Sólido deformable: compatibilidad y equilibrio

Mariano Vázquez Espí

Madrid (España), 15 de marzo de 2013.

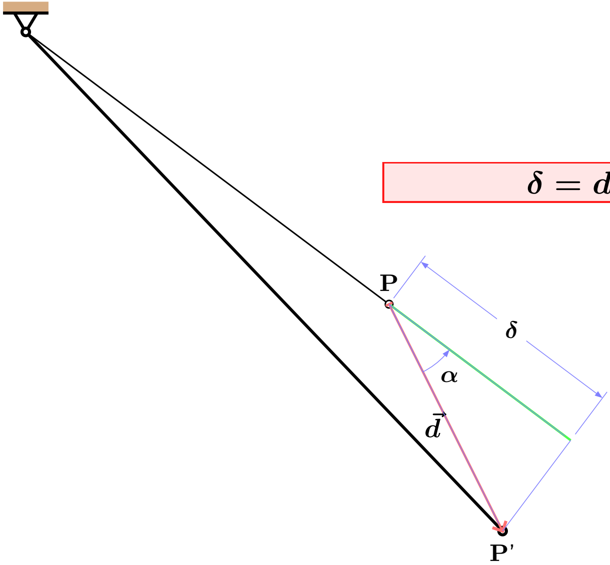
Ecuaciones de compatibilidad

Son las relaciones entre movimientos de puntos o sólidos indeformables y la deformación de los sólidos deformables. Expresan la coherencia topológica y geométrica entre las distintas partes de una estructura y son validas siempre que la estructura no se rompa, sin importar el estado elástico o plástico de sus partes.

En su forma más básica relacionan movimientos $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\theta}, \ldots$ con alargamientos $\boldsymbol{\delta_1}, \boldsymbol{\delta_2}, \ldots$

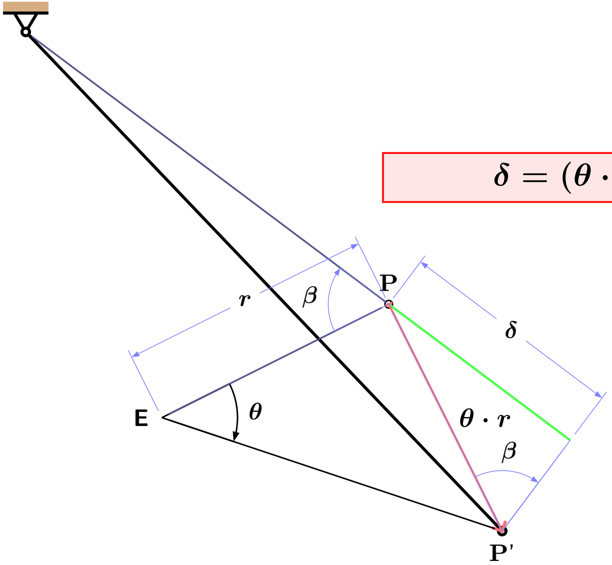
En estructuras sometidas a requisitos de rigidez con distorsiones tolerables muy pequeñas, se pueden escribir como relaciones lineales de forma casi exacta (hipótesis de pequeñas deformaciones).

