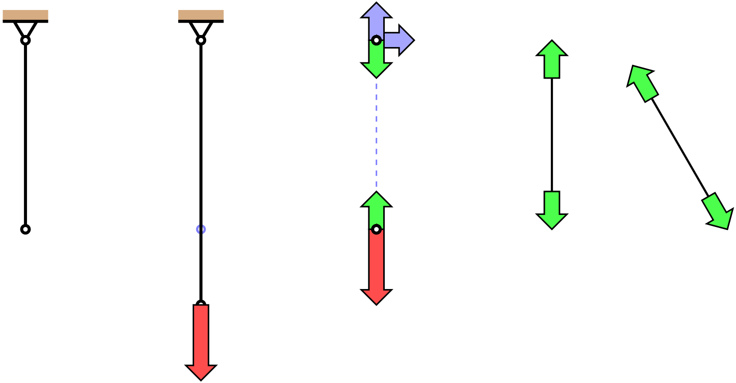
Sólido deformable: compatibilidad y equilibrio

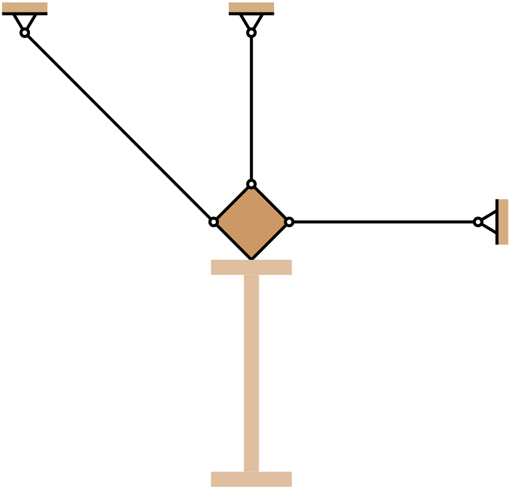
Mariano Vázquez Espí

Madrid (España), 3 de marzo de 2012.

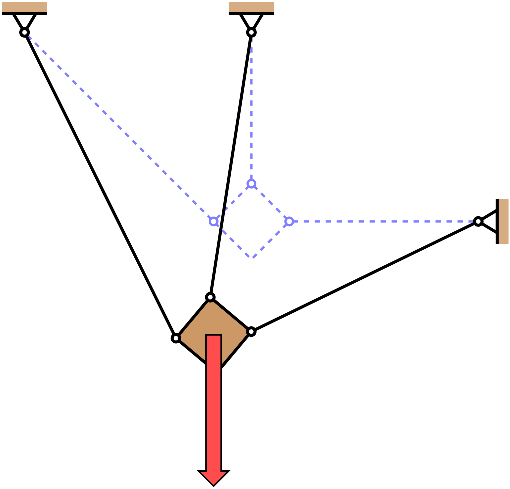
Modelo 'cable'



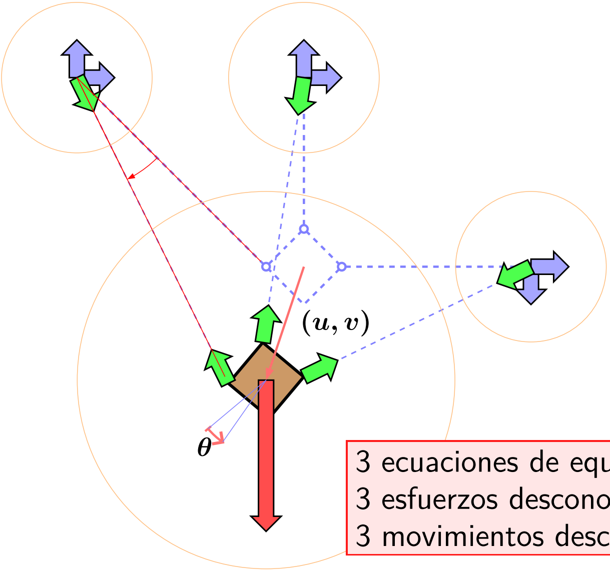
Estructura de cables y sólidos indeformables



Estructura de cables y sólidos indeformables



Estructura de cables y sólidos indeformables



3 ecuaciones de equilibrio
3 esfuerzos desconocidos
3 movimientos desconocidos

«Hipótesis de desplazamientos pequeños»

El requisito de rigidez impone que los movimientos sean mucho más pequeños que el tamaño $\boldsymbol{T}$ o la proporción $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{u} \ll \boldsymbol{T} \qquad \boldsymbol{v} \ll \boldsymbol{T} \qquad \tan \boldsymbol{\theta} \ll \boldsymbol{P}$$

Si $\boldsymbol{\theta} \to \mathbf{0}$, *puede sustituirse el arco por la tangente*.

