Sólido deformable: cables

Mariano Vázquez Espí

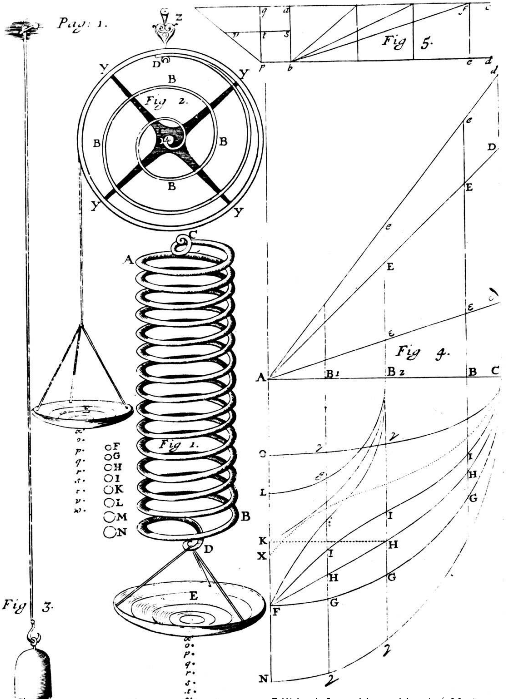
Madrid (España), 12 de febrero de 2020.

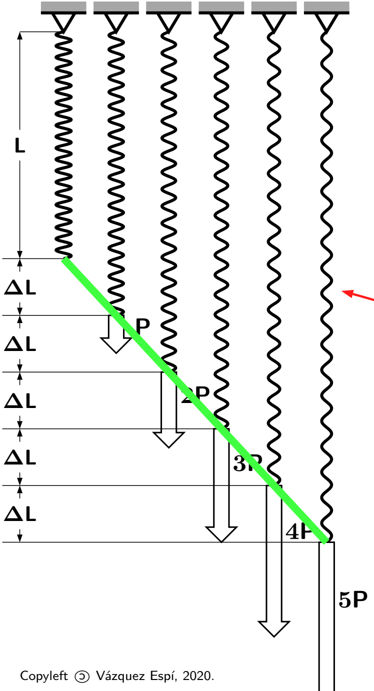
Robert Hooke (1635–1703)
—Físico, astrónomo y naturalista

Entre otras cosas, introdujo el concepto de *célula* y analizó la anatomía de los insectos.

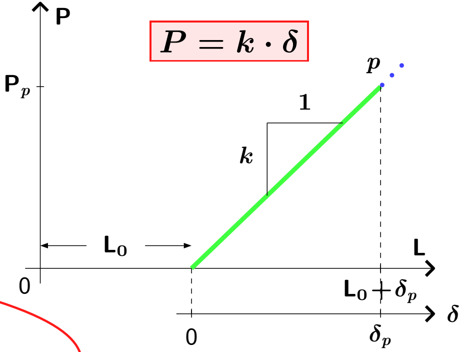
Thomas Young (1773–1829)
—Físico y médico

Entre otras cosas, introdujo el concepto moderno de *energía* y contribuyó a descifrar la escritura jeroglífica egipcia.

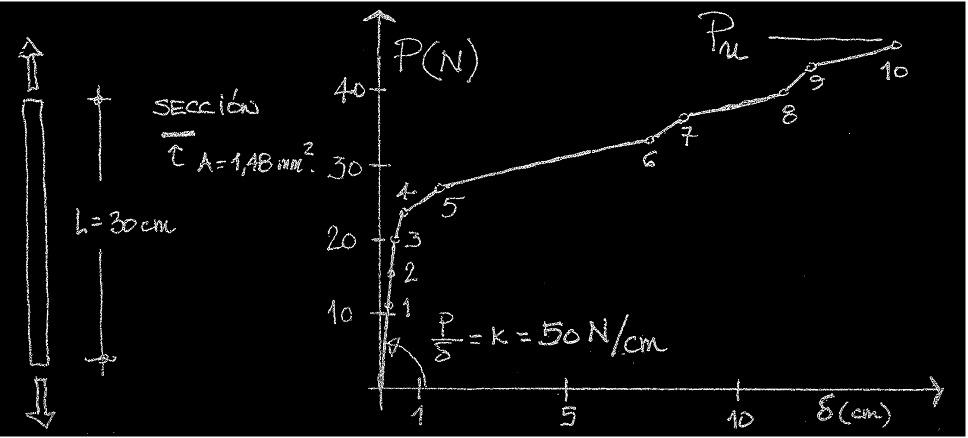




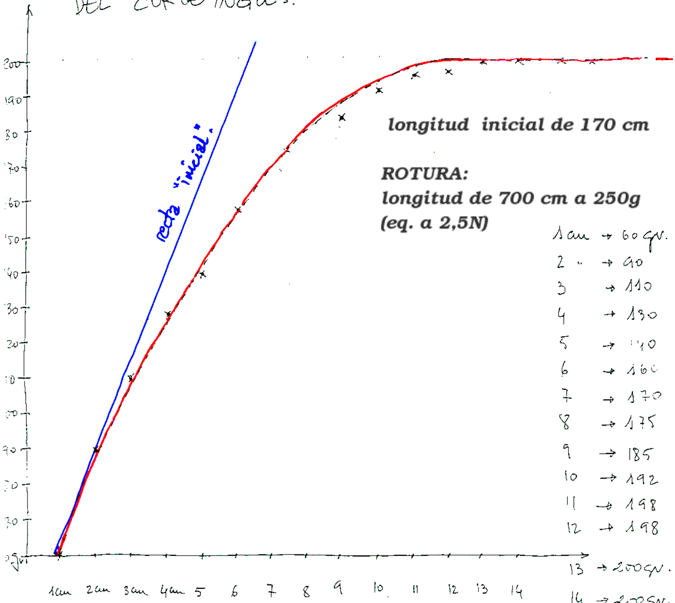
$$\boxed{P = k \cdot \delta}$$



¡el muelle se estrecha!