Ecuaciones de compatibilidad



$$\boldsymbol{\delta = d\cos\alpha}$$

Ecuaciones de compatibilidad

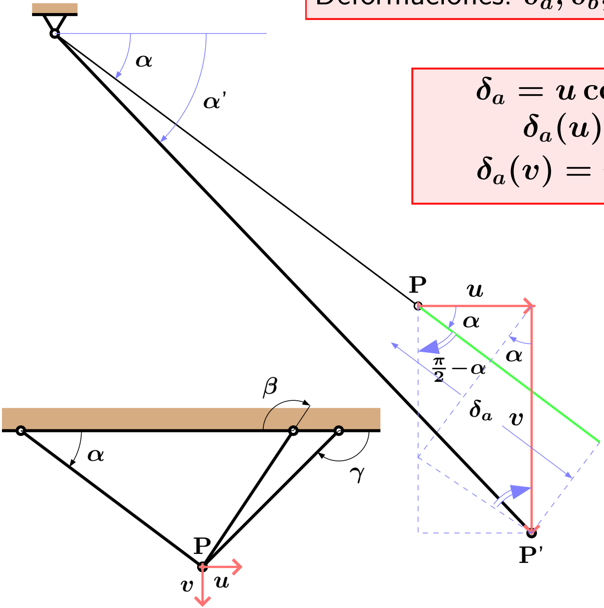


$$\boldsymbol{\delta = (\theta \cdot r) \sin \beta}$$

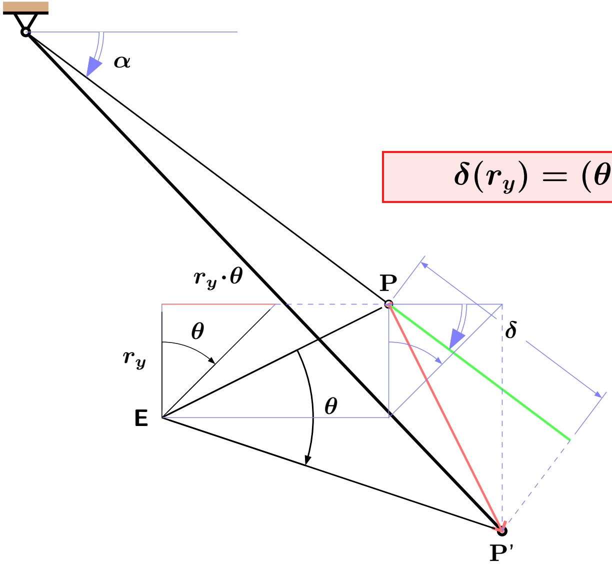
Ecuaciones de compatibilidad

Deformaciones: $\delta_a; \delta_b; \delta_c$. Movimientos: $u; v$.

$$\delta_a = u\cos\alpha + v\sin\alpha$$
$$\delta_a(u) = u\cos\alpha$$
$$\delta_a(v) = v\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

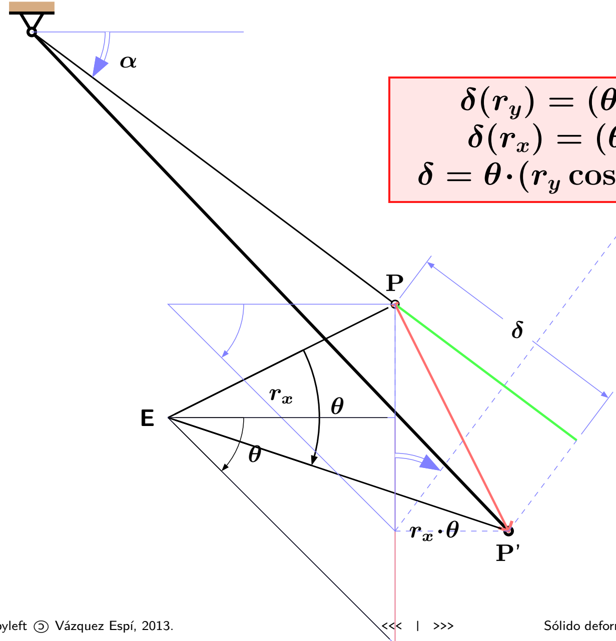


Ecuaciones de compatibilidad

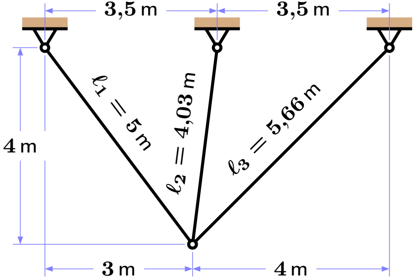


$$\boxed{\delta(r_y) = (\theta \cdot r_y)\cos\alpha}$$

Ecuaciones de compatibilidad

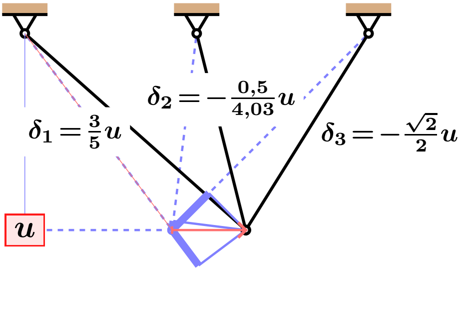


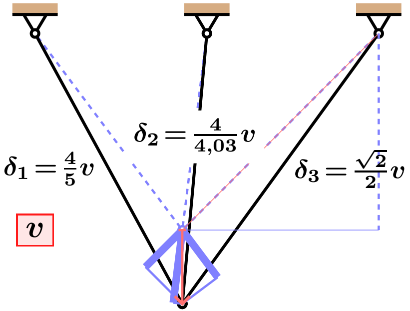
$$\delta(r_y) = (\theta \cdot r_y) \cos\alpha$$
$$\delta(r_x) = (\theta \cdot r_x) \sin\alpha$$
$$\delta = \theta \cdot (r_y \cos\alpha + r_x \sin\alpha)$$

