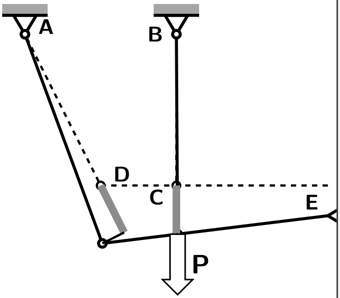
$[\mathbf{K}]=[\mathbf{B^T}][\mathbf{D}][\mathbf{B}]= \mathbf{65{,}3}\,\mathsf{m}^\mathbf{2} \cdot \mathbf{k_B}$

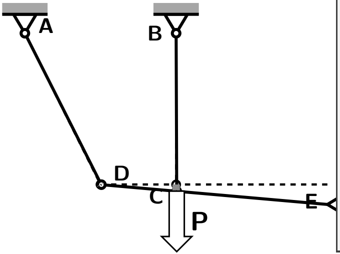
$[[\mathbf{D}][\mathbf{B}][\mathbf{K^{-1}}]^\mathbf{T}] =$

$$=[\mathbf{92{,}0}\,\mathsf{m}^{\mathbf{-1}}\;\;\mathbf{76{,}6}\,\mathsf{m}^{\mathbf{-1}}]\times\mathbf{10^{-3}}.$$

$[[\mathbf{D}][\mathbf{B}][\mathbf{K^{-1}}]^\mathbf{T}]\cdot\mathbf{5}\,\mathsf{m}\mathbf{P} = [\mathbf{0{,}46}\;\;\mathbf{0{,}38}]\cdot\mathbf{P}.$

Dos cables y una tabla que gira y desciende





$$[\mathbf{H}]=[\mathbf{B^T}]=\begin{bmatrix} \mathbf{0{,}89} & \mathbf{1} \\ \mathbf{6{,}71}\,\mathsf{m} & \mathbf{5}\,\mathsf{m} \end{bmatrix}$$

Con $A_\mathbf{A} = A_\mathbf{B}$ y $\mathsf{E}_\mathbf{A} = \mathsf{E}_\mathbf{B}$:

$$[\mathbf{D}]=\begin{bmatrix} \mathbf{0,89}\mathsf{k}_\mathbf{B} & \\ & \mathsf{k}_\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

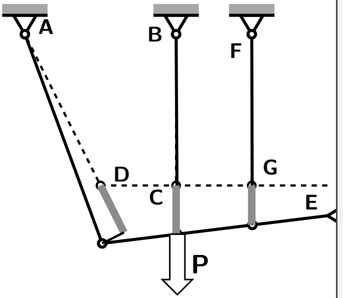
con $\mathsf{k} = \mathsf{E}A \div \mathsf{L}$.

$$[\mathbf{K}]=\begin{bmatrix} \mathbf{0{,}41} & \mathbf{2{,}45}\,\mathsf{m} \\ \mathbf{2{,}45}\,\mathsf{m} & \mathbf{15{,}25}\,\mathsf{m}^2 \end{bmatrix}\cdot\mathsf{k}_\mathbf{B}$$

$$[\mathbf{K^{-1}}]=\begin{bmatrix} \mathbf{61} & \mathbf{-9{,}8}\,\mathsf{m}^{-1} \\ \mathbf{-9{,}8}\,\mathsf{m}^{-1} & \mathbf{1{,}64}\,\mathsf{m}^{-2} \end{bmatrix}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\mathsf{k}_\mathbf{B}}$$

$$[\mathbf{1}\ \ \mathbf{5}\,\mathsf{m}]\cdot\mathsf{P}\cdot\,[[\mathbf{D}][\mathbf{B}][\mathbf{K^{-1}}]^{\mathbf{T}}]=\boxed{[\mathbf{0}\ \ \mathsf{P}]}$$

Tres cables y una tabla que gira y desciende



$$[\mathbf{H}]=[\mathbf{B^T}]=\begin{bmatrix} \mathbf{0{,}89} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{6{,}71}\,\mathsf{m} & \mathbf{5}\,\mathsf{m} & \mathbf{2{,}5}\,\mathsf{m} \end{bmatrix}$$

