

Estructuras I

Estructuras trianguladas: Resistencia

Mariano Vázquez Espí

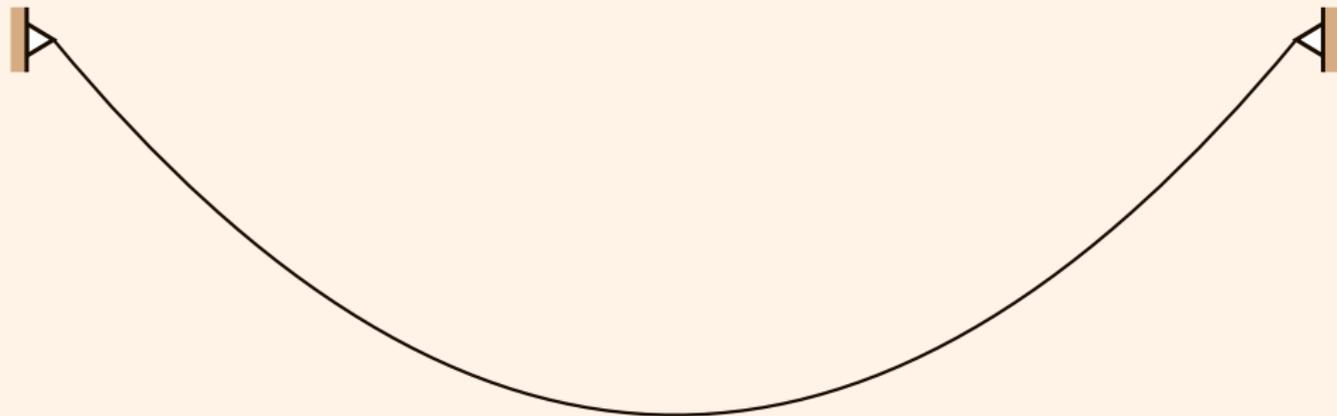
Villamanta/Ondara/Madrid, 2012–2020

Un conjunto de ecuaciones lineales puede clasificarse como:

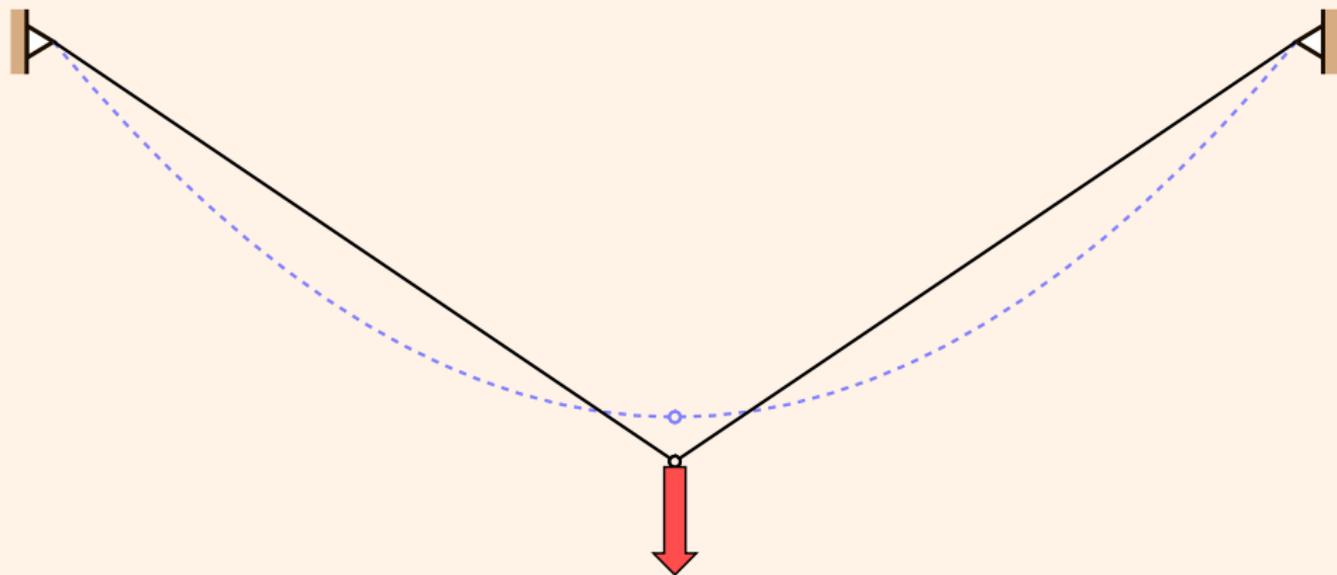
- **conjunto compatible** si tiene solución, y en este caso:
 - conjunto compatible **determinado** cuando tiene una única solución.
 - conjunto compatible **indeterminado** cuando admite infinitas soluciones.

- **conjunto incompatible**, si no tiene solución.