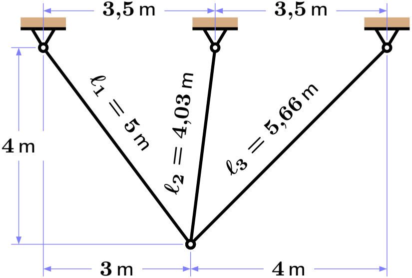


Ecuaciones de compatibilidad

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \quad(u) & \quad(v) \end{array} \\
\left\{ \begin{array}{c} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{array} \right\} = & \left[\begin{array}{cc} 0{,}6 & 0{,}8 \\ -0{,}12 & 0{,}99 \\ -0{,}71 & 0{,}71 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\}
\end{array}
$$

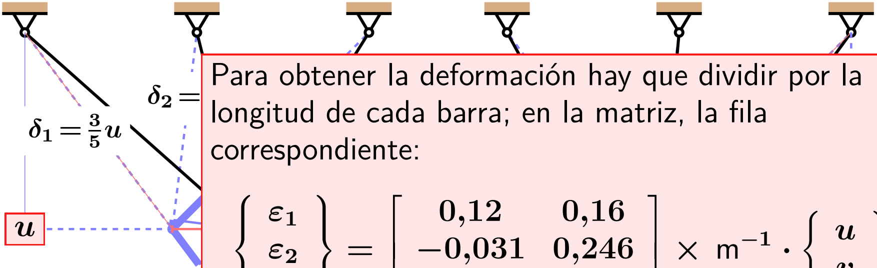






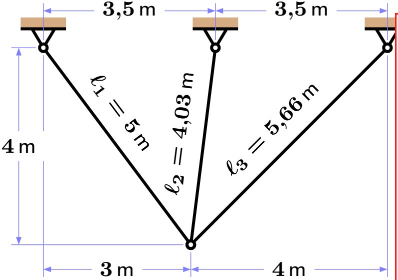
Ecuaciones de compatibilidad

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} (u) & (v) \end{array} \\ \left\{ \begin{array}{c} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{array} \right\} = & \left[\begin{array}{cc} 0{,}6 & 0{,}8 \\ -0{,}12 & 0{,}99 \\ -0{,}71 & 0{,}71 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\} \end{array}$$



Para obtener la deformación hay que dividir por la longitud de cada barra; en la matriz, la fila correspondiente:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} 0{,}12 & 0{,}16 \\ -0{,}031 & 0{,}246 \\ -0{,}125 & 0{,}125 \end{array} \right] \times \mathrm{m}^{-1} \cdot \left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\}$$



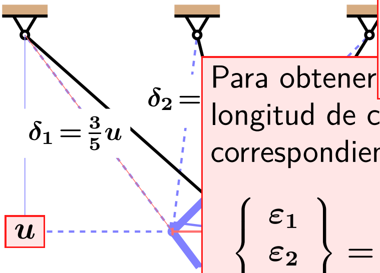
Para un movimiento con $u=0$, el cable con mayor deformación es el 2, $\varepsilon_2 = 0{,}246\,\mathrm{m}^{-1} \times v$.
Con un material de límite elástico 2 mm/m, se alcanzaría el límite elástico del conjunto con:

$$v = \frac{2\,\mathrm{mm/m}}{0{,}246\,\mathrm{m}^{-1}} = 8{,}13\,\mathrm{mm}$$

Si el descenso continua (con 2 a tensión constante), 1 alcanzará su límite elástico con un descenso de **12,5** mm, y entonces:

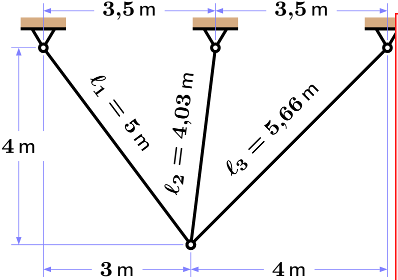
$$\varepsilon_2 = 12{,}5\,\mathrm{mm} \cdot 0{,}246\,\mathrm{m}^{-1} = 3{,}08\,\mathrm{mm/m}$$

Finalmente 3 alcanzará el límite elástico con un descenso de **16** mm.