Con cables de igual grueso y material:

$$[\mathbf{D}]=\begin{bmatrix} \mathbf{0,89} & & \\ & \mathbf{1} & \\ & & \mathbf{1} \end{bmatrix}\cdot \mathsf{k}$$

con $\mathsf{k} = \mathsf{E}A \div \mathsf{L}$.

$$[\mathbf{K}]=\begin{bmatrix} \mathbf{2{,}72} & \mathbf{12{,}87}\,\mathsf{m} \\ \mathbf{12{,}87}\,\mathsf{m} & \mathbf{71{,}50}\,\mathsf{m}^2 \end{bmatrix}\cdot\mathsf{k}_\mathbf{B}$$

$$[\mathbf{1}\ \ \mathbf{5}\,\mathsf{m}]\cdot\mathsf{P}\cdot\left[[\mathbf{D}][\mathbf{B}][\mathbf{K^{-1}}]^{\mathbf{T}}\right]= [\mathbf{0{,}35}\ \ \mathbf{0{,}37}\ \ \mathbf{0{,}31}]\cdot\mathsf{P}$$

El cable BC tiene la máxima tensión, y el FG, la mínima.

Carga elástica, carga de rotura

Bajo la carga de servicio, el cable más cercano al límite elástico se reconoce por cumplir la condición:

$$\boldsymbol{\lambda}_e = \min_j \left(\frac{\mathbf{f}_e}{\boldsymbol{\sigma}} \right)_j$$

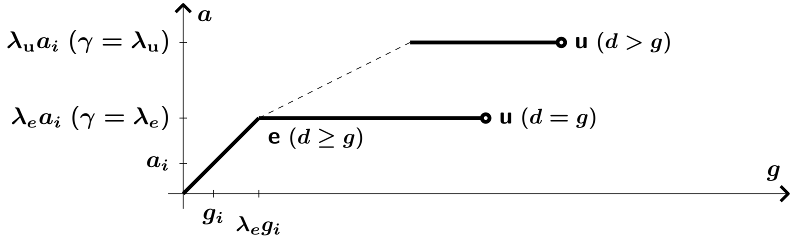
La carga elástica de la estructura se obtiene sin más que multiplicar por $\boldsymbol{\lambda}_e$ la carga de servicio:

$$[\mathbf{a_e}] = \boldsymbol{\lambda}_e \cdot [\mathbf{a}] \qquad (\ \mathbf{P}_e = \boldsymbol{\lambda}_e \mathbf{P}\ )$$

Para cargas mayores, se producirá la rotura si $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{d}$ (y $\boldsymbol{\lambda}_e$ es entonces el coeficiente de seguridad neto, γ). Durante la rotura, al menos un cable ha alcanzado su límite elástico, y $\boldsymbol{d} - \mathbf{1} = \boldsymbol{g} - \mathbf{1}$ podrían no haberlo hecho.

Si $\boldsymbol{g} < \boldsymbol{d}$ puede que el resto de la estructura soporte carga adicional. . .

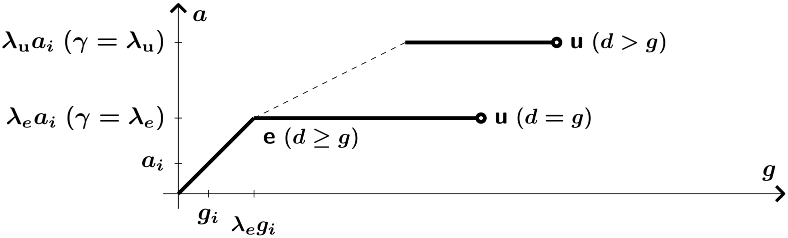
Carga elástica, carga de rotura



Rotura en estructuras dúctiles:

- aumentan los movimientos a **carga constante**
- por cada cable que plastifica se 'pierde' un modo de deformación de la estructura: aunque al principio $d > g$, al final $d \to g$

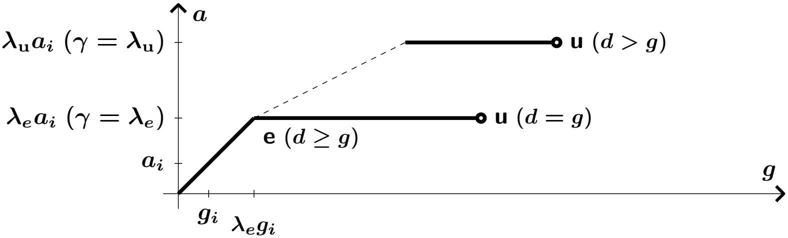
Carga elástica, carga de rotura



Rotura en estructuras dúctiles:

- comienza cuando alcanzan o superan el límite elástico al menos $d - g + 1$ cables de los d
- los cables en periodo plástico siguen resistiendo una tracción $N_{\mathbf{u}j} = (\mathsf{f}_\mathbf{u}\mathsf{A})_j$ mientras que $\varepsilon_j < (\varepsilon_\mathbf{u})_j$; por su parte, los cables en periodo proporcional **no** varían su deformación ni su tensión ni su esfuerzo: serán como mucho $g - 1$.

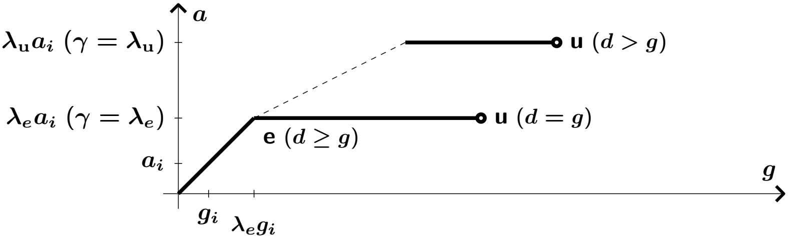
Carga elástica, carga de rotura



Rotura en estructuras dúctiles:

- En el **último** equilibrio,tenemos g ecuaciones de equilibrio, conocemos el esfuerzo de $d - g + 1$ cables que han alcanzado o superado su límite elástico, desconocemos $g - 1$ esfuerzos en los que podrían no haberlo alcanzado.
- También desconocemos la carga última —o el coeficiente de seguridad—: tenemos una incógnita adicional; en total tenemos g incógnitas: **el mismo número que ecuaciones**. Pero ¿qué cables han plastificado?

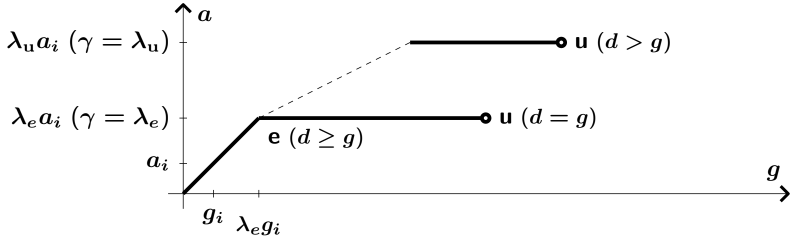
Carga elástica, carga de rotura



Rotura en estructuras dúctiles:

- Durante **el último movimiento a carga constante** (igual a la de rotura), los cables no plastificados mantienen constante su esfuerzo, deformación y alargamiento. Son $g - 1$. Ese movimiento puede describirse con un incremento de los g grados de libertad que mantiene nulos los incrementos de deformación de esos cables. Tenemos pues un conjunto homogéneo de $g - 1$ ecuaciones de compatibilidad y g incrementos desconocidos que tendrá infinitas soluciones proporcionales a uno cualquiera de los movimientos, g_i.

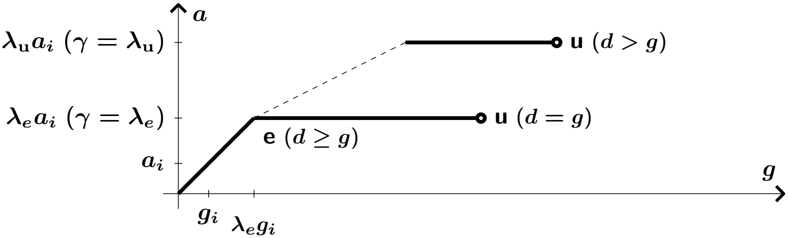
Carga elástica, carga de rotura



Rotura en estructuras dúctiles:

- Con el resto de las $d - g + 1$ ecuaciones de compatibilidad podemos determinar los incrementos de deformación de los cables plastificados, en funcion de g_i.
- Utilizando ese movimiento incremental como movimiento virtual determinamos la carga última.
- Pero ¿qué cables mantendrán constante su deformación?