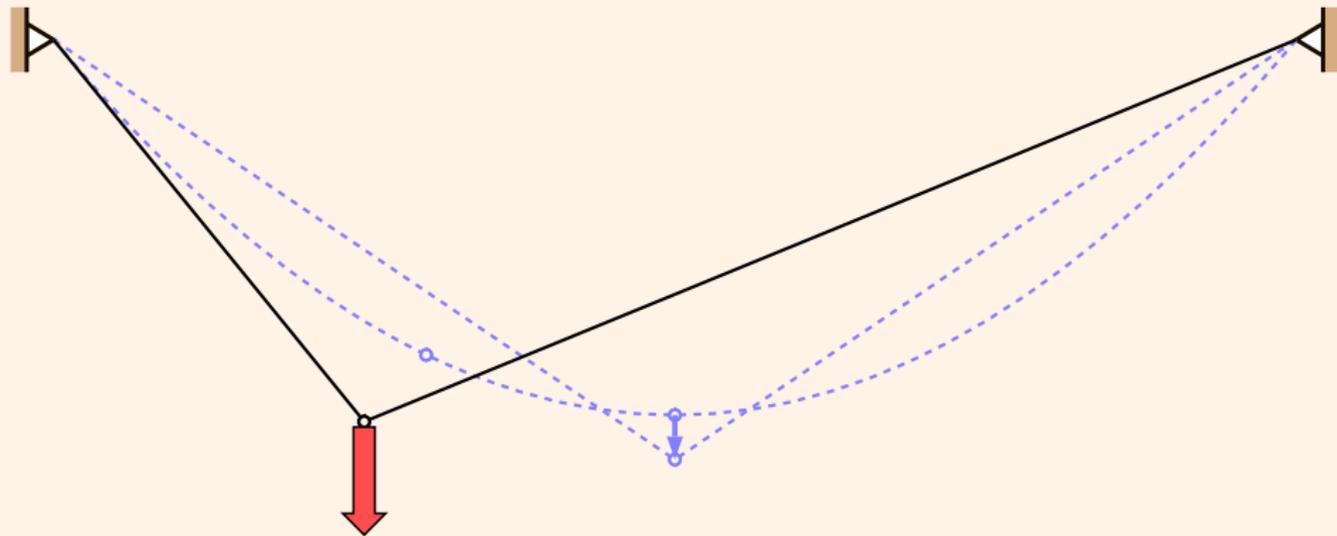
funiculares *versus* cerchas



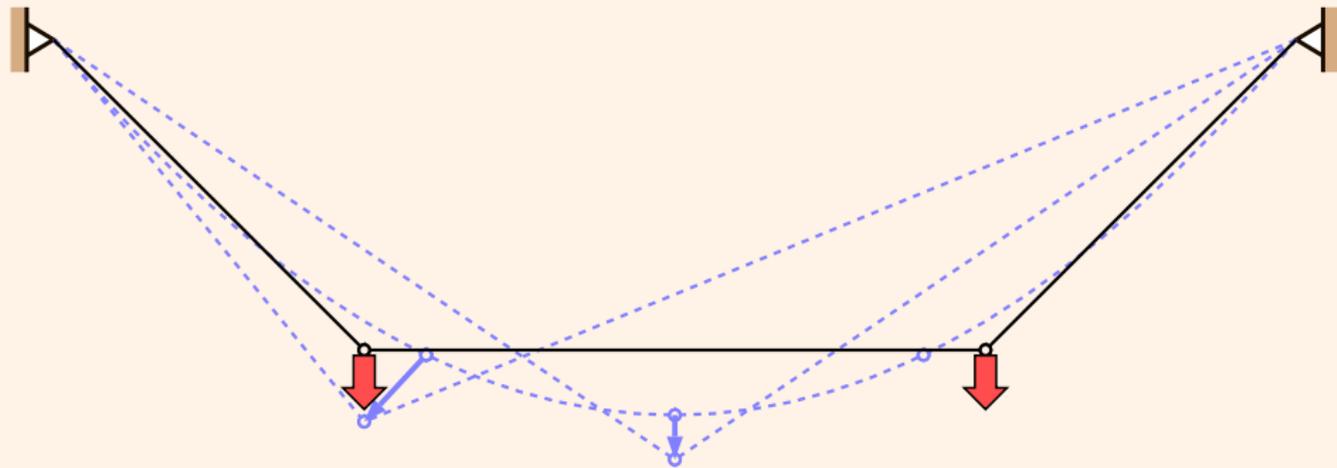
funiculares *versus* cerchas



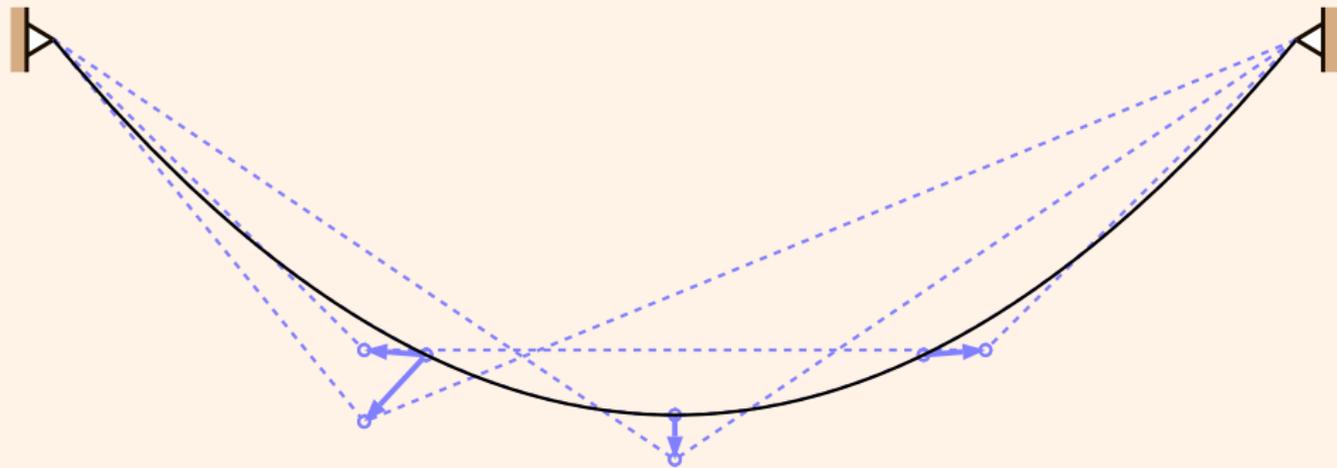
funiculares *versus* cerchas



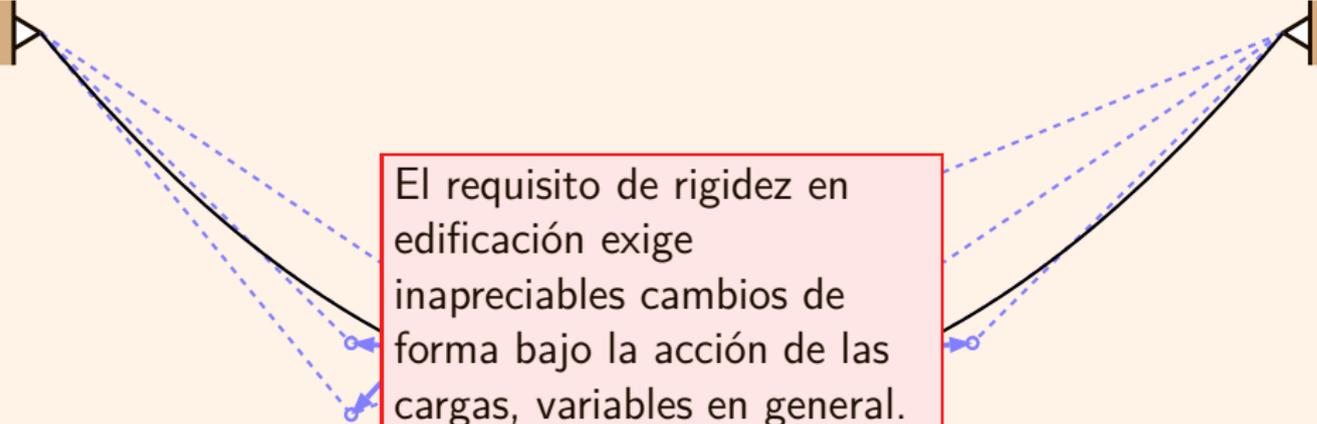
funiculares *versus* cerchas



funiculares *versus* cerchas

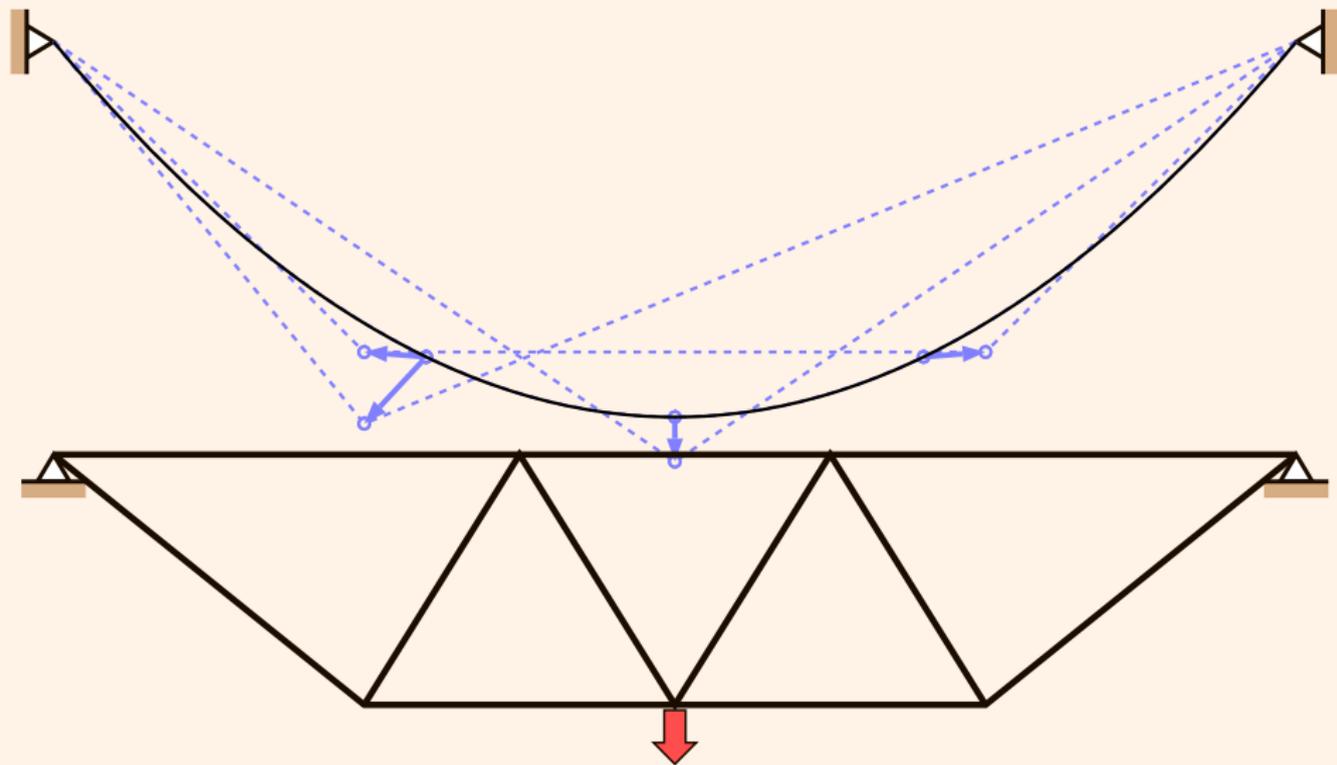


funiculares *versus* cerchas

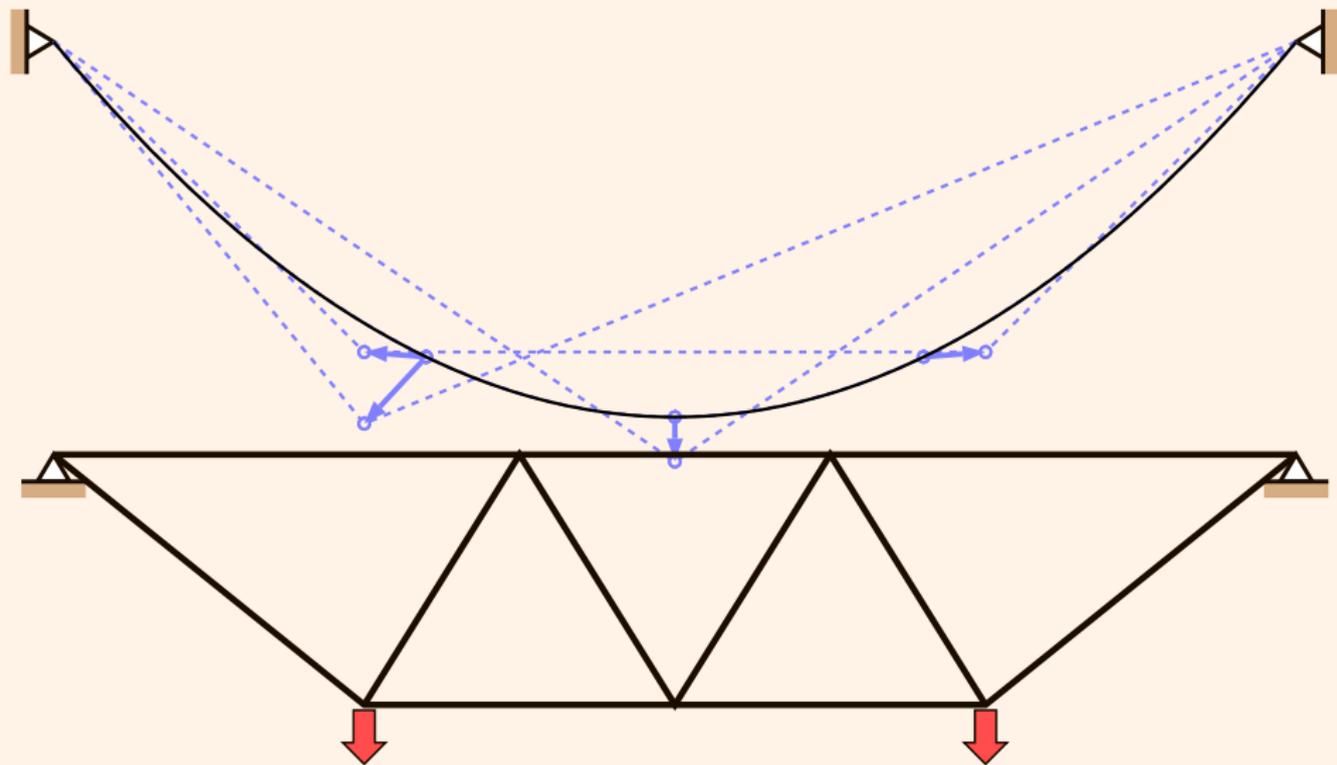


El requisito de rigidez en edificación exige inapreciables cambios de forma bajo la acción de las cargas, variables en