Para obtener
longitud de cada barra; en la matriz, la fila correspondiente:

$$\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc} 0{,}12 & 0{,}16\\ -0{,}031 & 0{,}246\\ -0{,}125 & 0{,}125\end{array}\right] \times \mathrm{m}^{-1} \cdot \left\{\begin{array}{c} u\\ v\end{array}\right\}$$

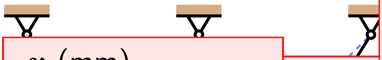


Un material dúctil, con deformación de rotura de unos 10 mm/m, puede deformarse más aún. Para provocar la rotura de 2, habría que alcanzar un descenso:

$$v = \frac{\mathbf{10}\,\mathrm{mm/m}}{\mathbf{0{,}246}\,\mathrm{m}^{-1}} = \mathbf{40{,}65}\,\mathrm{mm}$$

Al romperse 2 puede no pasar nada más salvo que sigamos obligando a descender a los demás cables. Para que se rompa el 3, habra que alcanzar:

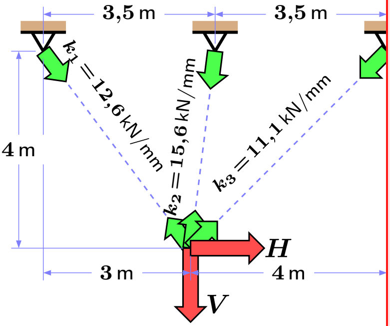
$$v = \frac{\mathbf{10}\,\mathrm{mm/m}}{\mathbf{0{,}125}\,\mathrm{m}^{-1}} = \mathbf{80}\,\mathrm{mm}$$



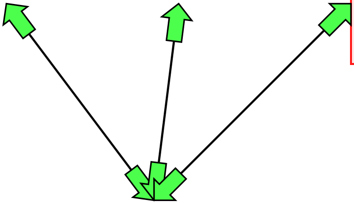
v (mm)	
8,13	2→e
12,5	1→e
16	3→e
40,65	2→u
62,5	1→u
80	3→u

obtener la deformación hay que dividir por la
ud de cada barra; en la matriz, la fila
spondiente:

$$\left.\begin{matrix} {}_1 \\ {}_2 \\ {}_3 \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{0{,}12} & \mathbf{0{,}16} \\ \mathbf{-0{,}031} & \mathbf{0{,}246} \\ \mathbf{-0{,}125} & \mathbf{0{,}125} \end{bmatrix} \times \mathrm{m}^{-1} \cdot \left\{ \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\}$$



$\mathbf{A} = 314\,\mathrm{mm}^2$, $\mathbf{E} = 200\,\mathrm{kN/mm}^2$



Ecuaciones de compatibilidad

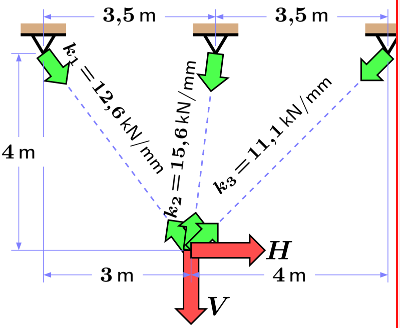
$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (u) & (v) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ -0{,}12 & 0{,}99 \\ -0{,}71 & 0{,}71 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

Ecuaciones de equilibrio

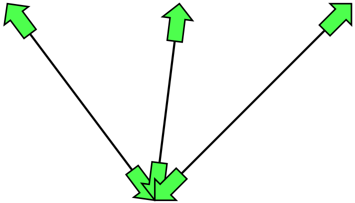
$$\begin{Bmatrix} H \\ V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & -0{,}12 & -0{,}71 \\ 0{,}8 & 0{,}99 & 0{,}71 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix}$$

Comportamiento del material:

$$N_i = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{EA}}{\ell_i}\delta_i \not> \mathbf{E}\cdot 2\,\mathrm{mm/m}\cdot\mathbf{A} \text{ si } \varepsilon_i \leq 10\,\mathrm{mm/m} \\ 0 \text{ si } \varepsilon_i > 10\,\mathrm{mm/m} \end{cases}$$