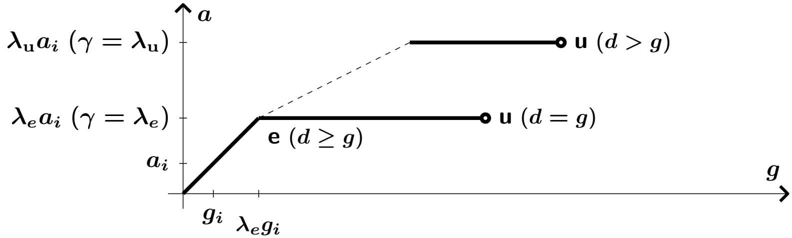
Carga elástica, carga de rotura



Rotura en estructuras dúctiles:

- Las preguntas "¿qué cables han plastificado?" y "¿qué cables mantendrán constante su deformación?" pueden responderse probando **todas** las posibilidades.
- El cable que primero alcanza el límite elástico ha plastificado y aumentará su deformación.

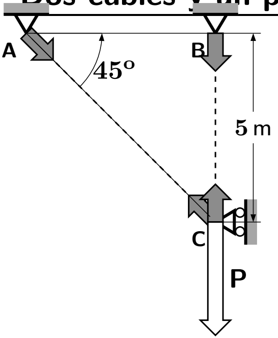
Carga elástica, carga de rotura



Rotura en estructuras dúctiles:

- Del estado de tensión de los cables antes de alcanzar la carga elástica, puede obtenerse una hipótesis razonable de cuales cables plastificarán primero y cuales podrían no hacerlo nunca.
- Si esa hipótesis conduce a valores de esfuerzo y deformación de todos los cables que no la contradicen, con ella determinamos la carga de rotura.

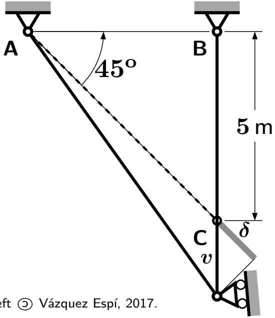
Dos cables y un peso que desciende



$g = 1$, $g - 1 = 0$.
Con cables de igual sección y material, $\mathsf{N}_\mathbf{u} = \mathsf{A}\mathsf{f}_\mathbf{u}$:

$$P_\mathbf{u} = \mathsf{N}_\mathbf{u} \cdot \sin 45^\mathrm{o} + \mathsf{N}_\mathbf{u}$$

$$P_\mathbf{u} = 1{,}71\mathsf{N}_\mathbf{u}$$

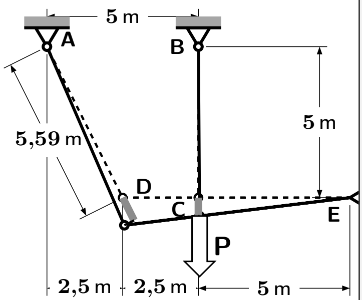


Las deformaciones son:

$$[\varepsilon_\mathbf{A} \;\; \varepsilon_\mathbf{B}] = [\frac{0{,}5}{5\,\mathrm{m}} \;\; \frac{1}{5\,\mathrm{m}}] \cdot v$$

$P_\mathbf{u}$ se alcanza cuando AC llega al límite elástico, $v = 10\,\mathrm{m} \cdot \varepsilon_e$. Y permanece constante hasta que BC se rompe en dos, con $v = 5\,\mathrm{m} \cdot \varepsilon_\mathbf{u}$.

Dos cables y una tabla que gira



$g = 1$, $g - 1 = 0$

Con $A_{\mathbf{A}} = A_{\mathbf{B}} = \mathbf{A}$ y $\mathbf{N_u} = \mathbf{Af_u}$:

$$P_{\mathbf{u}} \cdot 5\,\mathrm{m} = \begin{bmatrix} 6,71\,\mathrm{m} & 5\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{N_u} \\ \mathbf{N_u} \end{bmatrix}$$

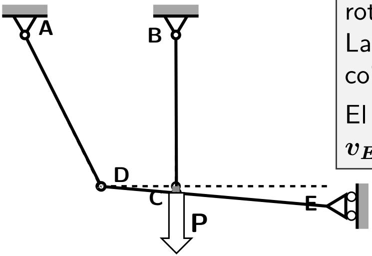
$$P_{\mathbf{u}} = 2{,}34\mathbf{N_u}$$

La ecuación de compatibilidad es:

$$\begin{bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,71\,\mathrm{m} \\ 5\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \cdot \theta$$

con deformaciones $\varepsilon_A = 1{,}20\theta$ y $\varepsilon_B = \theta$.
La carga $P_{\mathbf{u}}$ se alcanzará con $\theta = \varepsilon_e$, cuando BC alcanza el límite elástico y AD está plastificado.
Y se mantendrá constante hasta $\theta = \varepsilon_{\mathbf{u}}/1{,}2$, momento en el que el cable AD se rompe en dos...