general. Los funiculares sólo sirven para cargas constantes (por ejemplo, su propio peso).

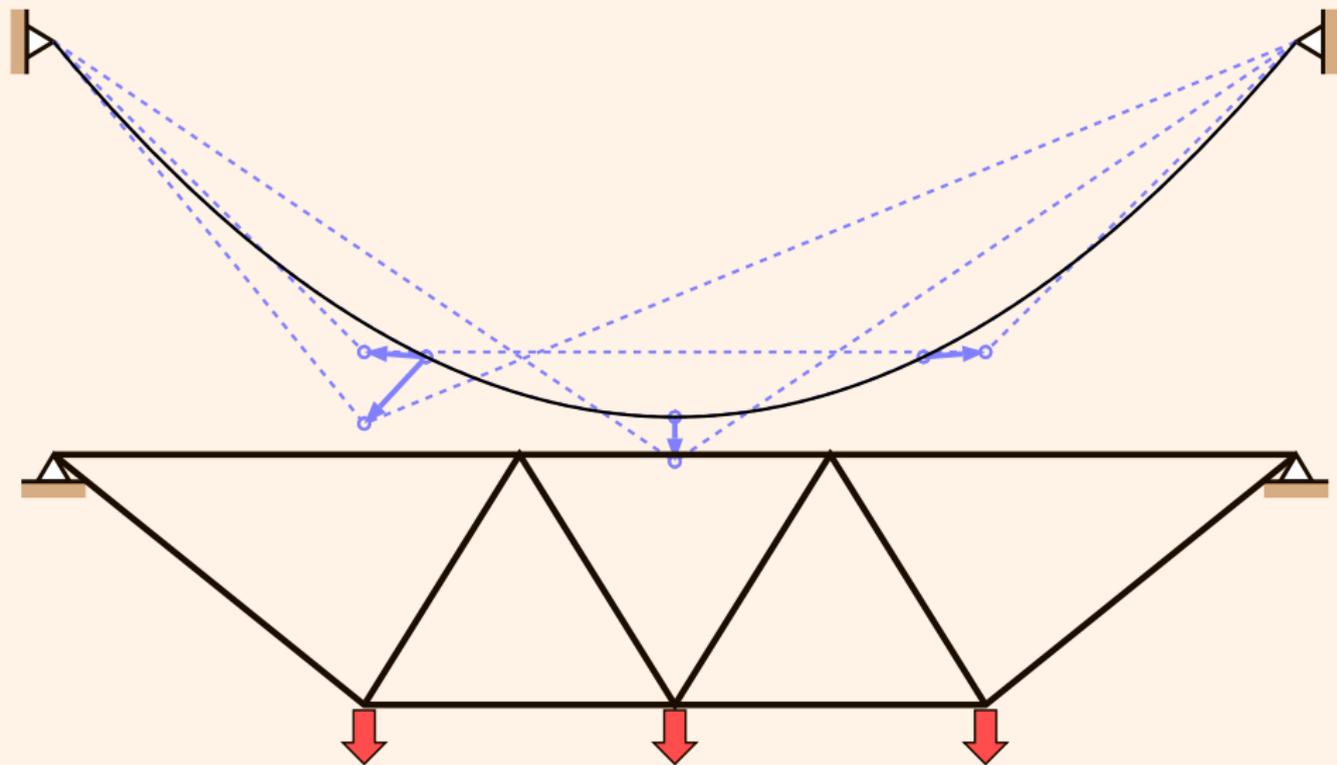
funiculares *versus* cerchas



funiculares versus cerchas



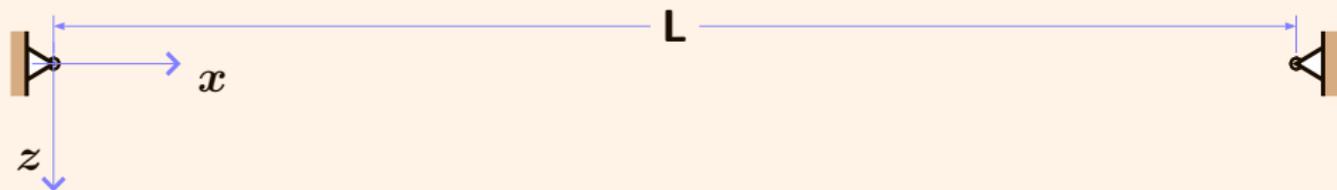
funiculares versus cerchas



funiculares *versus* cerchas

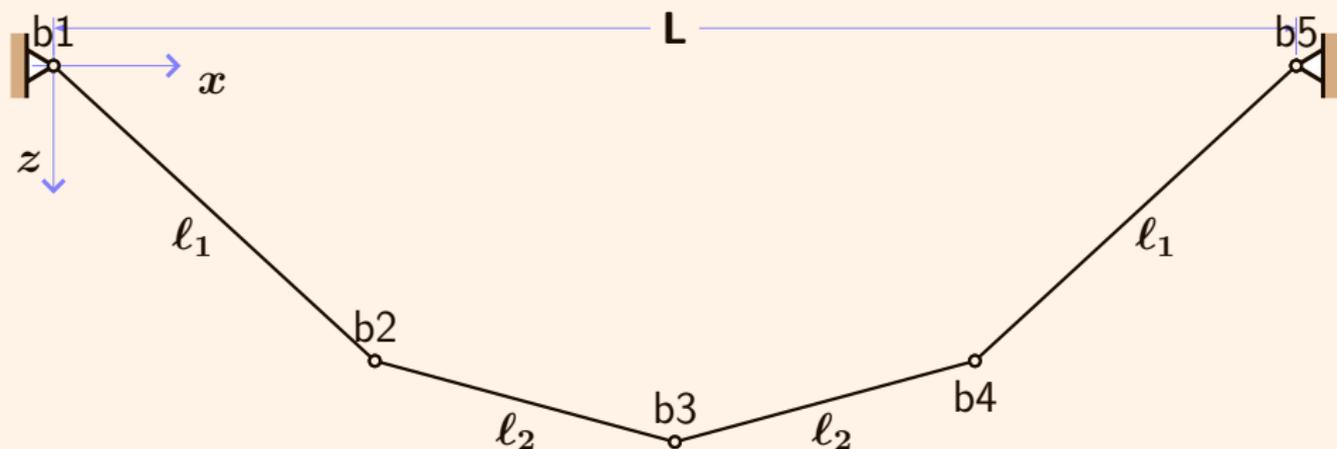
Juguemos en lo que sigue con conjuntos de barras inextensibles, de longitudes arbitrarias, apoyadas en una sustentación definida mediante vínculos teóricos, y veamos que tipos de formas estructurales podemos construir con ellas.