P(N)
SECCIÓN
A=1,48 mm²
L=30 cm
40
30
20
10
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Pu
P/δ = k = 50 N/cm
1
5
10
δ (cm)

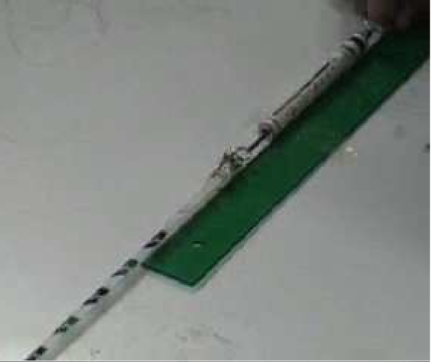
ENSAYO DE TRACCIÓN CON PAPEL DEL CORTE INGLÉS.

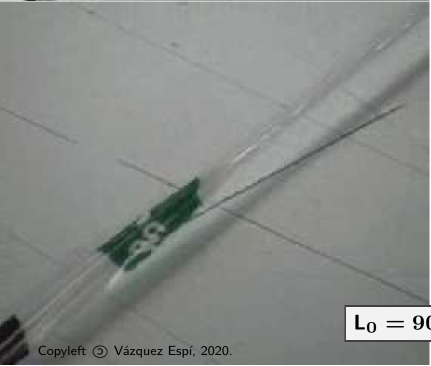


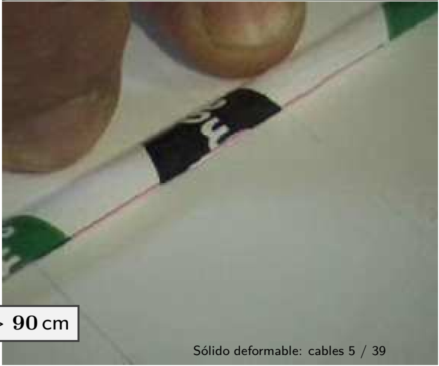
longitud inicial de 170 cm

ROTURA:
longitud de 700 cm a 250g
(eq. a 2,5N)

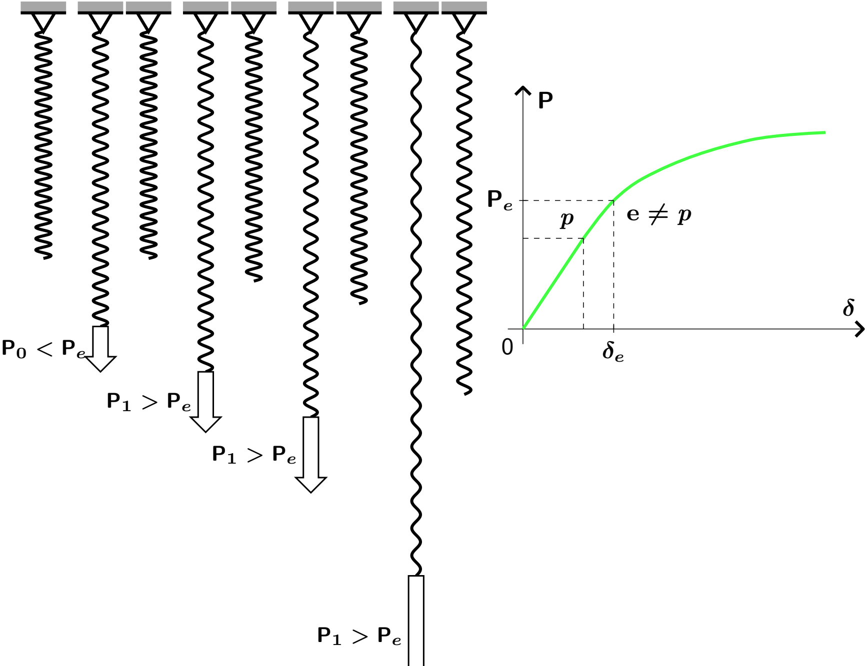
1 cm → 60 gr.
2 · → 90
3 → 110
4 → 130
5 → 140
6 → 160
7 → 170
8 → 175
9 → 185
10 → 192
11 → 198
12 → 198
13 → 200 gr.
14 → 200 gr.

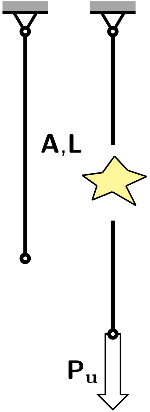


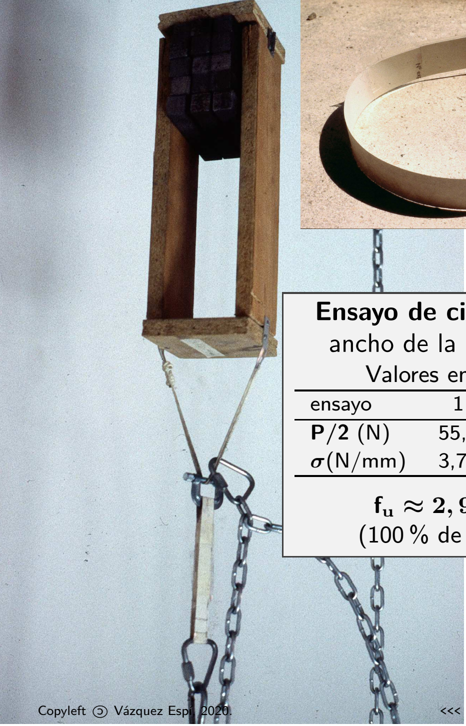


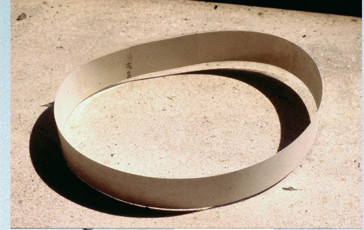


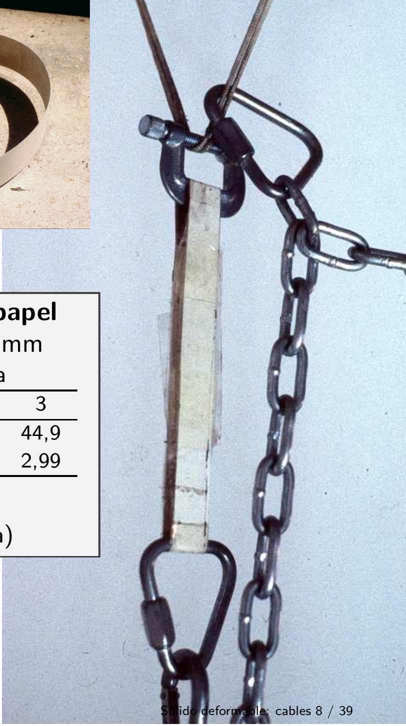
$\mathbf{L_0 = 90}\,\mathrm{cm},\ \boldsymbol{\delta_u > 90}\,\mathrm{cm}$