Dos cables y una tabla que gira y desciende

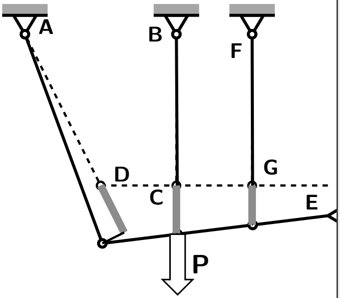


$g = 2$, $g - 1 = 1$

No hay ninguna duda: el cable que nunca alcanzará el límite elástico es el AD. La carga de rotura es la que pueda aguantar por si solo el BC. La estructura es isostática: la carga elástica coincide con la de la rotura.

El movimiento de rotura es un giro horario en D: $v_E = \theta_D \cdot 7{,}5$ m, y $\theta_E = \theta_D$.

Tres cables y una tabla que gira y desciende



$g = 2$, $g - 1 = 1$. Cables de igual grueso y material.

Puesto que las tensiones en el estado elástico eran proporcionales a $[0{,}35 \ \ 0{,}37 \ \ 0{,}31]$, podemos suponer que el cable FG no alcanza el límite elástico durante la rotura.

$$P_{\mathrm{u}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 5\,\mathrm{m} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}89 & 1 & 1 \\ 6{,}71\,\mathrm{m} & 5\,\mathrm{m} & 2{,}5\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathsf{N}_{\mathrm{u}} \\ \mathsf{N}_{\mathrm{u}} \\ N_F \end{Bmatrix}$$

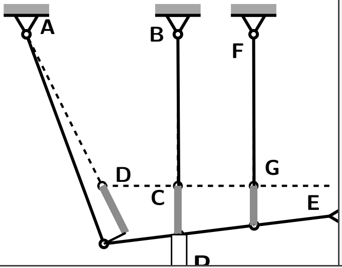
$$P_{\mathrm{u}} = 2{,}79\mathsf{N}_{\mathrm{u}}$$

Intentemos refutar la hipótesis: ¿será el AD? La suma de momentos respecto a D es:

$$P_{\mathrm{u}} \cdot 2{,}5\,\mathrm{m} = \mathsf{N}_{\mathrm{u}} \cdot (2{,}5\,\mathrm{m} + 5\,\mathrm{m})$$

Y resulta que $P_{\mathrm{u}} = 3\mathsf{N}_{\mathrm{u}}$, mayor que la anterior: luego la rotura se produce al plastificar primero BC y luego AD.

Tres cables y una tabla que gira y desciende



$g = 2$, $g-1 = 1$. Cables de igual grueso y material.
Puesto que las tensiones en el estado elástico eran proporcionales a $[0{,}35\ \ 0{,}37\ \ 0{,}31]$, podemos suponer que el cable FG no alcanza el límite elástico durante la rotura.

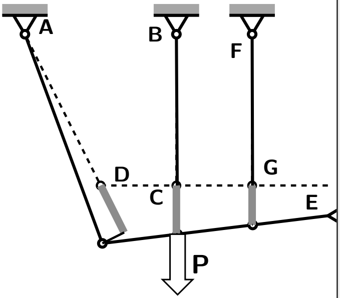
$$P_{\mathbf{u}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 5\,\mathrm{m} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}89 & 1 & 1 \\ 6{,}71\,\mathrm{m} & 5\,\mathrm{m} & 2{,}5\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathsf{N}_{\mathbf{u}} \\ \mathsf{N}_{\mathbf{u}} \\ N_F \end{Bmatrix}$$