funiculares *versus* cerchas



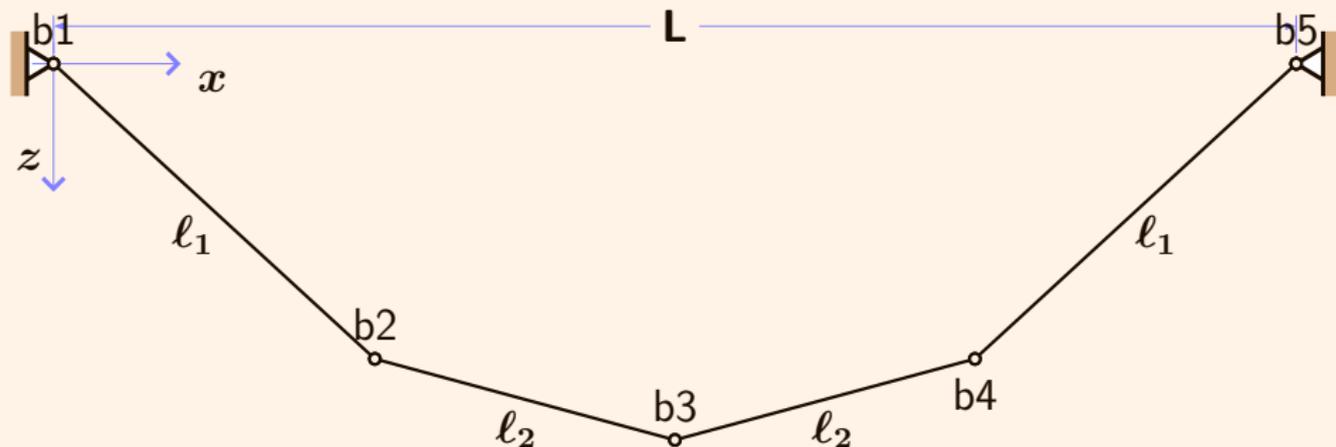
○ $\overset{\ell_1}{\text{-----}}$ ○ 2 piezas de 35,2 dm
○ $\overset{\ell_2}{\text{-----}}$ ○ 2 piezas de 25 dm

funiculares *versus* cerchas



○ l_1 ○ 2 piezas de 35,2 dm
○ l_2 ○ 2 piezas de 25 dm

funiculares *versus* cerchas



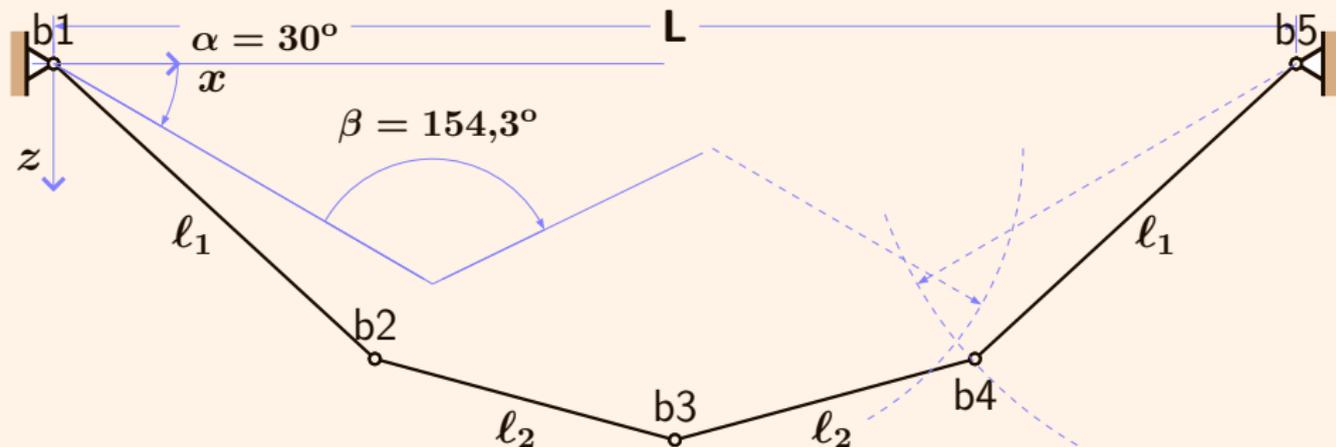
Incógnitas del dibujo: coordenadas x, y : $5 \text{ puntos} \times 2 = 10$

Ecuaciones: 8

- sustentación: $x_1 = y_1 = y_5 = 0, x_5 = L$: 4 ecuaciones
- longitudes conocidas (por 'Pitágoras'):
 $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = l_1$, etc: 4 ecuaciones

$10 - 8 = 2$: 2 grados de libertad geométrica

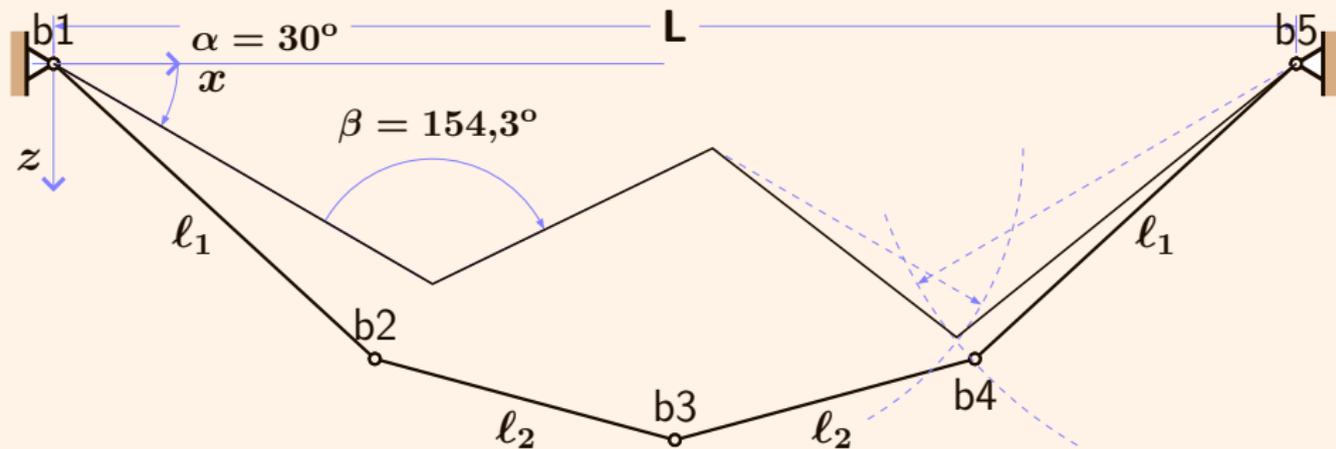
funiculares *versus* cerchas



Los parámetros que definen una forma concreta pueden elegirse: en la figura, por ejemplo, podrían ser los ángulos α y β . Estos dos ángulos, junto con las cuatro longitudes fijas, determinan completamente todas las coordenadas desconocidas de los puntos 2, 3 y 4. (Las soluciones para las coordenadas (x, y) pueden ser números complejos y el dibujo inexistente en el plano 2D ordinario.)

Forma compatible indeterminada (funicular, mecanismo,...)

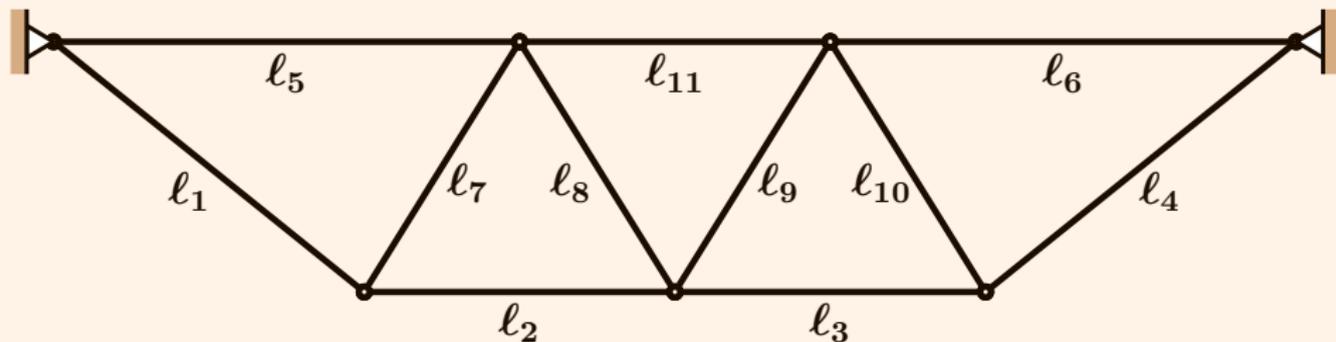
funiculares *versus* cerchas



Los parámetros que definen una forma concreta pueden elegirse: en la figura, por ejemplo, podrían ser los ángulos α y β . Estos dos ángulos, junto con las cuatro longitudes fijas, determinan completamente todas las coordenadas desconocidas de los puntos 2, 3 y 4. (Las soluciones para las coordenadas (x, y) pueden ser números complejos y el dibujo inexistente en el plano 2D ordinario.)