$\mathsf{P_0} < \mathsf{P}_e$
$\mathsf{P_1} > \mathsf{P}_e$
$\mathsf{P_1} > \mathsf{P}_e$
$\mathsf{P_1} > \mathsf{P}_e$
P
P_e
p
$\mathbf{e} \neq p$
δ
0
δ_e


A,L
$\mathbf{P_u}$







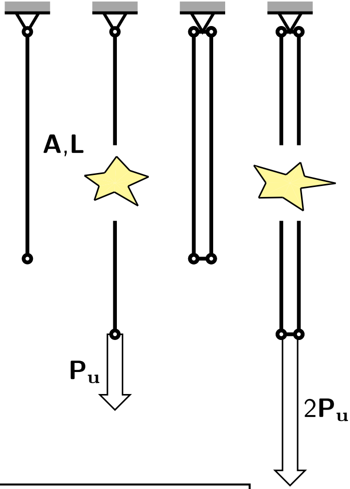
Ensayo de cinta de papel

ancho de la cinta: 15mm

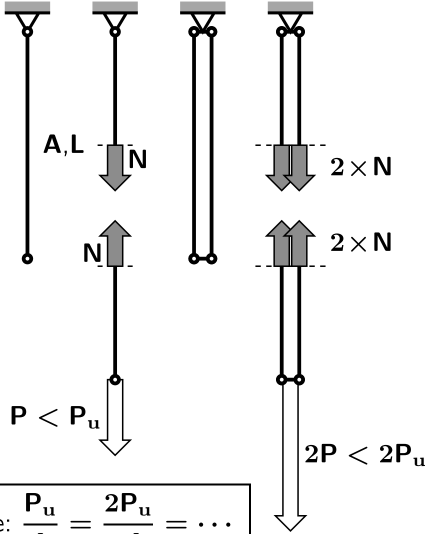
Valores en la rotura

ensayo	1	2	3
$\mathbf{P/2}$ (N)	55,7	56,3	44,9
$\boldsymbol{\sigma}$(N/mm)	3,71	3,75	2,99

$\mathbf{f_u \approx 2,99}$ N/mm
(100 % de confianza)



$$\boxed{\text{cte: } \frac{\mathbf{P_u}}{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{2P_u}}{\mathbf{2A}} = \cdots}$$



$$\boxed{\text{cte: } \frac{P_u}{A} = \frac{2P_u}{2A} = \cdots}$$

Tensión

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{A}} \qquad \left(\text{en este caso } \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{A}}\right)}$$

Fuerza por unidad de área de la sección de la barra. N/m^2(un 'pascal'), N/mm^2, kN/mm^2, etc.

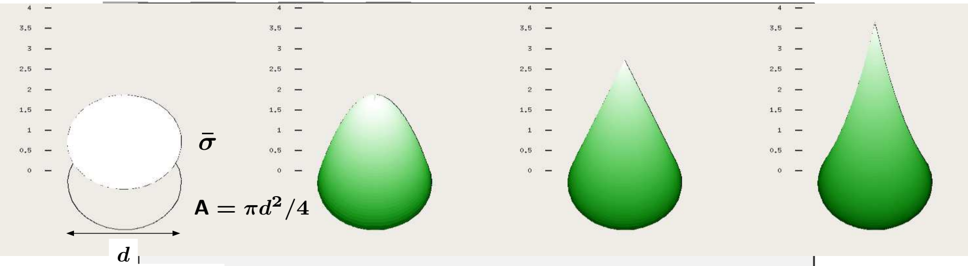
Equilibrio:

$$\mathbf{N} = \int \boldsymbol{\sigma}(x, y)\, \mathrm{d}\mathbf{A}$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\int \boldsymbol{\sigma}(x, y)\, \mathrm{d}\mathbf{A}}{\int \mathrm{d}\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{A}}$$

P

$$\boxed{\text{cte: } \frac{\mathbf{P_u}}{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{2P_u}}{\mathbf{2A}} = \cdots}$$



$\sigma_{\max} = \sigma_{\min} = \bar{\sigma}$ | $\sigma_{\max} = 2\bar{\sigma}$ | $\sigma_{\max} = 3\bar{\sigma}$ | $\sigma_{\max} \approx 3{,}94\bar{\sigma}$

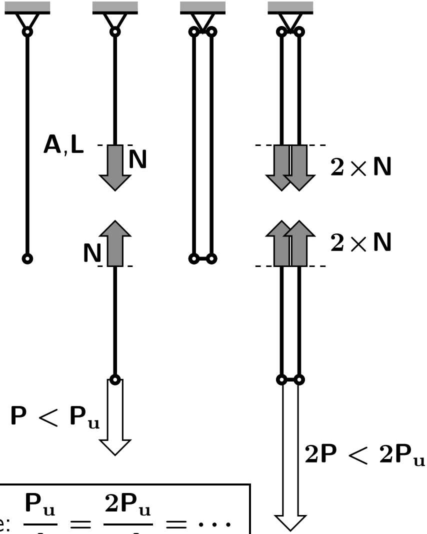
...librio:

$$\mathsf{N} = \int \sigma(x,y)\,\mathrm{d}\mathsf{A}$$

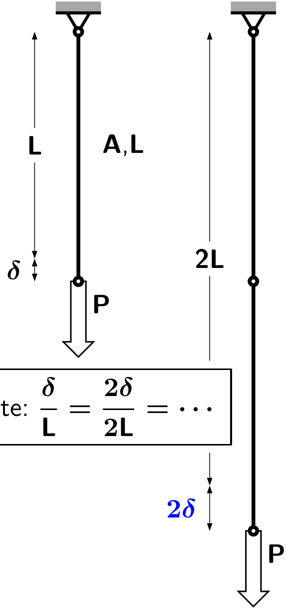
$$\bar{\sigma} = \frac{\int \sigma(x,y)\,\mathrm{d}\mathsf{A}}{\int \mathrm{d}\mathsf{A}} = \frac{\mathsf{N}}{\mathsf{A}}$$

P ...

cte: $\dfrac{\mathsf{P}_u}{\mathsf{A}} = \dfrac{2\mathsf{P}_u}{2\mathsf{A}} = \cdots$



$$\text{cte: } \frac{\mathbf{P_u}}{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{2P_u}}{\mathbf{2A}} = \cdots$$



$$\text{cte: } \frac{\delta}{\mathbf{L}} = \frac{2\delta}{\mathbf{2L}} = \cdots$$

Deformación

$$\boxed{\bar{\varepsilon} = \frac{\delta}{\mathsf{L}}}$$

Alargamiento por unidad de longitud de la barra.
Sin dimensiones (tanto por uno) o en: mm/m, % (cm/m), etc.