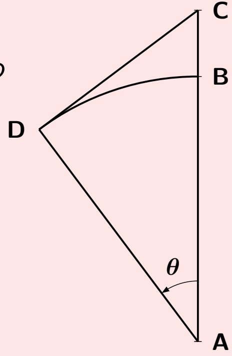
$$\cos(\boldsymbol{\theta}) \approx \mathbf{1}$$

$$\overline{\mathsf{BC}} \approx 0 \qquad \overline{\mathsf{AB}} \approx \overline{\mathsf{AC}}$$

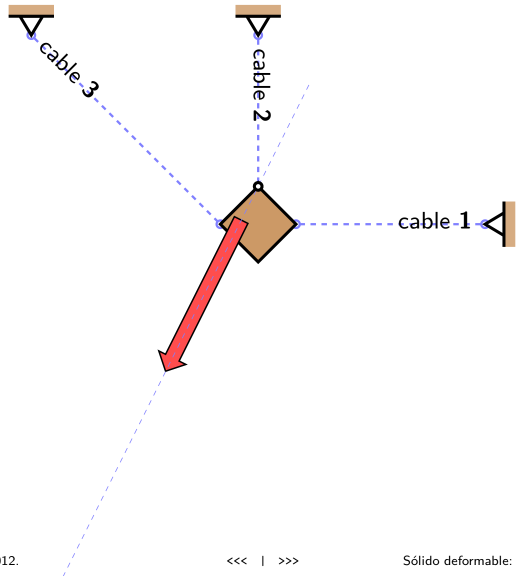
$$\widehat{\mathsf{DB}} \approx \overline{\mathsf{DC}}$$

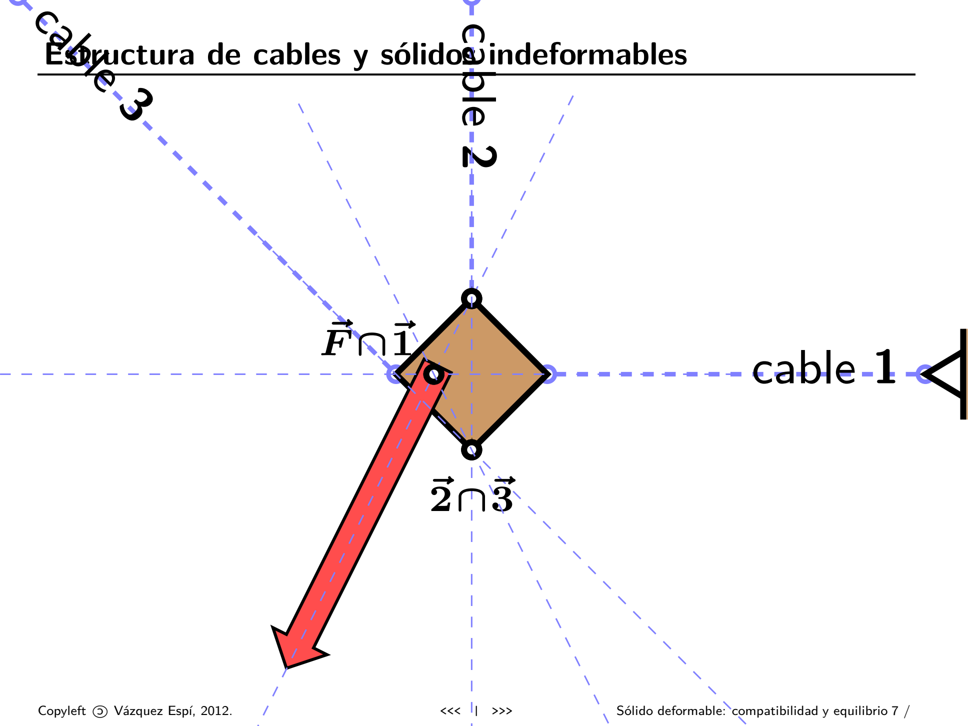
Con $\boldsymbol{\theta}$ en *radianes*:

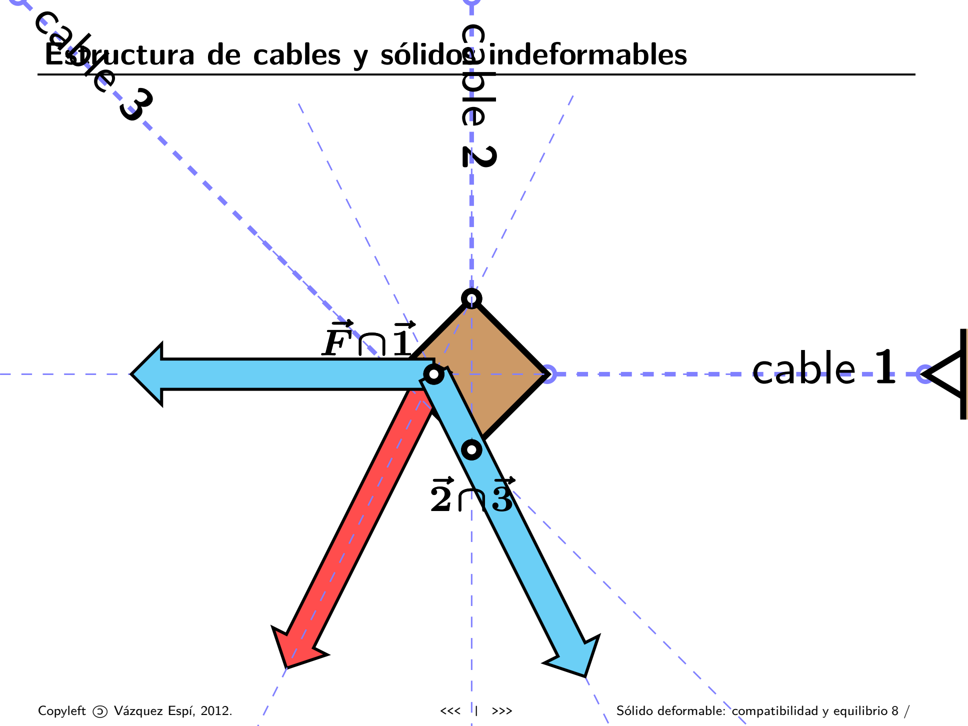
$$\boldsymbol{\theta} \approx \sin(\boldsymbol{\theta}) \approx \tan(\boldsymbol{\theta}).$$



Estructura de cables y sólidos indeformables




cable 3
cable 2
cable 1
$\vec{F} \cap \vec{1}$
$\vec{2} \cap \vec{3}$


cable 3
cable 2
cable 1
$\vec{F}\cap\vec{1}$
$\vec{2}\cap\vec{3}$

Estructura de cables y sólidos indeformables

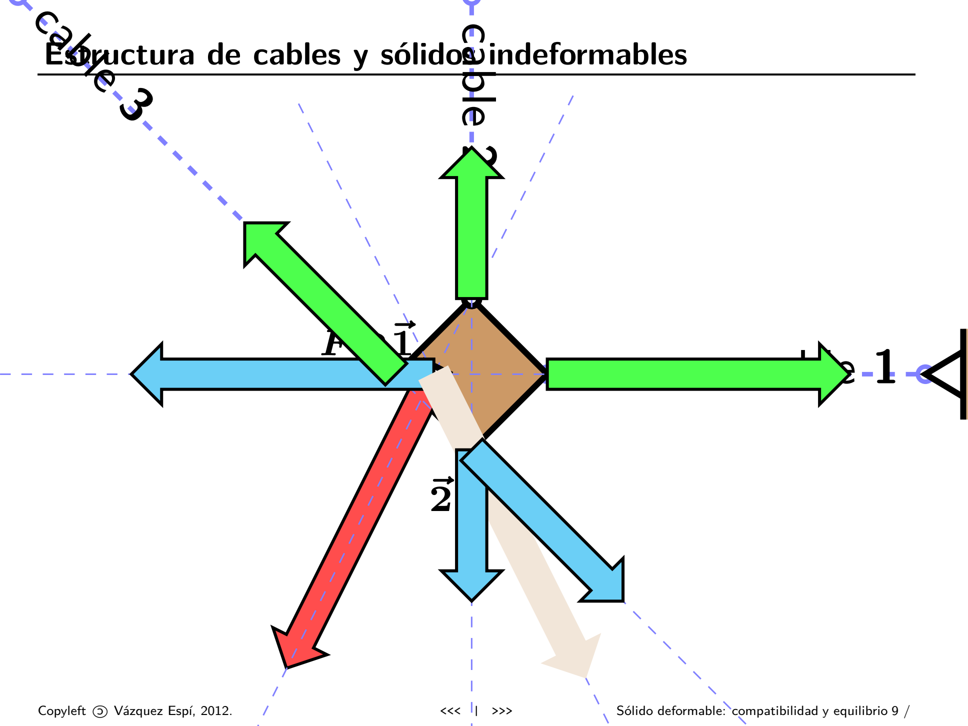


Tabla indeformable suspendida

acero corriente:

$$\mathbf{E} = \mathbf{210}\,\mathrm{kN/mm^2}$$
$$\boldsymbol{\sigma_u} = \mathbf{260}\,\mathrm{N/mm^2}$$