Forma compatible indeterminada (funicular, mecanismo,...)

funiculares *versus* cerchas



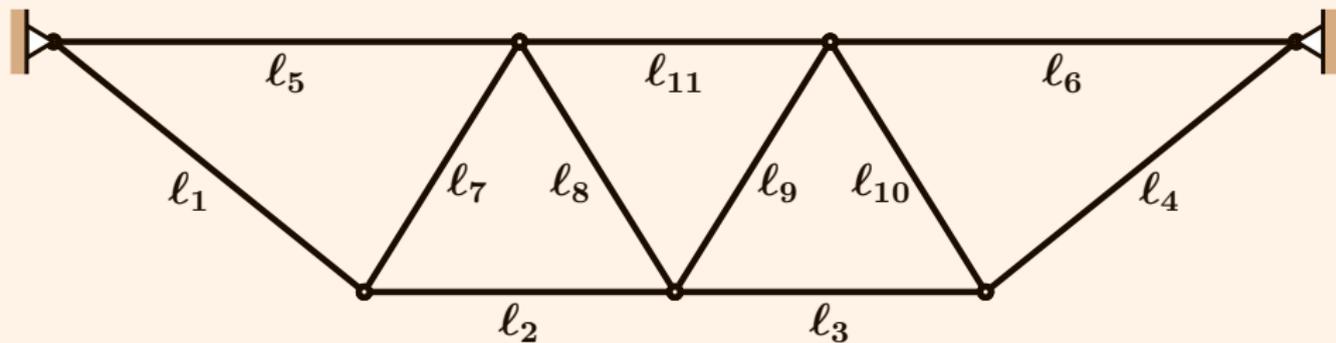
Incógnitas: $7 \text{ puntos} \times 2 = 14$.

Ecuaciones: 15:

- Sustentación: 4
- Longitudes: 11

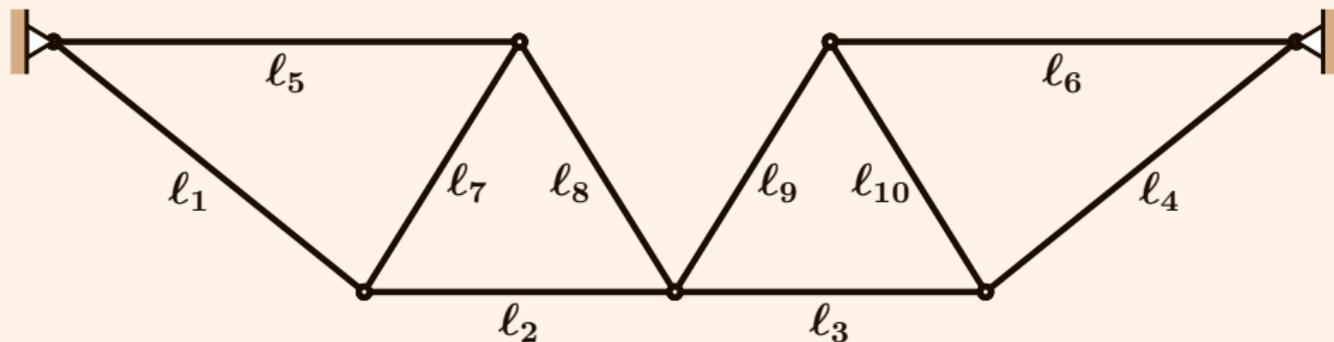
Hay una ecuación más (15) que coordenadas (14): la forma está sobredeterminada: una de las longitudes está determinada al fijar valores para el resto y por tanto no puede ser **arbitraria**. **Forma incompatible** (para valores arbitrarios de l_{11} , por ejemplo).

funiculares *versus* cerchas



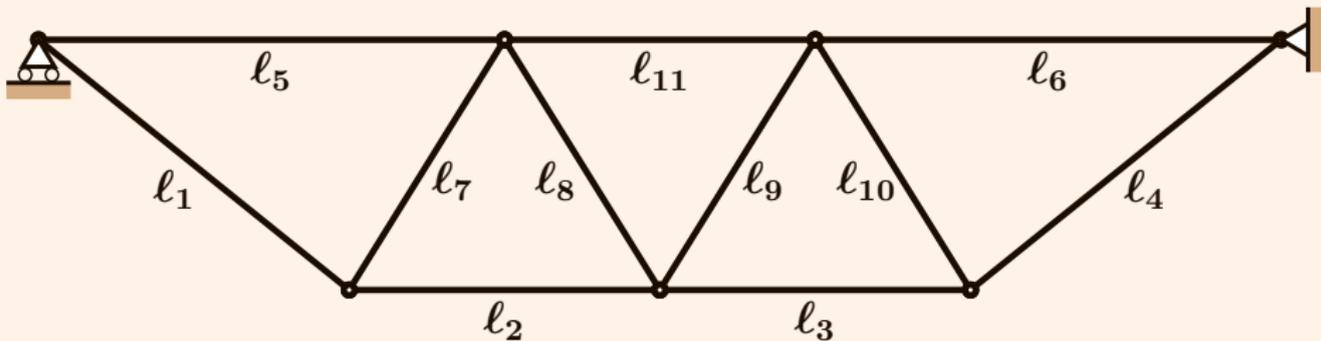
Podemos quitar una de las barras, por ejemplo la 11, y la forma de la triangulación seguiría estando determinada por la sustentación y por las longitudes de las barras, que ahora podemos elegir arbitrariamente. **Forma compatible determinada** (aunque puede no existir en el plano 2D ordinario)

funiculares *versus* cerchas



Podemos quitar una de las barras, por ejemplo la 11, y la forma de la triangulación seguiría estando determinada por la sustentación y por las longitudes de las barras, que ahora podemos elegir arbitrariamente. **Forma compatible determinada** (aunque puede no existir en el plano 2D ordinario)

funiculares *versus* cerchas



O podemos dejar todas las barras, y suprimir un vínculo cambiando una articulación por un apoyo, por ejemplo la de la izquierda. El número de coordenadas sigue siendo igual al número de ecuaciones.

Forma compatible determinada

condición necesaria

En general, en una triangulación de N puntos, E distancias conocidas y V coordenadas conocidas de antemano, se tendrá lo siguiente:

- $V \geq 3$: al menos tres coordenadas son conocidas, o pueden fijarse arbitrariamente (al decidir la posición del dibujo sobre el papel).
- Al comparar $2N$ con $V + E$:
 - $2N > V + E$: **forma compatible indeterminada**: en general habrá infinitas formas que cumplan con las $V + E$ ecuaciones
 - $2N = V + E$: **forma compatible determinada**
 - $2N < V + E$: **forma incompatible** en general: para que un dibujo cumpla con las $V + E$ ecuaciones, habrá que elegir $V + E - 2N$ longitudes en función del resto

condición necesaria

Supongamos ahora que las barras son deformables (aunque poco, según exige el requisito de rigidez). Puesto que las barras pueden alargarse o acortarse, el planteamiento geométrico ya no sirve. Pero bajo la acción de fuerzas en los nudos, si hay equilibrio, los esfuerzos en las barras tienen que cumplir condiciones precisas. El planteamiento geométrico puede sustituirse por uno mecánico (no totalmente análogo).

condición necesaria

En una estructura triangulada de N nudos, E barras y V condiciones de sustentación sometida a un conjunto arbitrario de acciones **con deformaciones pequeñas** tendremos: $2N$ ecuaciones de equilibrio (dos por nudo); y V reacciones y E esfuerzos desconocidos: $V + E$ incógnitas:

- $2N > V + E$: en general no habrá equilibrio, salvo para un conjunto peculiar de fuerzas exteriores (equilibrio imposible —estructura funicular)
- $2N = V + E$: si hay equilibrio, las reacciones y esfuerzos están unívocamente determinados por las ecuaciones (equilibrio posible determinado —análisis isostático)
- $2N < V + E$: si hay equilibrio, las reacciones y esfuerzos no están, en general, determinados por las ecuaciones (equilibrio posible indeterminado —análisis hiperestático)

condición necesaria

En resumen,

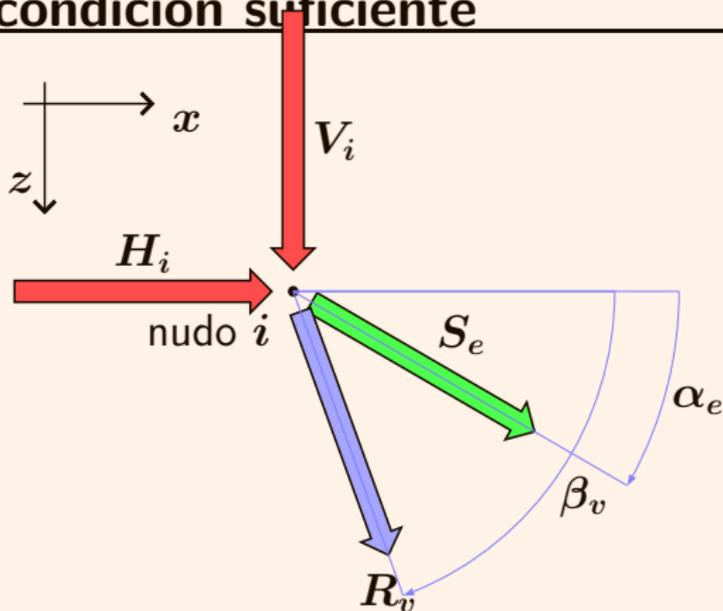
$$2N \leq V + E$$

con

$$V \geq 3$$

es la condición necesaria (pero no suficiente) para que una estructura triangulada esté en equilibrio con un conjunto arbitrario de acciones sin sufrir grandes deformaciones durante la carga.

condición suficiente

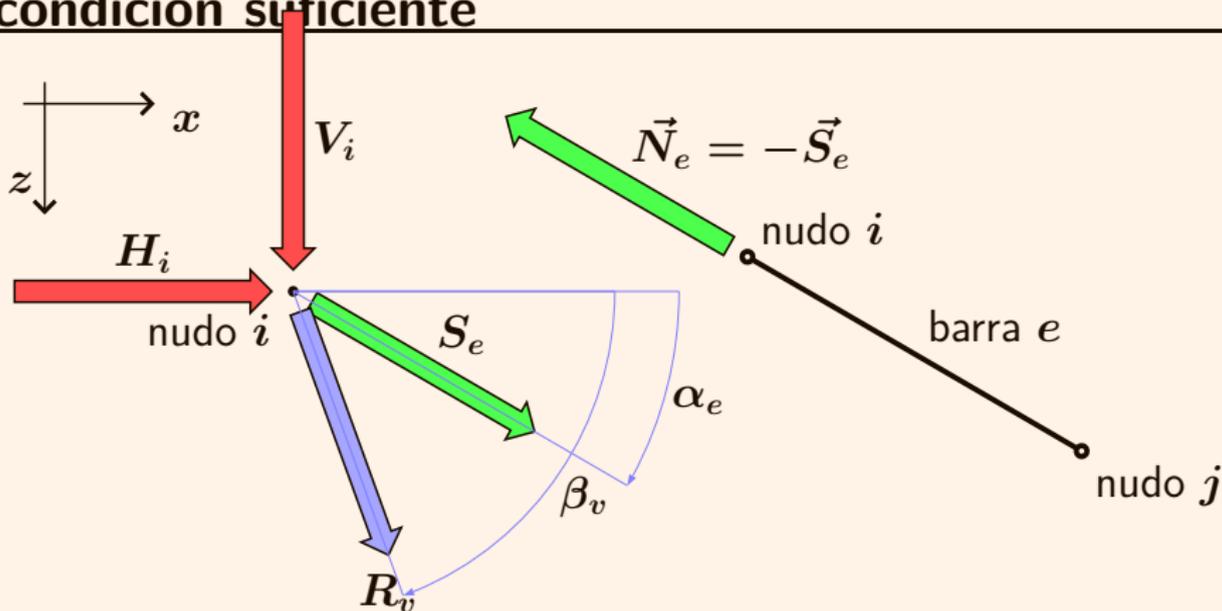


Usando la hipótesis de pequeñas deformaciones, establecemos las ecuaciones de equilibrio en la **geometría de proyecto de la cercha (sin deformación alguna)**. Si finalmente la cercha cumple con el requisito habitual de rigidez, tales ecuaciones resultarán ser suficientemente aproximadas.