Compatibilidad:

$$\delta = \int \varepsilon(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_{\mathsf{L}} \varepsilon(z)\,\mathrm{d}z}{\int_{\mathsf{L}}\,\mathrm{d}z} = \frac{\delta}{\mathsf{L}}$$

P

cte: $\frac{\mathsf{P}}{\mathsf{A}} = \frac{}{2\mathsf{A}} = \cdots$

P

$$\delta = \int \varepsilon(z)\,\mathrm{d}z$$

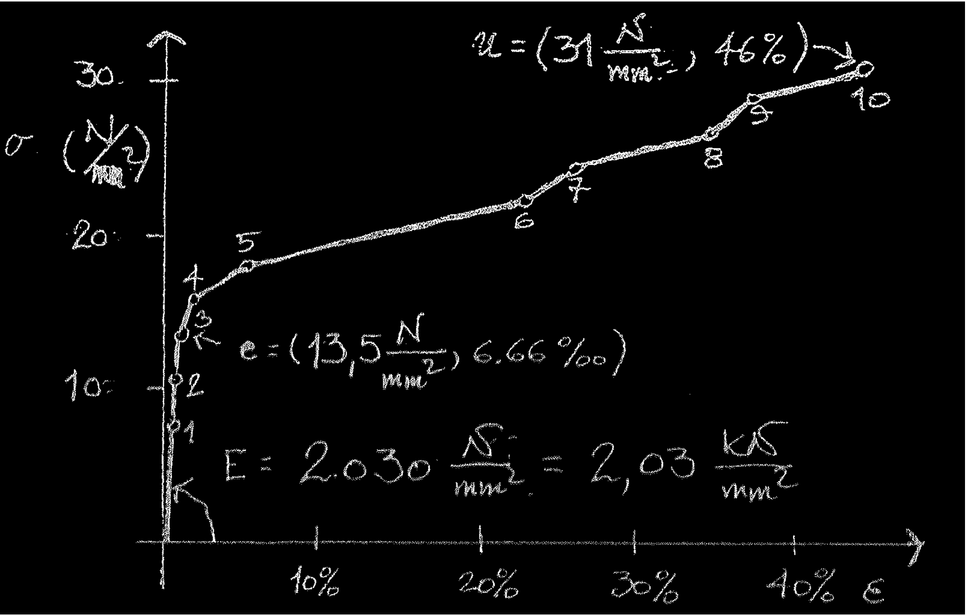
$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_{\mathsf{L}} \varepsilon(z)\,\mathrm{d}z}{\int_{\mathsf{L}}\,\mathrm{d}z} = \frac{\delta}{\mathsf{L}}$$

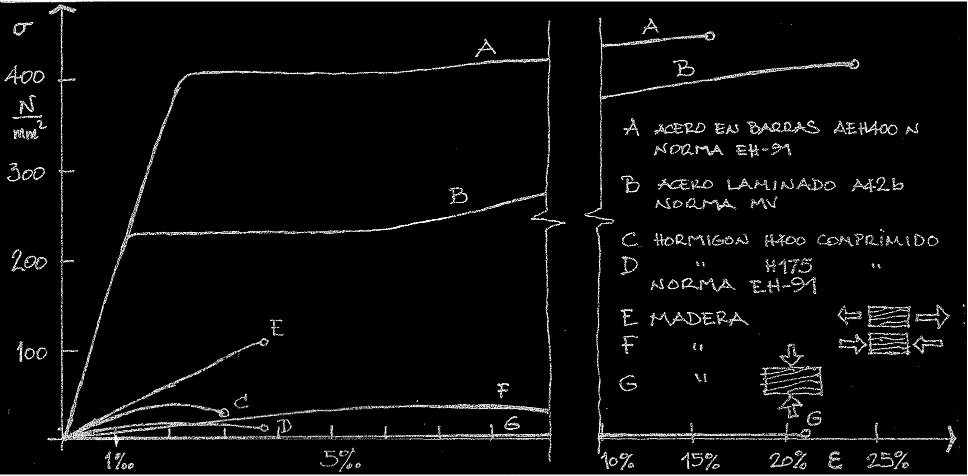
P

cte: $\frac{\mathsf{P}}{\mathsf{A}} = \frac{\quad}{2\mathsf{A}} = \cdots$

P

video: `http://www.aq.upm.es/Departamentos/Estructuras/e96-290/doc/`


$u = (31 \frac{N}{mm^2}, 46\%)$
30
σ (N/mm^2)
20
10
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
$e = (13{,}5 \frac{N}{mm^2}, 6.66 ‰)$
$E = 2.030 \frac{N}{mm^2} = 2{,}03 \frac{kN}{mm^2}$
10%
20%
30%
40%
ε


σ
400
N/mm²
300
200
100
A
B
E
C
F
D
G
1‰
5‰
10%
15%
20%
ε
25%
A ACERO EN BARRAS AEH400 N
NORMA EH-91
B ACERO LAMINADO A42b
NORMA MV
C HORMIGON H400 COMPRIMIDO
D " H175 "
NORMA EH-91
E MADERA
F "
G "

Marco Polo describe un puente piedra a piedra.

¿Pero cual es la piedra que sostiene el puente? —pregunta Kublai Kan.

El puente no está sostenido por esta o aquella piedra, —responde Marco— sino por la línea del arco que forman.

Kublai Kan queda silencioso, reflexionando. De repente, dice:— ¿Por qué me hablas entonces de las piedras? Es sólo el arco lo que me importa.

Polo responde:— Sin piedras no habría arco.