Barras de 20 mm de diámetro;
$\mathbf{A} = \mathbf{314}\,\mathrm{mm^2}$

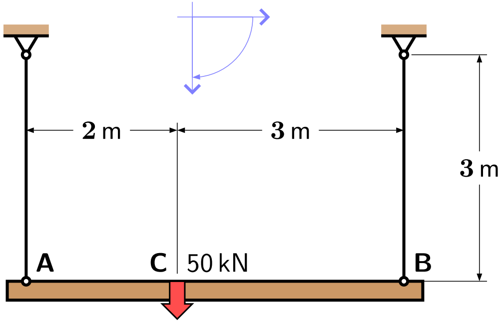


Tabla indeformable suspendida

$$\sum M_A = 0 \qquad \sum M_B = 0$$

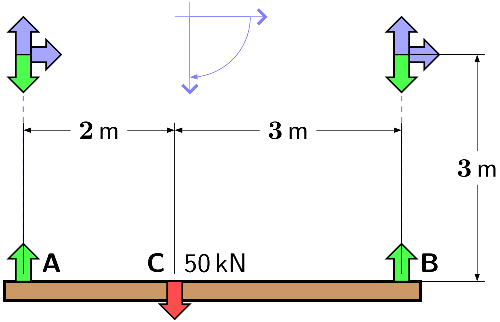


Tabla indeformable suspendida

$$\sum M_A = 0 \qquad \sum M_B = 0$$

$$P \cdot 2\,\mathrm{m} - N_b \cdot 5\,\mathrm{m} = 0$$

$$-P \cdot 3\,\mathrm{m} + N_a \cdot 5\,\mathrm{m} = 0$$

cable	:	a	b	
$\sigma = \dfrac{N}{A}$	:	95.5	63.7	N/mm²
$\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$	:	0.45	0.30	mm/m
$\delta = L \cdot \varepsilon$	:	1.36	0.91	mm

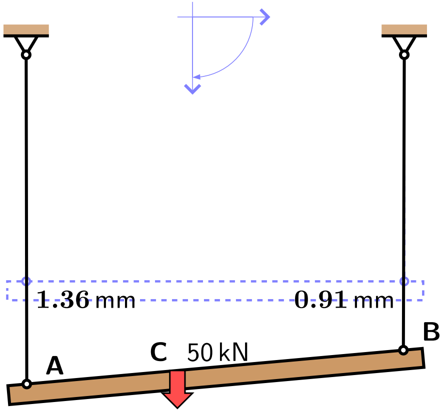


Tabla indeformable suspendida

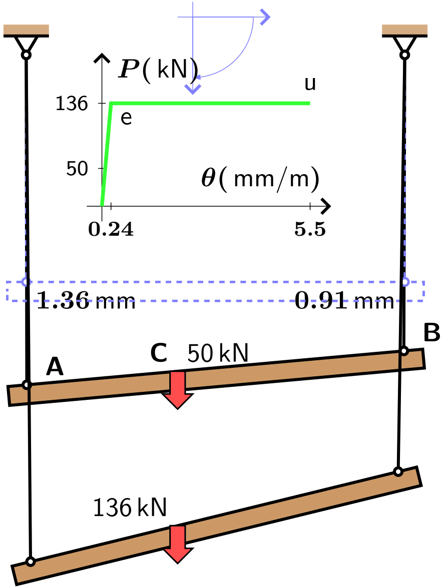
$$\sum M_A = 0 \qquad \sum M_B = 0$$

$$P \cdot 2\,\mathrm{m} - N_b \cdot 5\,\mathrm{m} = 0$$

$$-P \cdot 3\,\mathrm{m} + N_a \cdot 5\,\mathrm{m} = 0$$

cable	:	a	b
$\sigma = \dfrac{N}{A}$	:	95.5	63.7 N/mm^2
$\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$	:	0.45	0.30 mm/m
$\delta = L \cdot \varepsilon$	:	1.36	0.91 mm