$$H_i + \sum_{\text{nudo } i} S_e \cos(\alpha_e) + R_v \cos(\beta_v) \approx 0$$

$$V_i + \sum_{\text{nudo } i} S_e \sin(\alpha_e) + R_v \sin(\beta_v) \approx 0$$

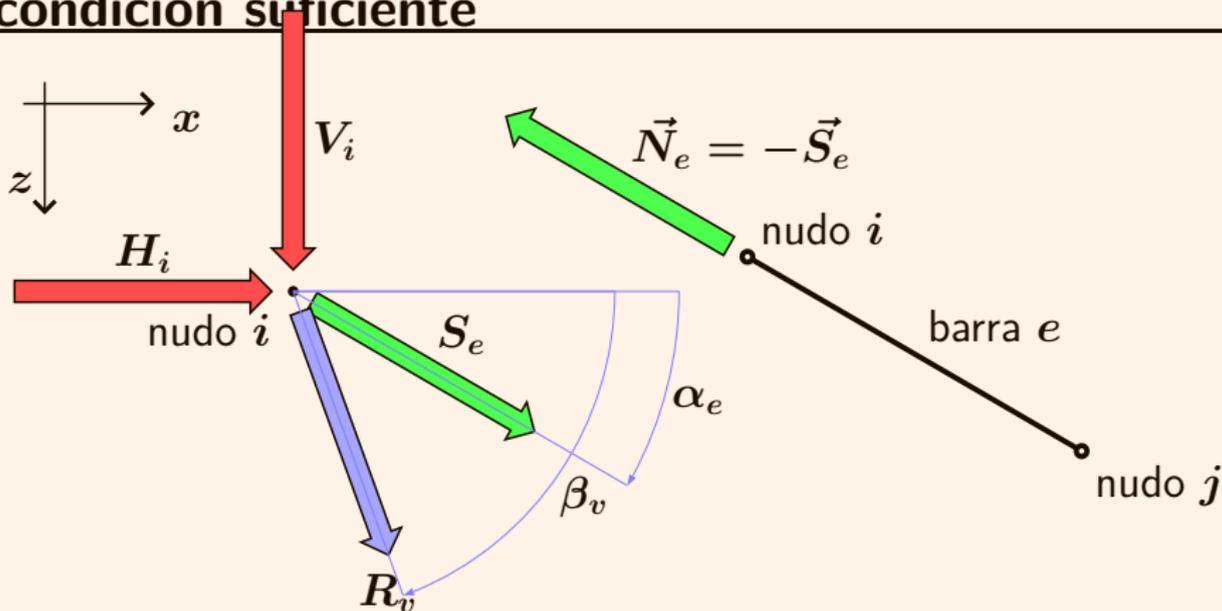
condición suficiente



$$- \sum_{\text{nudo } i} S_e \cos(\alpha_e) - R_v \cos(\beta_v) \approx H_i$$

$$- \sum_{\text{nudo } i} S_e \sin(\alpha_e) - R_v \sin(\beta_v) \approx V_i$$

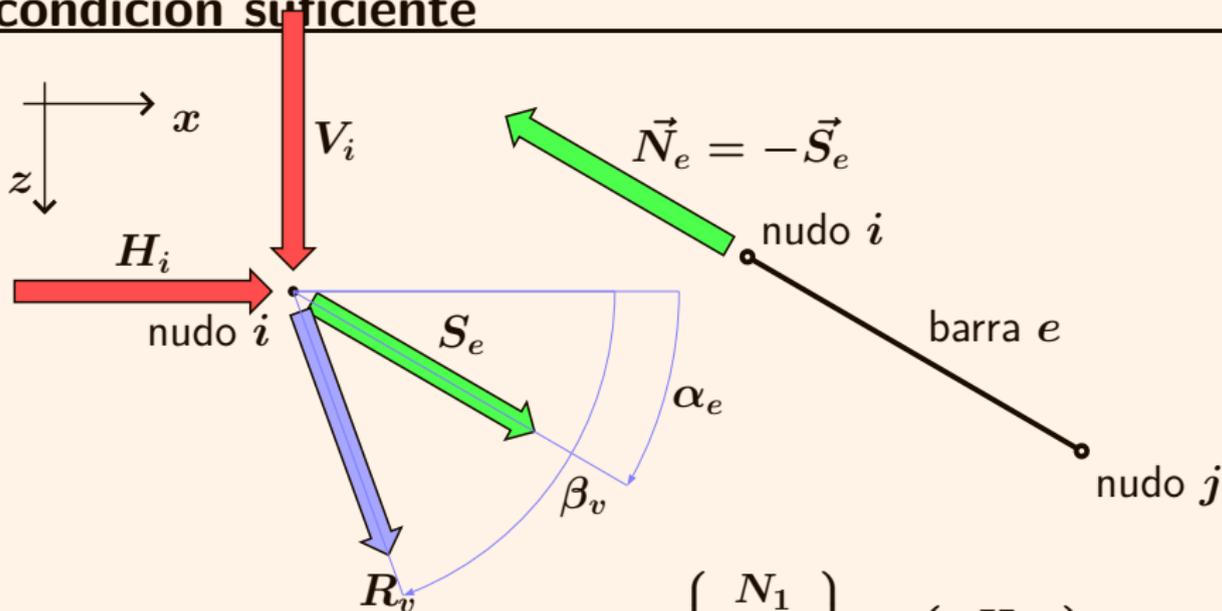
condición suficiente



$$\sum_{\text{nudo } i} N_e \cos(\alpha_e) - R_v \cos(\beta_v) \approx H_i$$

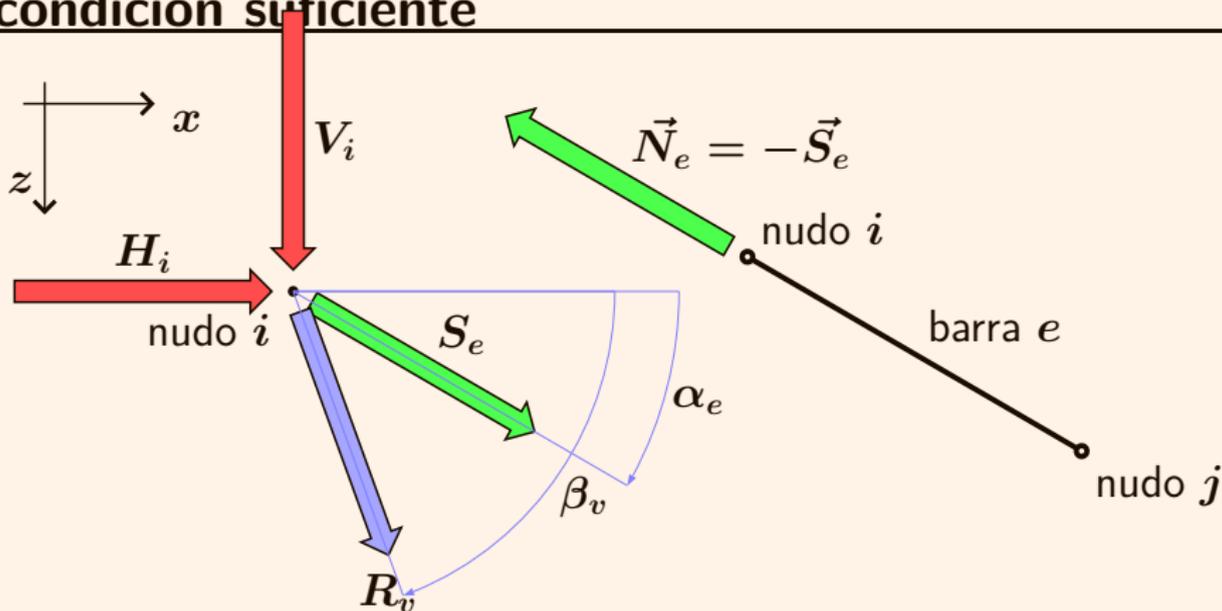
$$\sum_{\text{nudo } i} N_e \sin(\alpha_e) - R_v \sin(\beta_v) \approx V_i$$

condición suficiente



$$Ax = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,E+V} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{2N,1} & \cdots & A_{2N,E+V} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_E \\ R_1 \\ \vdots \\ R_V \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ \vdots \\ H_N \\ V_N \end{Bmatrix} = b$$

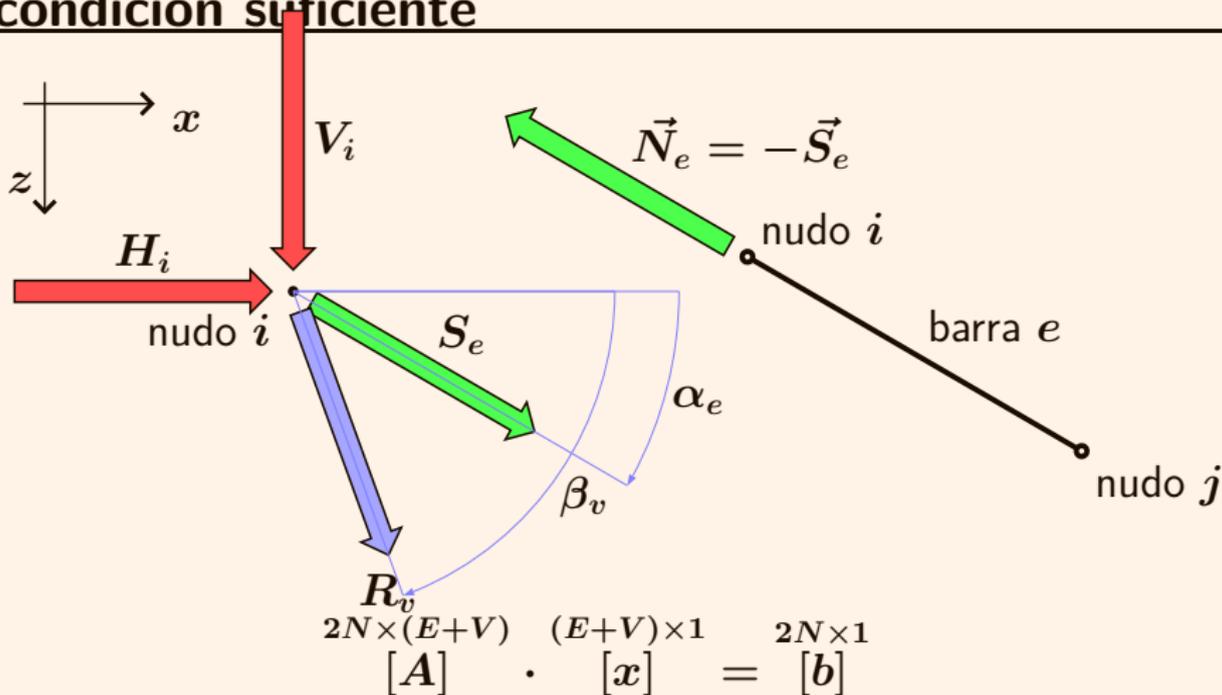
condición suficiente



$$\begin{matrix} 2N \times (E+V) \\ [A] \end{matrix} \cdot \begin{matrix} (E+V) \times 1 \\ [x] \end{matrix} = \begin{matrix} 2N \times 1 \\ [b] \end{matrix}$$

La condición suficiente para que las ecuaciones de equilibrio tengan solución es que el rango de la matriz A sea $2N$.

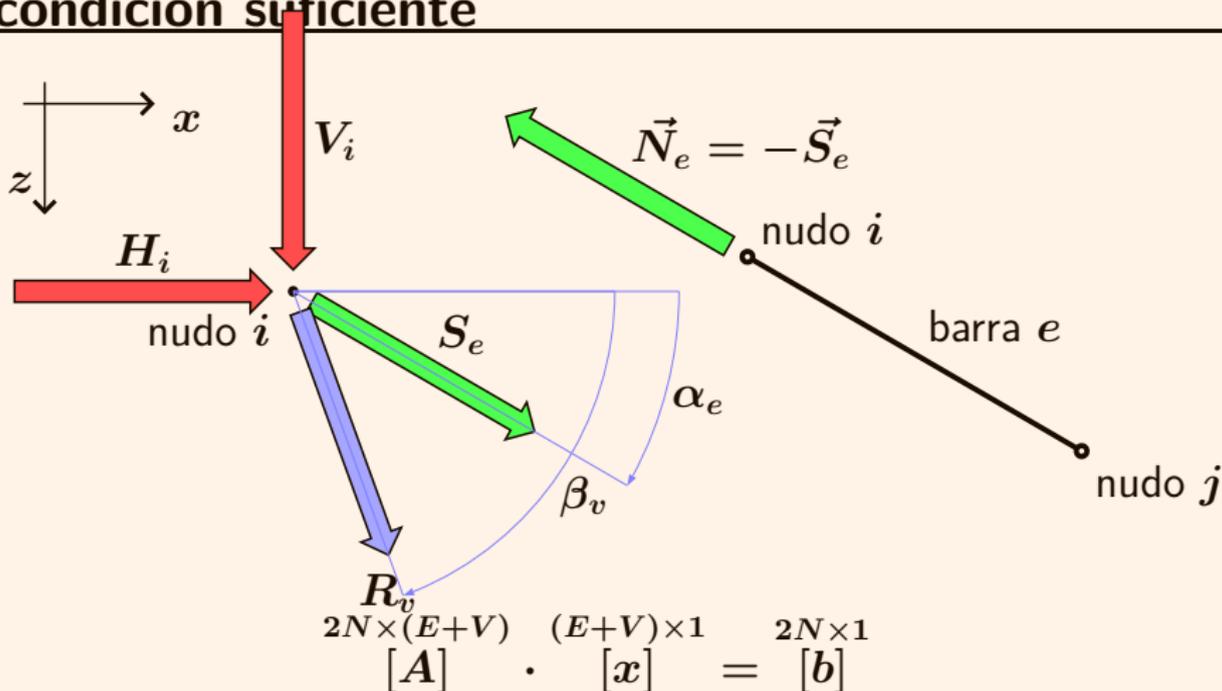
condición suficiente



cerchas compatibles determinadas, $2N = E + V$, y la condición suficiente se reduce a que

$$\boxed{\det A \neq 0}$$

condición suficiente



cerchas incompatibles—equilibrio posible indeterminado, $2N < E + V$, y si se cumple la condición suficiente hay infinitas soluciones, es decir, se puede elegir arbitrariamente los valores del esfuerzo de $E + V - 2N$ barras, y determinar el resto de los esfuerzos en función de aquellos.