Italo Calvino

Piezas traccionadas

- Comportamiento del material
  - Ley de Hooke: $\mathbf{P} = \mathbf{K}\delta$ si $\mathbf{P} < \mathbf{P}_p$; en otro caso:
  - Plasticidad 'perfecta': $\mathbf{P} = \mathbf{P_u}$ si $\delta_e < \delta < \delta_\mathbf{u}$
- Mientras no se produzca la rotura:
  - Equilibrio: $\mathbf{N} = \mathbf{P}$ (en el caso de cables verticales) y $\sigma = \dfrac{\mathbf{N}}{\mathbf{A}}$ (es decir que $\mathbf{N} = \sigma\mathbf{A}$)
  - Compatibilidad: $\delta = \varepsilon\mathbf{L}$ (y también $\varepsilon = \dfrac{\delta}{\mathbf{L}}$)

En el periodo proporcional:

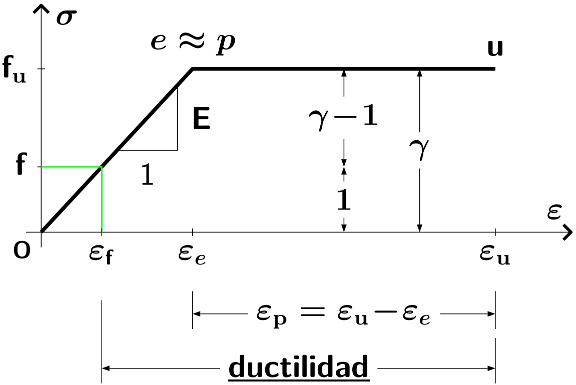
$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{N}}{\delta} = \frac{\sigma\mathbf{A}}{\varepsilon\mathbf{L}} = \frac{\mathbf{EA}}{\mathbf{L}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Modelo elasto-plástico perfecto de los materiales

$$\boldsymbol{\sigma}(\varepsilon)=\begin{cases}\mathbf{E}\varepsilon & \text{si } \varepsilon \leq \varepsilon_e \\ \mathbf{f_u} & \text{si } \varepsilon_e < \varepsilon \leq \varepsilon_\mathbf{u} \\ \mathbf{0} & \text{si } \varepsilon_\mathbf{u} < \varepsilon\end{cases}$$

Tensión segura:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{f_u}}{\gamma}$$



Características importantes de los materiales para las estructuras de los edificios:

- **Ductilidad:** cuanto mayor deformación antes de la rotura, **¡mejor!**

  (cuanto menor, mayor margen de seguridad γ habrá que adoptar)

- **Fiabilidad**

  (cuanto menor, mayor margen de seguridad γ habrá que adoptar)

- **Costes físicos específicos**: energía fósil incorporada (*embodied energy*), emisiones contaminantes, etc, por unidad de cada propiedad mecánica de interés (rigidez $\mathbf{E}$, tensión segura, $\mathbf{f}$, etc). **¡Cuánto menor, mejor!**

$$\left\{\frac{\mathcal{C}}{\mathbf{E}}, \frac{\mathcal{C}}{\mathbf{f}}, \ldots\right\}$$

Modelo 'cable'

En el estado proporcional, sin superar el límite 'elástico':

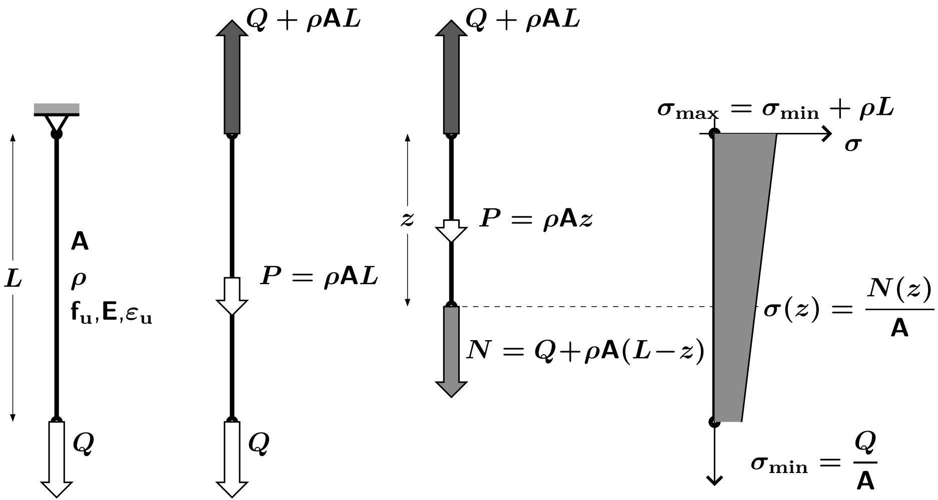
$$\varepsilon = \frac{\delta}{\mathsf{L}}; \qquad \sigma = \mathsf{E}\varepsilon; \qquad \mathsf{N} = \sigma\mathsf{A}; \qquad \text{si } \varepsilon \leq \varepsilon_e.$$

$$\mathsf{K}_{\text{cable}} = \frac{\mathsf{N}}{\delta} = \frac{\sigma\mathsf{A}}{\varepsilon\mathsf{L}} = \frac{\mathsf{EA}}{\mathsf{L}}$$

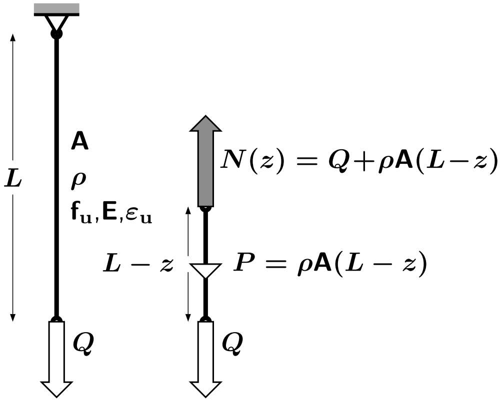
En general:

$$\mathsf{N}(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon < 0 & \text{acortamiento} \\ \mathsf{K}\delta & \text{si } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_e & \text{e. proporcional} \\ \mathsf{f_u A} & \text{si } \varepsilon_e \leq \varepsilon \leq \varepsilon_\mathbf{u} & \text{e. plástico} \\ 0 & \text{si } \varepsilon_\mathbf{u} < \varepsilon & \text{rotura} \end{cases}$$