$$\lambda_e = \frac{260}{95.5} = 2.72$$



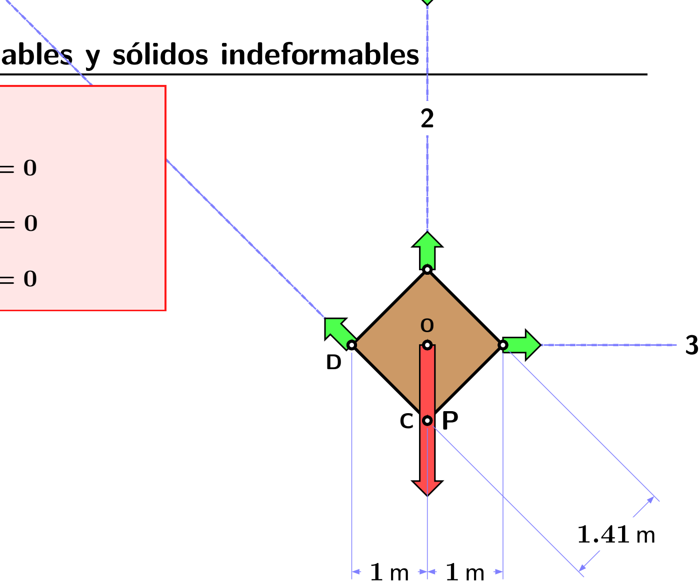
Estructura de cables y sólidos indeformables

Equilibrio

$$\sum M_O = 0$$

$$\sum M_D = 0$$

$$\sum M_C = 0$$



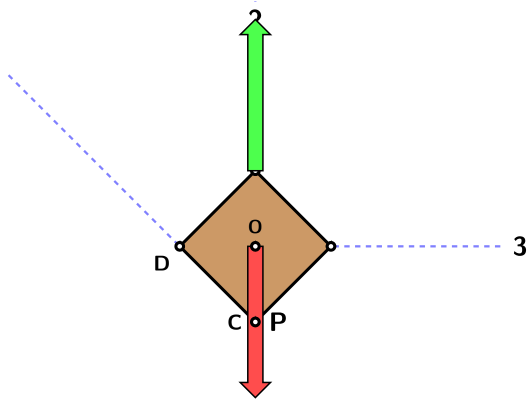
Estructura de cables y sólidos indeformables

Equilibrio

$\sum M_O = 0 \Rightarrow S_1 \cdot 0.71\,\mathrm{m} = 0 \quad S_1 = 0$

$\sum M_D = 0 \Rightarrow -S_2 \cdot 1\,\mathrm{m} + P \cdot 1\,\mathrm{m} = 0 \quad S_2 = P$

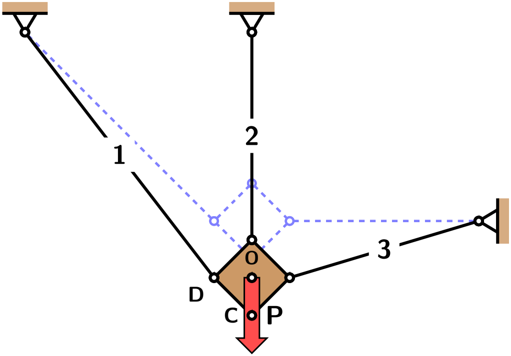
$\sum M_C = 0 \Rightarrow S_3 \cdot 1\,\mathrm{m} = 0 \quad S_3 = 0$