$\mathsf{A} = 314\,\text{mm}^2$, $\mathsf{E} = 200\,\text{kN/mm}^2$



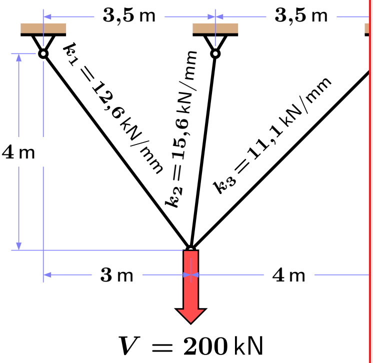
Para $u = 0$ y $v \neq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} 0{,}8 \\ 0{,}99 \\ 0{,}71 \end{array} \right] \cdot v$$

$$N_i = \begin{cases} \dfrac{\mathsf{EA}}{\ell_i}\delta_i \not> \mathsf{E}\cdot 2\,\text{mm/m}\cdot\mathsf{A} \text{ si } \varepsilon_i \leq 10\,\text{mm/m} \\ 0 \text{ si } \varepsilon_i > 10\,\text{mm/m} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} H \\ V \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} 0{,}6 & -0{,}12 & -0{,}71 \\ 0{,}8 & 0{,}99 & 0{,}71 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{array} \right\}$$

v (mm)	H (kN)	V (kN)	
8,13	−11,39	235,36	2→e
12,5	−9,66	294,77	1→e
16	−28,89	314,00	3→e
40,65	−28,89	314,00	2→u
62,5	−13,82	189,66	1→u
80	−89,18	89,18	3→u



Para $V = 200\,\mathrm{kN}$ y suponiendo estado proporcional:

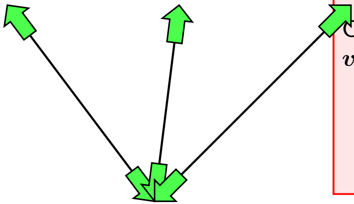
$$\begin{Bmatrix} H \\ V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & -0{,}12 & -0{,}71 \\ 0{,}8 & 0{,}99 & 0{,}71 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix}$$

$$N_1 = 12{,}6\delta_1 \quad N_2 = 15{,}6\delta_2 \quad N_3 = 11{,}1\delta_3$$

$$\begin{Bmatrix} H \\ V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 7{,}56 & -1{,}87 & -7{,}88 \\ 10{,}08 & 15{,}44 & 7{,}88 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix}$$

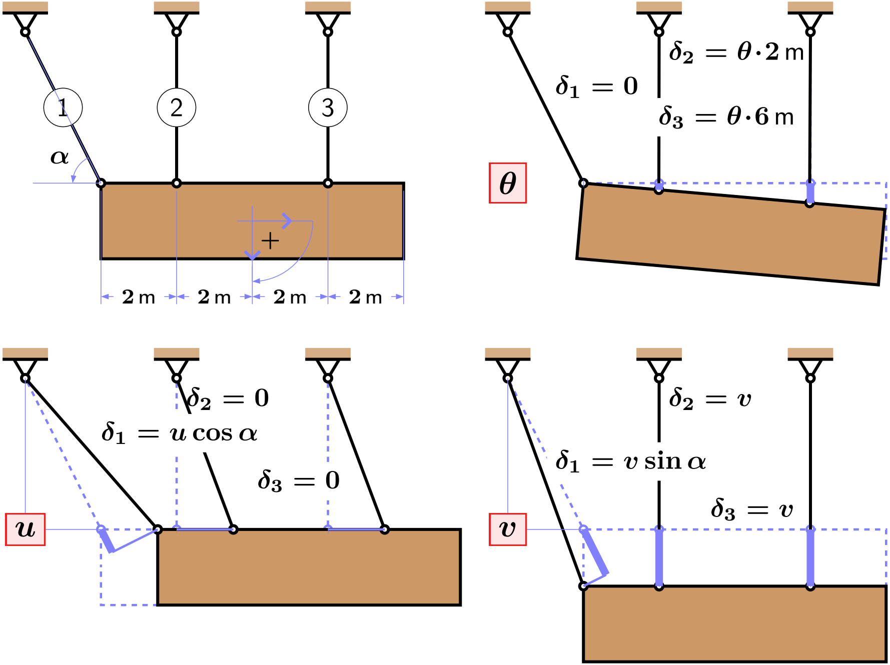
$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ -0{,}12 & 0{,}99 \\ -0{,}71 & 0{,}71 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} H \\ V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 10{,}36 & -1{,}4 \\ -1{,}4 & 28{,}95 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