Cable con peso propio



Resistencia



$$\max_z N(z) = Q + \rho \mathsf{A} L$$

$$\mathsf{A f_u} > \gamma \times (Q + \rho \mathsf{A} L)$$

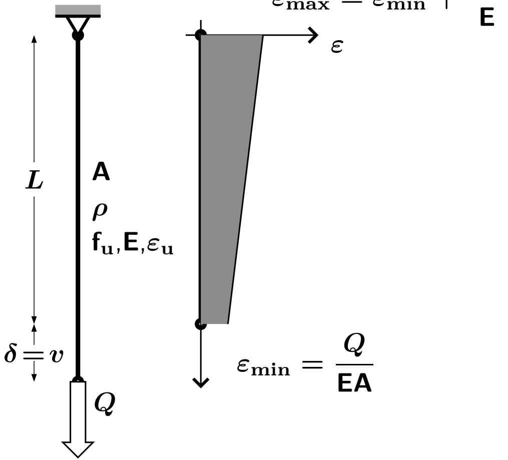
$$\mathsf{A}(\mathsf{f_u} - \gamma \rho L) > \gamma \times Q$$

$$\mathsf{A} > \frac{Q}{\frac{\mathsf{f_u}}{\gamma} - \rho L}$$

$$\mathsf{A} > \frac{Q}{\mathsf{f} - \rho L}$$

$$L \leq \mathcal{A} = \frac{\mathsf{f}}{\rho}$$

Rigidez



$$\delta = \int_L \varepsilon \, \mathrm{d}z$$

$$\delta = \frac{1}{2}(\varepsilon_{\min} + \varepsilon_{\max})L$$

$$\delta = \frac{1}{\mathsf{E}}(\frac{Q}{\mathsf{A}} + \frac{\rho L}{2})L$$

$$v = \delta \leq v_{\mathrm{tol}}$$

$$\mathsf{A} \geq \frac{Q}{\mathsf{E}\dfrac{v_{\mathrm{tol}}}{L} - \dfrac{\rho L}{2}}$$

$$L \leq 2\frac{\mathsf{E}}{\rho}\left(\frac{v}{L}\right)_{\mathrm{tol}}$$

Cuando el peso propio es despreciable (L pequeña)

$$N \approx Q \qquad v = \delta \approx \frac{Q}{\mathsf{EA}} L$$

$$\sigma_t = \frac{Q}{\mathsf{A}} \qquad \varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{\mathsf{E}} \qquad \delta = \varepsilon_t L$$

Resistencia

$$N_{\mathbf{u}} = \mathsf{A}\mathsf{f}_{\mathbf{u}} \geq \gamma Q$$

Diseño: $\mathsf{A} \geq \dfrac{\gamma Q}{\mathsf{f}_{\mathbf{u}}} = \dfrac{Q}{\mathsf{f}}$

Peritaje: $\dfrac{\gamma Q}{\mathsf{A}} \leq \mathsf{f}_{\mathbf{u}}$

$$\sigma_t = \frac{Q}{\mathsf{A}} \leq \frac{\mathsf{f}_{\mathbf{u}}}{\gamma} = \mathsf{f}$$

Rigidez

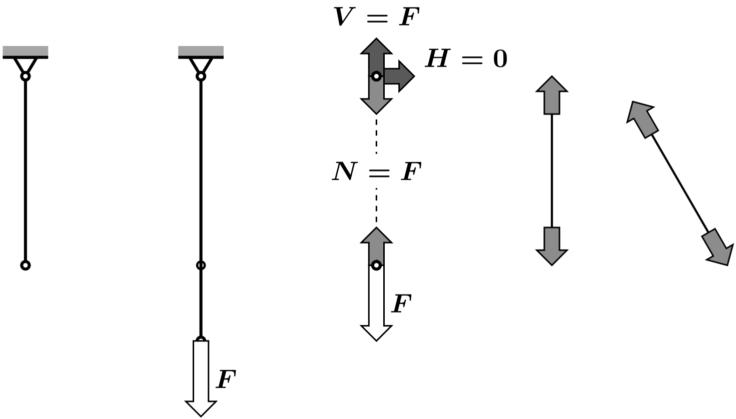
$$v = \delta \leq v_{\mathbf{tol}}$$

Diseño: $\mathsf{A} \geq \dfrac{Q}{\mathsf{E}\dfrac{v_{\mathbf{tol}}}{L}}$

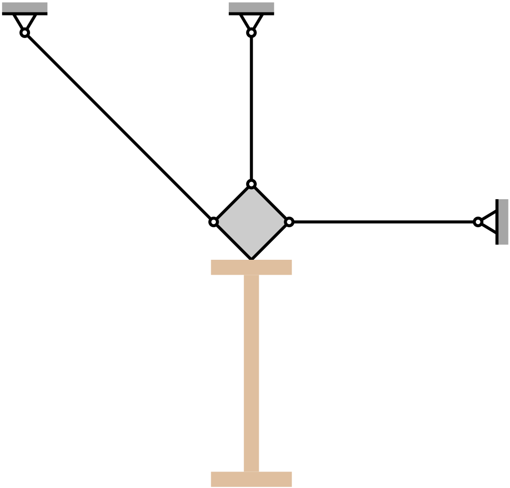
Peritaje: $\varepsilon_t \leq \dfrac{v_{\mathbf{tol}}}{L} = \varepsilon_{\mathbf{tol}}$

$$\sigma_t \leq \sigma_{\mathbf{tol}}$$

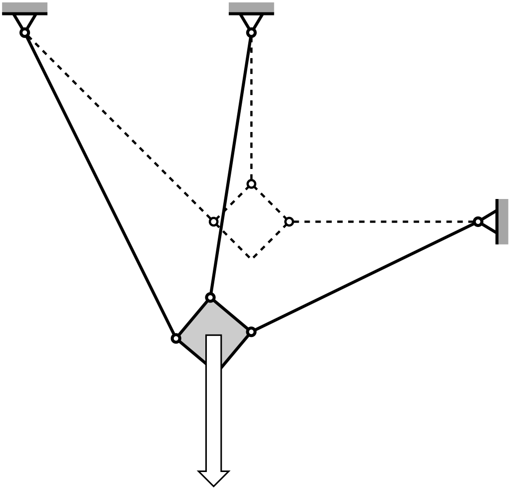
Modelo 'cable'