Verifiquemos la hipótesis. De las ecuaciones de equilibrio se deduce $N_F = 0{,}90\mathsf{N}_{\mathbf{u}}$. Cuando AD alcanza su límite elástico su deformación valdrá ε_e y entonces la de FG será $0{,}90\varepsilon_e$. Las ecuaciones de compatibilidad serán:

$$\begin{aligned} \varepsilon_e L_{\mathrm{AD}} &= v\cdot\frac{5}{5{,}59} + \theta\cdot 7{,}5\,\mathrm{m}\cdot\frac{5}{5{,}59} \\ \varepsilon_{\mathrm{BC}} L_{\mathrm{BC}} &= v + \theta\cdot 5\,\mathrm{m} \\ 0{,}90\varepsilon_e L_{\mathrm{FG}} &= v + \theta\cdot 2{,}5\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

De la primera y la tercera obtenemos v, θ cuando se alcanza $\mathsf{P}_{\mathbf{u}}$, y de la segunda la deformación de BC, $\varepsilon_{\mathrm{BC}} = 1{,}08\varepsilon_e$. Tal y como habíamos supuesto.

Tres cables y una tabla que gira y desciende



$g = 2$, $g - 1 = 1$. Cables de igual grueso y material.
Puesto que las tensiones en el estado elástico eran proporcionales a $[\mathbf{0{,}35} \;\; \mathbf{0{,}37} \;\; \mathbf{0{,}31}]$, podemos suponer que el cable FG no alcanza el límite elástico durante la rotura.

$$P_{\mathrm{u}} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 5\,\mathrm{m} \end{matrix} \right\} = \left[\begin{matrix} 0{,}89 & 1 & 1 \\ 6{,}71\,\mathrm{m} & 5\,\mathrm{m} & 2{,}5\,\mathrm{m} \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \mathsf{N}_{\mathrm{u}} \\ \mathsf{N}_{\mathrm{u}} \\ N_F \end{matrix} \right\}$$

$$P_{\mathrm{u}} = 2{,}79\mathsf{N}_{\mathrm{u}}$$

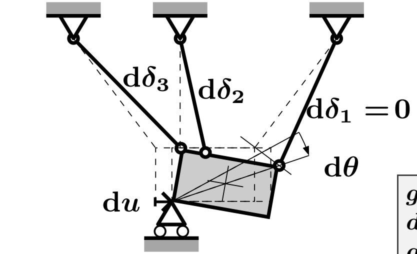
Intentemos refutar la hipótesis: ¿será el AD? La suma de momentos respecto a D es:

$$P_{\mathrm{u}} \cdot 2{,}5\,\mathrm{m} = \mathsf{N}_{\mathrm{u}} \cdot (2{,}5\,\mathrm{m} + 5\,\mathrm{m})$$

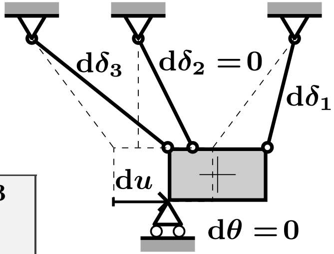
Y resulta que $P_{\mathrm{u}} = 3\mathsf{N}_{\mathrm{u}}$, mayor que la anterior:

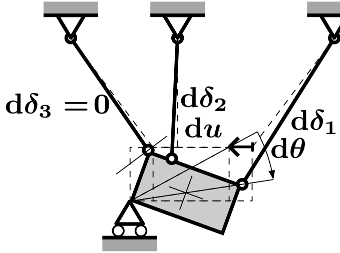
Verifiquemos que la hipótesis “AD” no se sostiene. De las ecuaciones de equilibrio se deduce $N_A = 1{,}11\mathsf{N}_{\mathrm{u}}$, lo que es contradictorio con que AD no ha alcanzado el límite elástico.