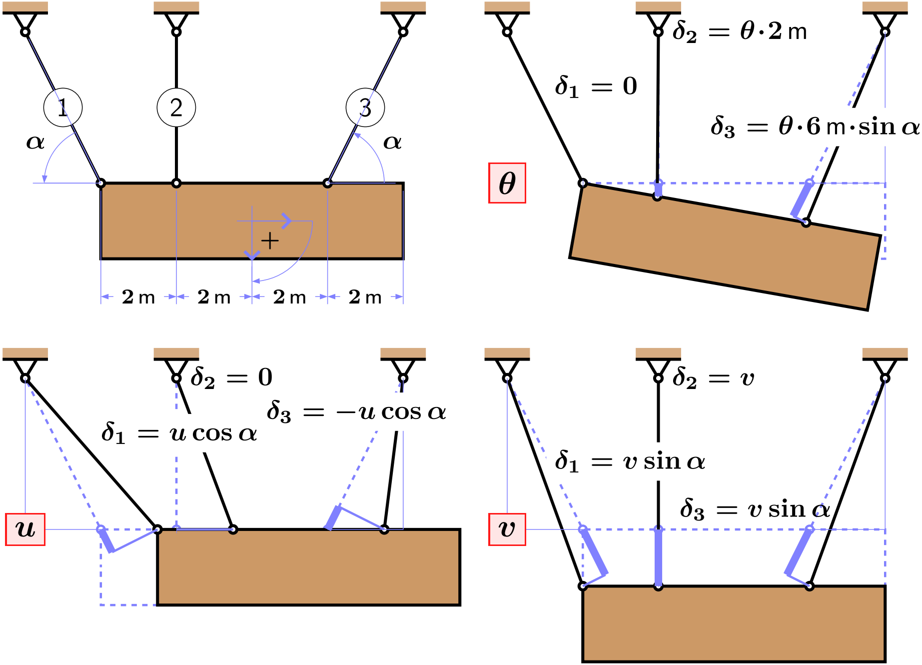


Con $H = 0$ y $V = 200\,\mathrm{kN}$ resulta $u = 0{,}94\,\mathrm{mm}$ y $v = 6{,}95\,\mathrm{mm}$.

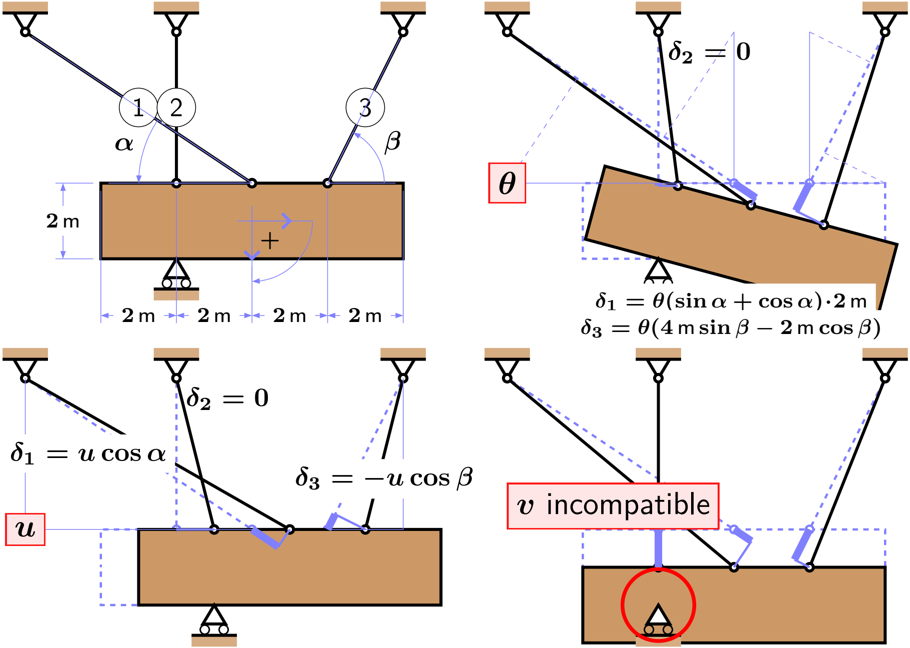
	1	2	3
N_i (kN)	77,2	105,6	47,4
σ_i (N/mm^2)	246	336	151