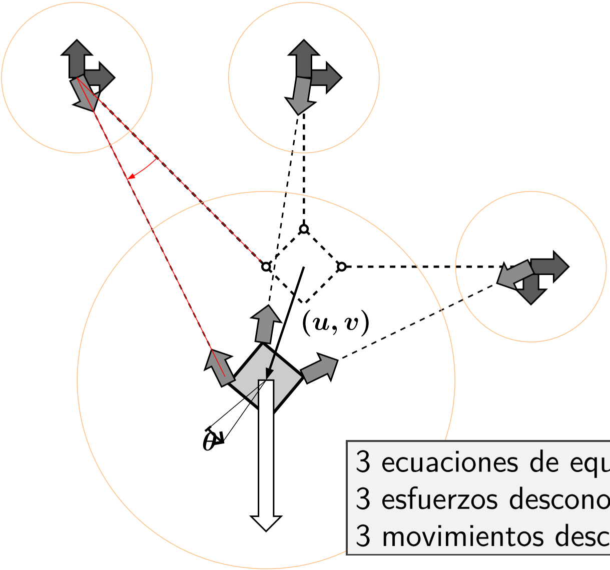
Estructura de cables y sólidos indeformables



Estructura de cables y sólidos indeformables



Estructura de cables y sólidos indeformables



3 ecuaciones de equilibrio
3 esfuerzos desconocidos
3 movimientos desconocidos

«Hipótesis de desplazamientos pequeños»

El requisito de rigidez impone que los movimientos sean mucho más pequeños que el tamaño $\boldsymbol{T}$ o la proporción $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{u} \ll \boldsymbol{T} \qquad \boldsymbol{v} \ll \boldsymbol{T} \qquad \qquad \tan\boldsymbol{\theta} \ll \boldsymbol{P}$$

Si $\boldsymbol{\theta} \to \mathbf{0}$, *puede sustituirse el arco por la tangente*.

$$\cos(\boldsymbol{\theta}) \approx 1$$

$$\overline{\mathsf{BC}} \approx 0 \qquad \overline{\mathsf{AB}} \approx \overline{\mathsf{AC}}$$

$$\widehat{\mathsf{DB}} \approx \overline{\mathsf{DC}}$$

Con $\boldsymbol{\theta}$ en *radianes*:

$$\boldsymbol{\theta} \approx \sin(\boldsymbol{\theta}) \approx \tan(\boldsymbol{\theta}).$$

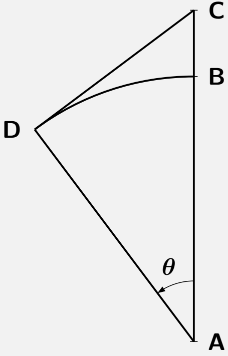


Tabla indeformable suspendida

acero corriente:

$$\mathbf{E} = \mathbf{210}\,\mathrm{kN/mm^2}$$
$$\mathbf{f_u} = \mathbf{260}\,\mathrm{N/mm^2}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{u} = \mathbf{10}\,\mathrm{mm/m}$$

Barras de 20 mm de diámetro;
$\mathbf{A} = \mathbf{314}\,\mathrm{mm^2}$

¿Es la sustentación **suficiente**?

¿Es la estructura **suficiente**?
¿Es **isostática**?

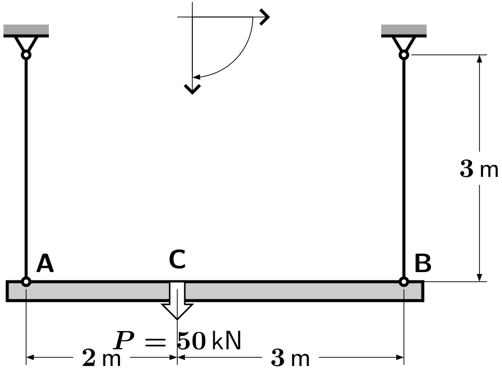


Tabla indeformable suspendida

$$\sum M_A = 0 \qquad \sum M_B = 0$$

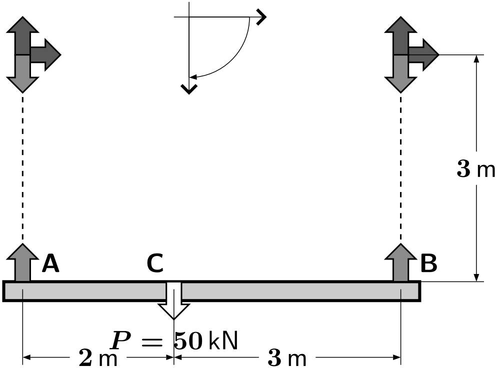


Tabla indeformable suspendida

$$\sum M_A = 0 \qquad \sum M_B = 0$$

$$P \cdot 2\,\mathrm{m} - N_b \cdot 5\,\mathrm{m} = 0$$

$$-P \cdot 3\,\mathrm{m} + N_a \cdot 5\,\mathrm{m} = 0$$

$$N_b = \frac{2}{5}P$$

$$N_a = \frac{3}{5}P$$

Para $P = 50\,\mathrm{kN}$ (situación de servicio, carga real):

$$N_a = 30\,\mathrm{kN} \qquad N_b = 20\,\mathrm{kN}$$

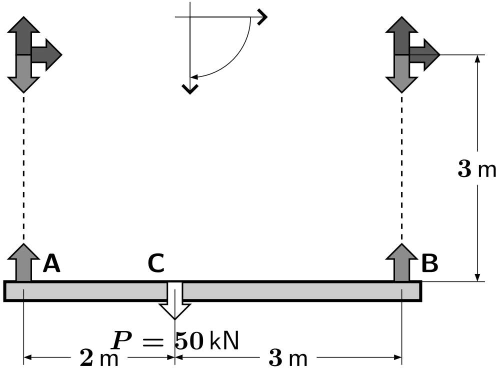


Tabla indeformable suspendida

$$\sum M_A = 0 \qquad \sum M_B = 0$$

Para $P = 50\,\text{kN}$ (situación de servicio, carga real):

$$N_a = 30\,\text{kN} \qquad N_b = 20\,\text{kN}$$

cable	:	a	b	
$\sigma = \dfrac{N}{A}$	:	$95{,}5$	$63{,}7$	N/mm^2
$\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$	:	$0{,}45$	$0{,}30$	mm/m
$\delta = L \cdot \varepsilon$	:	$1{,}36$	$0{,}91$	mm