Estructura de cables y sólidos indeformables

Equilibrio

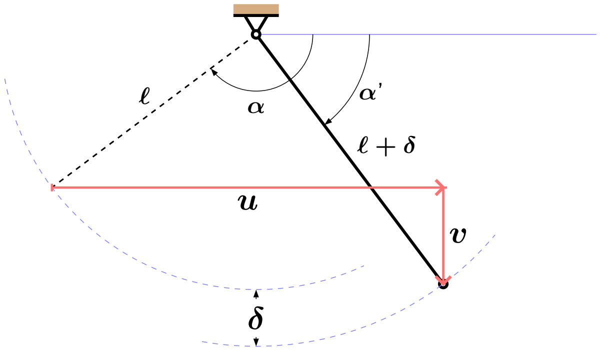
	1	2	3
S	0	P	0
δ	0	δ_2	0



$$¿(u, v, \theta) = (0, -\delta_2, 0)?$$

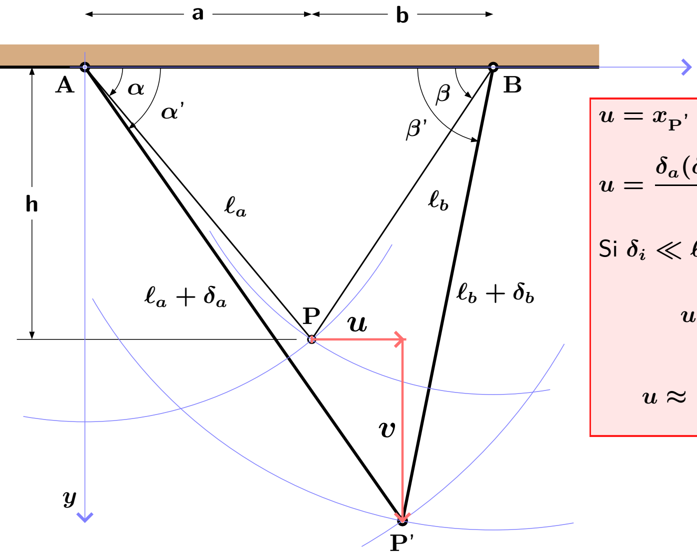
Un cable, dos cables, . . .

Deformación: $\boldsymbol{\delta}$. Movimientos: $\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}$.



Incluso si $\boldsymbol{\delta}$ es pequeño, $\boldsymbol{u}$ o $\boldsymbol{v}$ pueden ser enormes. . .

Un cable, dos cables, ...



$$u = x_{P'} - x_P$$

$$u = \frac{\delta_a(\delta_a + 2\ell_a) - \delta_b(\delta_b + 2\ell_b)}{2x_b}$$

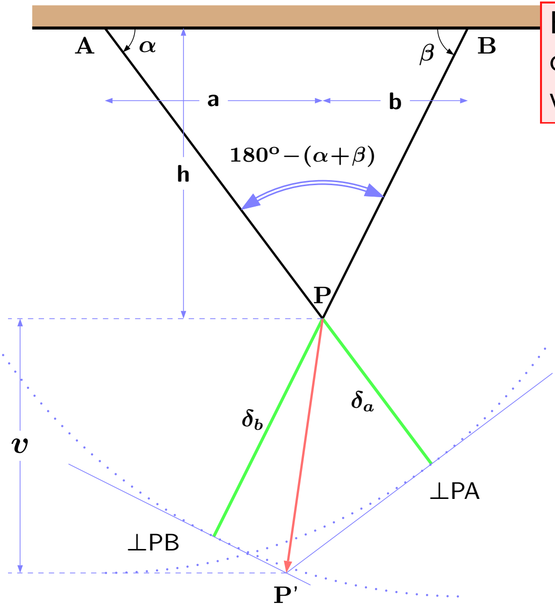
Si $\delta_i \ll \ell_i$ para $i \in \{a, b\}$:

$$u \approx \frac{\delta_a \ell_a - \delta_b \ell_b}{x_b}$$

$$u \approx \frac{\delta_a \sin\beta - \delta_b \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

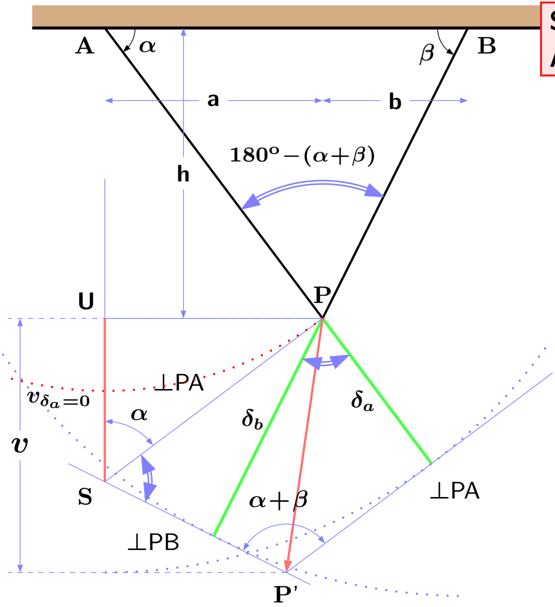
Deformaciones: $\delta_a; \delta_b$. Movimientos: $u; v$.

Un cable, dos cables, ...



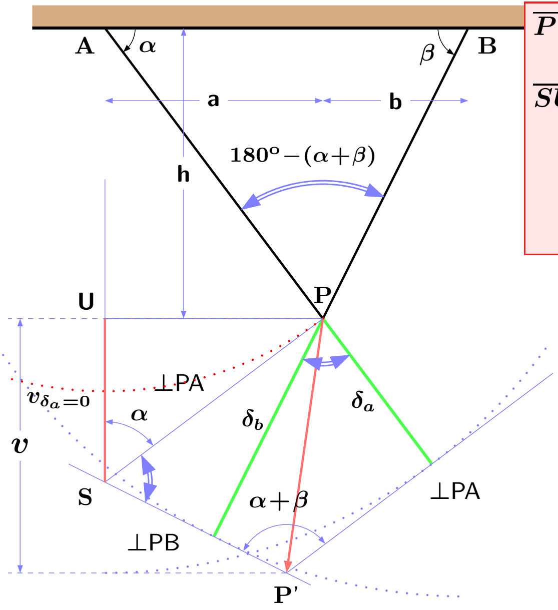
En un dibujo a escala basta con medir las componentes vertical y horizontal de $\mathbf{PP'}$

Un cable, dos cables, . . .