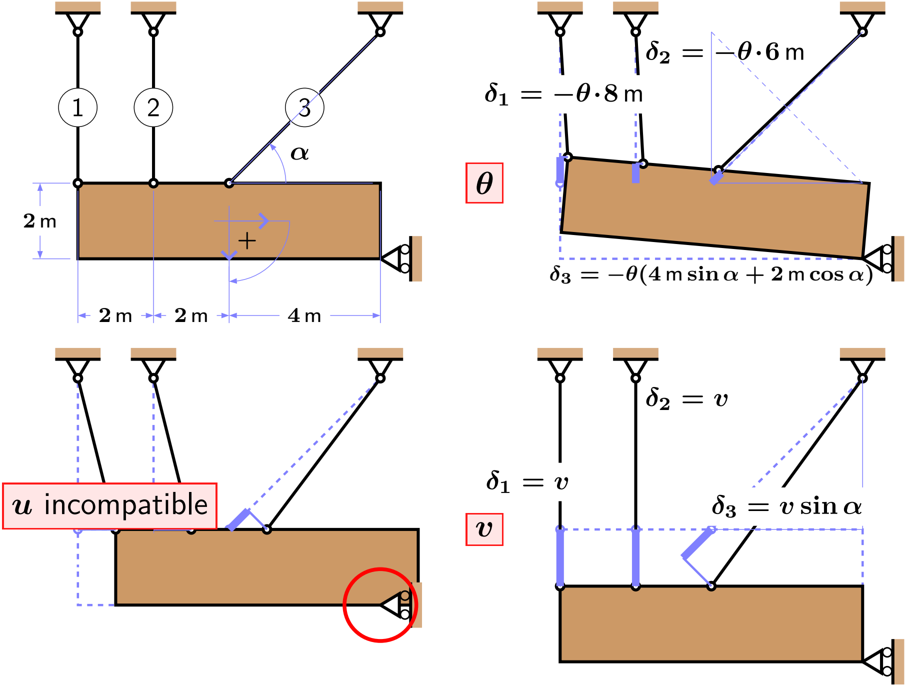


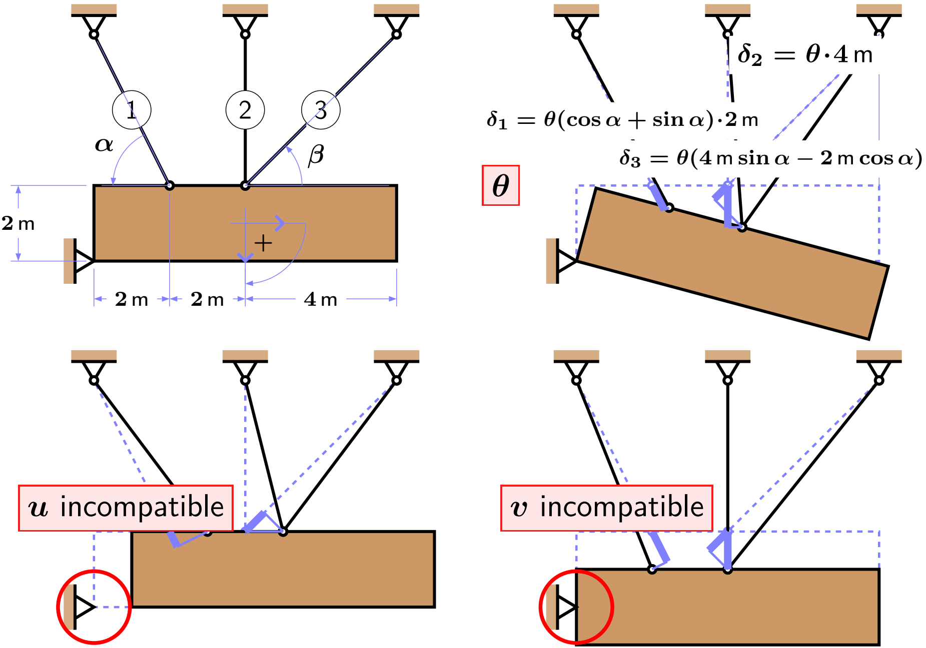
1
2
3
α
+
2 m
2 m
2 m
2 m
$\delta_2 = \theta \cdot 2\,\mathrm{m}$
$\delta_1 = 0$
$\delta_3 = \theta \cdot 6\,\mathrm{m}$
θ
$\delta_2 = 0$
$\delta_1 = u \cos \alpha$
$\delta_3 = 0$
u
$\delta_2 = v$
$\delta_1 = v \sin \alpha$
$\delta_3 = v$
v