$$\theta \approx -\frac{1{,}36\,\text{mm} - 0{,}91\,\text{mm}}{5\,\text{m}}$$

$$\theta \approx -0{,}09\,\text{mrad}$$

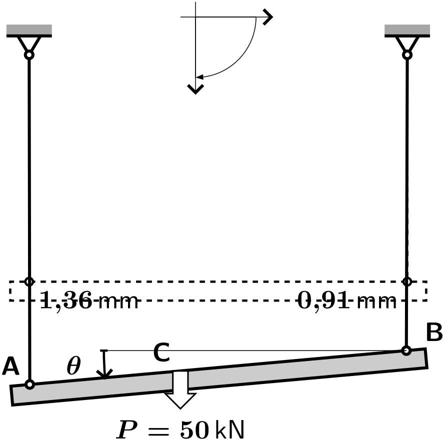


Tabla indeformable suspendida

$$\sum M_A = 0 \qquad \sum M_B = 0$$

Para $P = 50\,\text{kN}$ (situación de servicio, carga real):

$$N_a = 30\,\text{kN} \qquad N_b = 20\,\text{kN}$$

cable	: a	b
$\sigma = \dfrac{N}{A}$	: $95{,}5$	$63{,}7$ N/mm^2
$\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$	: $0{,}45$	$0{,}30$ mm/m
$\delta = L \cdot \varepsilon$	: $1{,}36$	$0{,}91$ mm

$$\theta \approx -0{,}09\,\text{mrad}$$

$$\delta_c = \delta_b - \theta \times 3\,\text{m} = 1{,}18\,\text{mm}$$

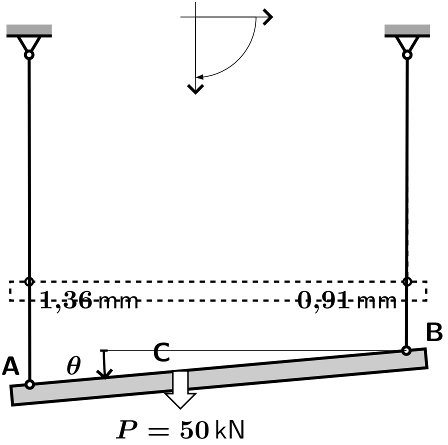


Tabla indeformable suspendida

$$\sum M_A = 0 \qquad \sum M_B = 0$$

Para $P = 50\,\mathrm{kN}$ (situación de servicio, carga real):

$$N_a = 30\,\mathrm{kN} \qquad N_b = 20\,\mathrm{kN}$$

cable	:	a	b	
$\sigma = \dfrac{N}{A}$	:	$95{,}5$	$63{,}7$	N/mm²
$\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$	:	$0{,}45$	$0{,}30$	mm/m
$\delta = L \cdot \varepsilon$	:	$1{,}36$	$0{,}91$	mm

$$\theta \approx -0{,}09\,\mathrm{mrad}$$

$$\lambda_c = \frac{260\,\mathrm{N/mm^2}}{\quad} = 2{,}72$$

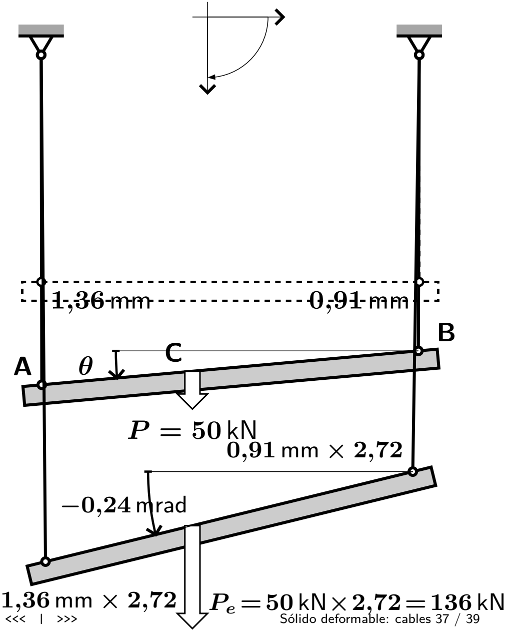


Tabla indeformable suspendida

$$P_e = 136\,\text{kN}$$

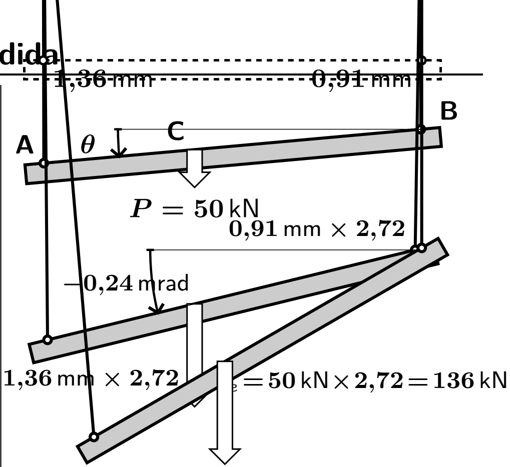
cable	:	a	b	
N	:	$81{,}6$	$54{,}4$	kN
$\sigma = \dfrac{N}{A}$	:	260	173	N/mm^2
$\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$	:	$1{,}24$	$0{,}82$	mm/m
$\delta = L \cdot \varepsilon$	:	$3{,}70$	$2{,}48$	mm

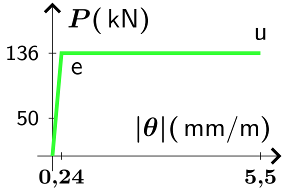
<u>Rotura del cable a</u>

$\delta_a = 10\,\text{mm/m} \times 3\,\text{m} = 30\,\text{mm}$

¡$\delta_b = 2{,}48\,\text{mm}$!

$$\theta_u \approx -\frac{30\,\text{mm} - 2{,}48\,\text{mm}}{5\,\text{m}} = \\ = -5{,}5\,\text{mrad}$$





Sólido deformable: cables

Mariano Vázquez Espí

GIAU+S (UPM)
Grupo de Investigación en Arquitectura, Urbanismo y Sostenibilidad
Universidad Politécnica de Madrid
`http://habitat.aq.upm.es/gi`

Edición del 12 de febrero de 2020
compuesto con *free software*:
GNULinux/LaTeX/`dvips/ps2pdf`

Si no se lo creen...