S es el destino de **P** si la barra **AP** fuera indeformable.

Un cable, dos cables, . . .

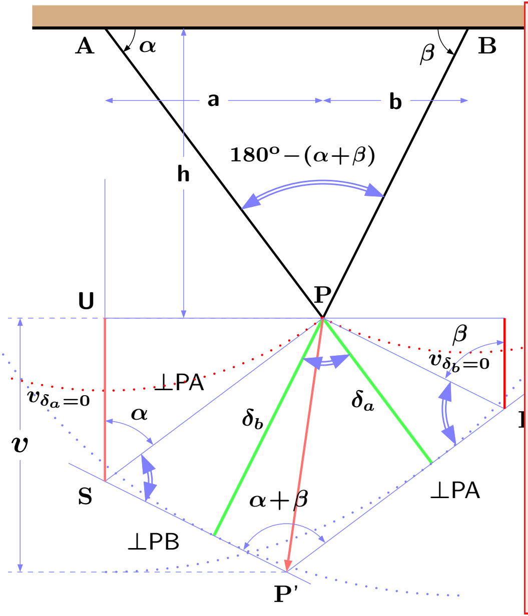


$$\overline{PS} = \delta_b \div \sin\left(180 - (\alpha + \beta)\right)$$

$$\overline{SU} = \overline{PS}\cos\alpha$$

$$v(\delta_a = 0) \approx \frac{\delta_b \times \cos\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Un cable, dos cables, . . .



$$\overline{PS} = \delta_b \div \sin\left(180 - (\alpha+\beta)\right)$$

$$\overline{SU} = \overline{PS}\cos\alpha$$

$$v(\delta_a = 0) \approx \frac{\delta_b \times \cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

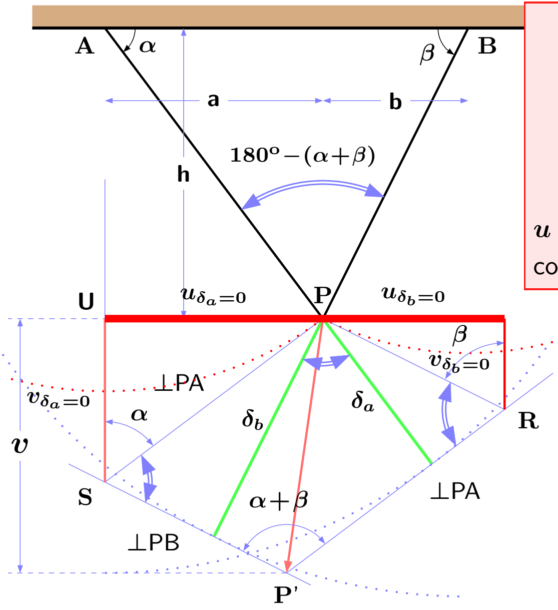
Con el mismo argumento se obtiene $v(\delta_b = 0)$, y finalmente:

$$v \approx \frac{\delta_a \cdot \cos\beta + \delta_b \cdot \cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Resultado 'simétrico' al obtenido para u:

$$u \approx \frac{\delta_a \cdot \sin\beta - \delta_b \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Un cable, dos cables, . . .



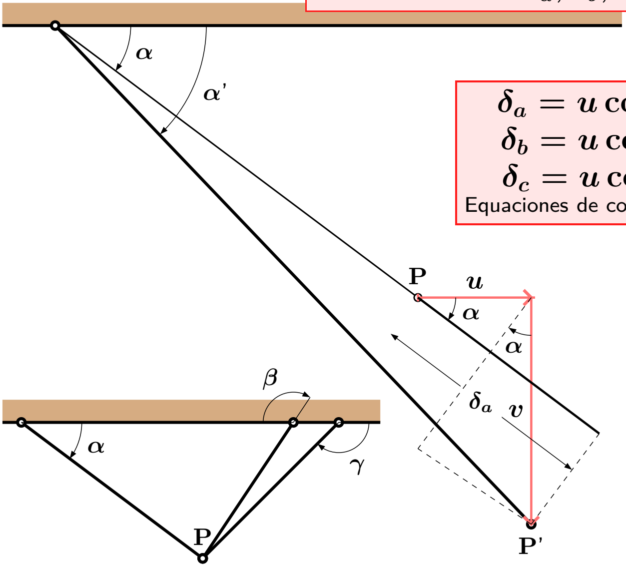
$$v \approx \frac{\delta_a \cdot \cos\beta + \delta_b \cdot \cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$u \approx \frac{\delta_a \cdot \sin\beta - \delta_b \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