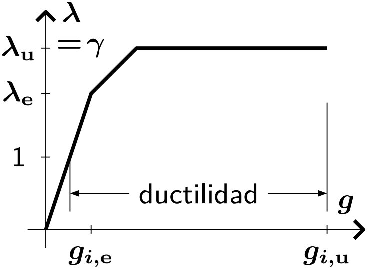
Mecanismos de colapso—deformaciones virtuales



$g = 2 < d = 3$
$d - g + 1 = 2$
$g - 1 = 1$







Sólido deformable: un método universal

Mariano Vázquez Espí

GIAU+S (UPM)
Grupo de Investigacion en Arquitectura, Urbanismo y Sostenibilidad
Universidad Politécnica de Madrid
http://habitat.aq.upm.es/gi

Edicion del 16 de marzo de 2017
compuesto con *free software*:
GNULinux/LaTeX/dvips/ps2pdf

Rotura plástica, planteamiento analítico

Si hay p cables en periodo proporcional y u cables plastificados ($p + u = d$ y $p < g$):

$$\overset{s\times 1}{[\,\mathbf{db}\,]} = \left\{ \begin{array}{c} \overset{p\times 1}{[\,\mathbf{db_k}\,]} \\ \overset{u\times 1}{[\,\mathbf{db_m}\,]} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overset{p\times 1}{[\mathbf{0}]} \\ \overset{u\times 1}{[\,\mathbf{db_m}\,]} \end{array} \right\} \quad \textit{versus} \quad \overset{s\times 1}{[\,\mathbf{de}\,]} = \left\{ \begin{array}{c} \overset{p\times 1}{[\mathbf{e_k}]} \\ \overset{u\times 1}{[(\mathsf{N}_\mathbf{u})_\mathbf{m}]} \end{array} \right\}$$

Y las ecuaciones de compatibilidad:

$$\left\{ \begin{array}{c} \overset{p\times 1}{[\mathbf{0}]} \\ \overset{u\times 1}{[\,\mathbf{db_m}\,]} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} \overset{p\times g}{[\mathbf{B_{ki}}]} \\ \overset{u\times g}{[\mathbf{B_{mi}}]} \end{array} \right] \times \overset{g\times 1}{[\,\mathbf{dg}\,]}$$

Rotura plástica, planteamiento analítico

Por ejemplo, con $p = g - 1$:

$$\overset{(g-1)\times 1}{[\mathbf{0}]} = \overset{(g-1)\times g}{[\mathbf{B_{ki}}]} \times \overset{g\times 1}{[\,\mathbf{dg}\,]}$$

ecuaciones que admiten una solución en función de un movimiento virtual, por ejemplo, $\mathbf{d}g_n$:

$$\overset{g\times 1}{[\,\mathbf{dg}\,]} = \overset{g\times 1}{[\mathbf{C}]} \cdot \mathbf{d}g_n$$

Rotura plástica, planteamiento analítico

Justo antes de la rotura:

$$\boxed{\overset{g\times 1}{[\,\mathbf{dg}\,]}=\overset{g\times 1}{[\mathbf{C}]}\cdot \mathbf{d}\boldsymbol{g_n}}$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{W_{ext}} = \overset{1\times g}{[\,\mathbf{dg}^{\mathbf{T}}]}\cdot\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{u}}\cdot\overset{g\times 1}{[\mathbf{a}]} = \overset{1\times g}{[\mathbf{C}^{\mathbf{T}}]}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{g_n}\cdot\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{u}}\cdot\overset{g\times 1}{[\mathbf{a}]}$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{W_{int}} = \overset{1\times d}{[\,\mathbf{db}^{\mathbf{T}}]}\cdot\overset{d\times 1}{[\mathbf{e}]} = \overset{1\times u}{[\,\mathbf{db_m}^{\mathbf{T}}]}\cdot\overset{u\times 1}{[(\mathsf{N}_{\mathbf{u}})_{\mathbf{m}}]} =$$

$$= \mathbf{d}\boldsymbol{g_n}\cdot\overset{1\times g}{[\mathbf{C}^{\mathbf{T}}]}\overset{g\times u}{[\mathbf{B_{mi}}^{\mathbf{T}}]}\overset{u\times 1}{[(\mathsf{N}_{\mathbf{u}})_{\mathbf{m}}]}$$

Igualando ambos, resulta una ecuación escalar de la que es posible determinar $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{u}}$:

$$\boldsymbol{\lambda_u} = \frac{\overset{1\times g}{[\mathbf{C}^{\mathbf{T}}]}\overset{g\times u}{[\mathbf{B_{mi}}^{\mathbf{T}}]}\overset{u\times 1}{[(\mathsf{N}_{\mathbf{u}})_{\mathbf{m}}]}}{\overset{1\times g}{[\mathbf{C}^{\mathbf{T}}]}\overset{g\times 1}{[\mathbf{a}]}}$$