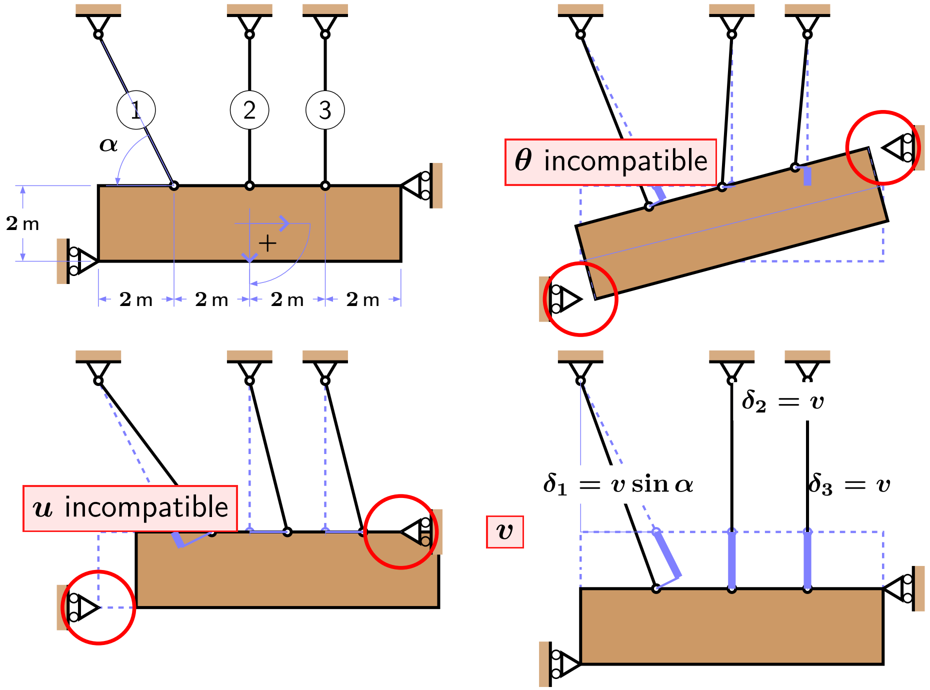


1
2
3
α
α
+
$2\,\mathrm{m}$
$2\,\mathrm{m}$
$2\,\mathrm{m}$
$2\,\mathrm{m}$
θ
$\delta_2 = \theta \cdot 2\,\mathrm{m}$
$\delta_1 = 0$
$\delta_3 = \theta \cdot 6\,\mathrm{m} \cdot \sin\alpha$
u
$\delta_2 = 0$
$\delta_3 = -u\cos\alpha$
$\delta_1 = u\cos\alpha$
v
$\delta_2 = v$
$\delta_1 = v\sin\alpha$
$\delta_3 = v\sin\alpha$


1
2
3
α
β
2 m
$+$
2 m
2 m
2 m
2 m
$\delta_2 = 0$
θ
$\delta_1 = \theta(\sin\alpha + \cos\alpha)\cdot 2\,\mathrm{m}$
$\delta_3 = \theta(4\,\mathrm{m}\sin\beta - 2\,\mathrm{m}\cos\beta)$
$\delta_2 = 0$
$\delta_1 = u\cos\alpha$
$\delta_3 = -u\cos\beta$
u
v incompatible


1
2
3
α
2 m
+
2 m
2 m
4 m
$\delta_2 = -\theta \cdot 6\,\mathrm{m}$
$\delta_1 = -\theta \cdot 8\,\mathrm{m}$
θ
$\delta_3 = -\theta(4\,\mathrm{m}\sin\alpha + 2\,\mathrm{m}\cos\alpha)$
u incompatible
$\delta_2 = v$
$\delta_1 = v$
v
$\delta_3 = v\sin\alpha$


1
2
3
α
β
2 m
+
2 m
2 m
4 m
$\delta_2 = \theta \cdot 4\,\text{m}$
$\delta_1 = \theta(\cos\alpha + \sin\alpha) \cdot 2\,\text{m}$
$\delta_3 = \theta(4\,\text{m}\sin\alpha - 2\,\text{m}\cos\alpha)$
θ
u incompatible
v incompatible



1
2
3
α
2 m
2 m
2 m
2 m
2 m
+
θ incompatible
u incompatible
v
δ₂ = v
δ₁ = v sin α
δ₃ = v

Sólido deformable: compatibilidad y equilibrio

Mariano Vázquez Espí

GIAU+S (UPM)
Grupo de Investigación en Arquitectura, Urbanismo y Sostenibilidad
Universidad Politécnica de Madrid
http://habitat.aq.upm.es/gi

Edición del 15 de marzo de 2013
compuesto con *free software*:
GNULinux/LaTeX/dvips/ps2pdf