u puede obtenerse directamente considerando $u_{\delta_a=0}$ y $u_{\delta_b=0}$.

Un cable, dos cables

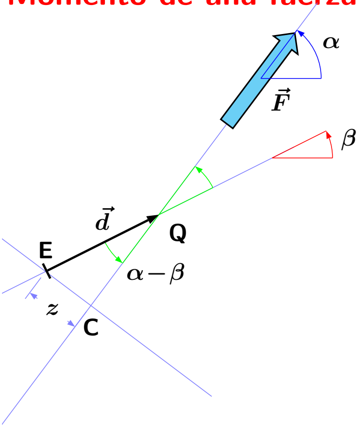
Deformaciones: $\delta_a; \delta_b; \delta_c$. Movimientos: $u; v$.



$$\delta_a = u\cos\alpha + v\sin\alpha$$
$$\delta_b = u\cos\beta + v\sin\beta$$
$$\delta_c = u\cos\gamma + v\sin\gamma$$

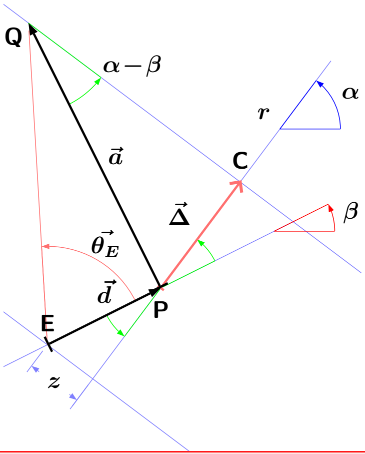
Equaciones de compatibilidad...

Momento de una fuerza



$$\vec{M}_E(\vec{F}) = \vec{F} \times \vec{d}$$
$$M_E = F \cdot d \cdot \sin(\alpha - \beta)$$
$$M_E = F \cdot z$$

Desplazamiento de un giro



$$\vec{a}(\vec{\theta_E}) = \vec{d} \times \vec{\theta_E};\; a = \theta_E \cdot d$$
$$\Delta = \theta_E \cdot d \cdot \sin(\alpha - \beta)$$
$$\Delta = \theta_E \cdot z$$

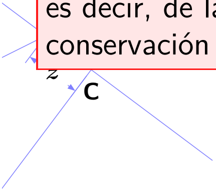
Relaciones mecánicas y cinemáticas

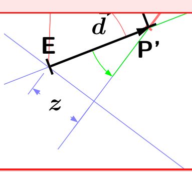
M iro

La relación de “contravarianza” entre la pareja momento y giro y la pareja fuerza y desplazamiento, surge de la necesidad de que el trabajo de una fuerza resulte igual al trabajo de “su” momento:

$$\text{trabajo} = \boldsymbol{M_E \cdot \theta_E = (F \cdot z) \cdot \theta_E = F \cdot (z \cdot \theta_E) = F \cdot \Delta}$$

es decir, de la primera ley de la termodinámica, la de conservación de la energía.





$$\vec{M}_E(\vec{F}) = \vec{F} \times \vec{d}$$
$$M_E = F \cdot d \cdot \sin(\alpha - \beta)$$
$$M_E = F \cdot z$$

$$\vec{a}(\vec{\theta_E}) = \vec{d} \times \vec{\theta_E};\ a = \theta_E \cdot d$$
$$\Delta = \theta_E \cdot d \cdot \sin(\alpha - \beta)$$
$$\Delta = \theta_E \cdot z\ ;\ \vec{\Delta} = \vec{z} \times \vec{\theta_E}$$

Sólido deformable: compatibilidad y equilibrio

Mariano Vázquez Espí

GIAU+S (UPM)
Grupo de Investigación en Arquitectura, Urbanismo y Sostenibilidad
Universidad Politécnica de Madrid
`http://habitat.aq.upm.es/gi`

Edición del 3 de marzo de 2012
Compuesto con *free software*:
GNULinux/LaTeX/`dvips`/`ps2pdf`