¿Articulaciones en los nudos?

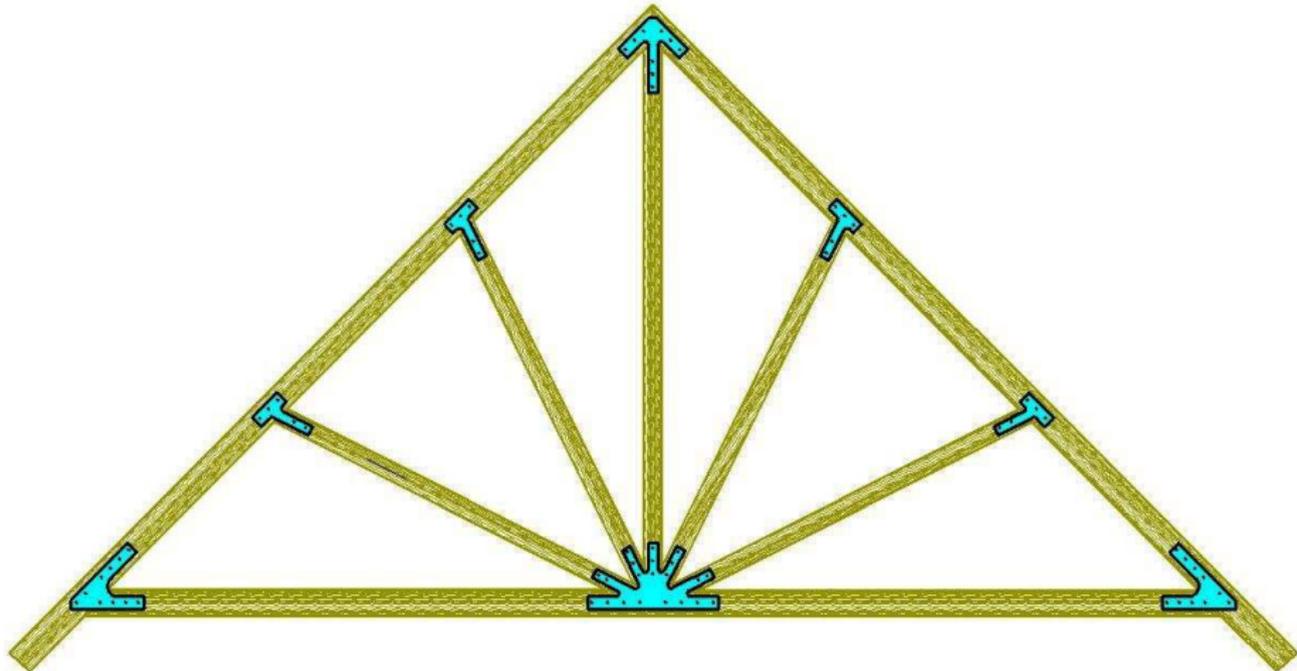
Las hipótesis anteriores suponen que las barras están sometidas a solicitaciones de tracción o compresión simple, y nada más.

Hay quien piensa que esa suposición requiere disponer articulaciones sin rozamiento para unir las barras entre sí. Se trata de una **superstición**. Esto requiere mantenerlas engrasadas y un montón de complicaciones adicionales. Y como las barras pesarán algo, habrá además flexión (aunque sea pequeña).

Si no se disponen articulaciones (lo que en la mayor parte de los casos **no es necesario ni recomendable**), aparecerán en las barras esfuerzos flectores y cortantes: se trata de esfuerzos secundarios, con aumentos de tensión que en análisis o diseños preliminares pueden ignorarse.

Con el modelo presentado se explora si la estructura será capaz de equilibrar las fuerzas exteriores en nudos con esfuerzos de tracción o compresión exclusivamente, con independencia de como sean las uniones de sus barras. . .

¿Articulaciones en los nudos?



SPAN 30 FEET LENGTH 32 FEET
SLOPE: 12 INCHES TO 12 INCHES
TOP CHORD AND BOTTOM CHORD: 4 X 8 SHOWN
TRUSS PLATES 4 INCHES WIDE ON CHORDS

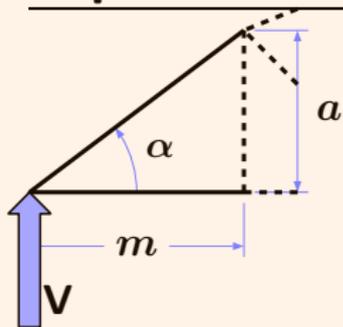
PALADIAN TRUSS

5/8" BOLTS IN 11/16" HOLES
WEB MEMBERS: 4 X 6 SHOWN
TRUSS PLATES 3 INCHES WIDE ON WEB MEMBERS

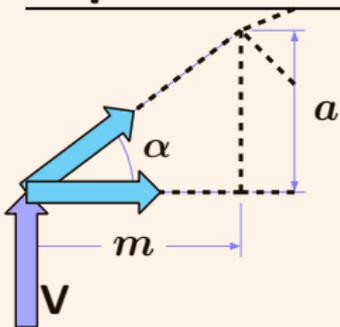
¿Articulaciones en los nudos?



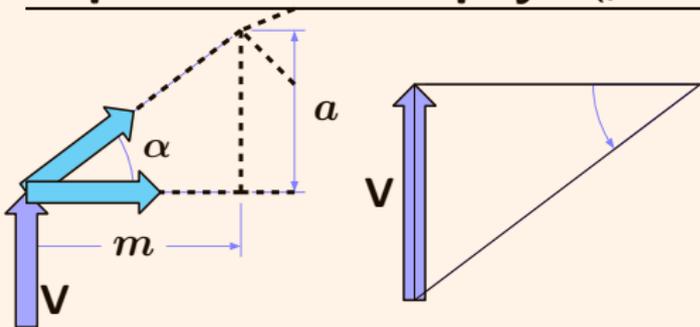
Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)



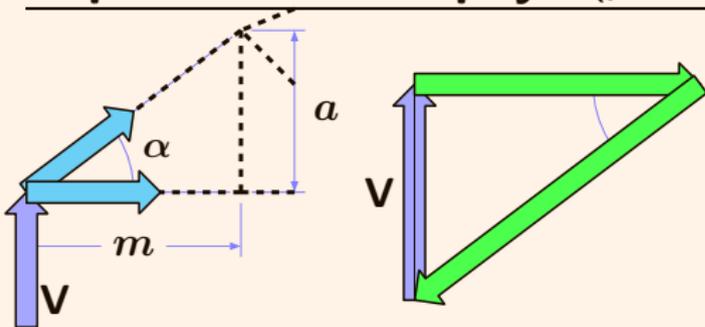
Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)



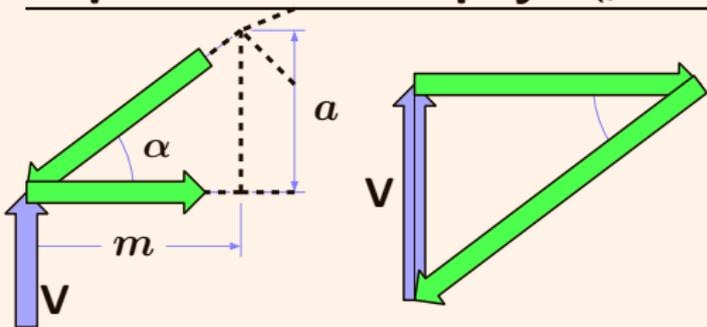
Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)



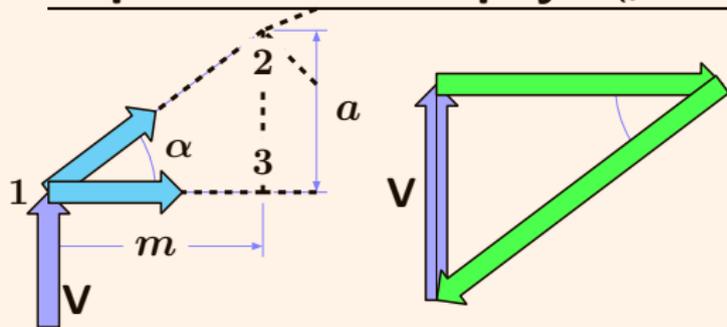
Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)



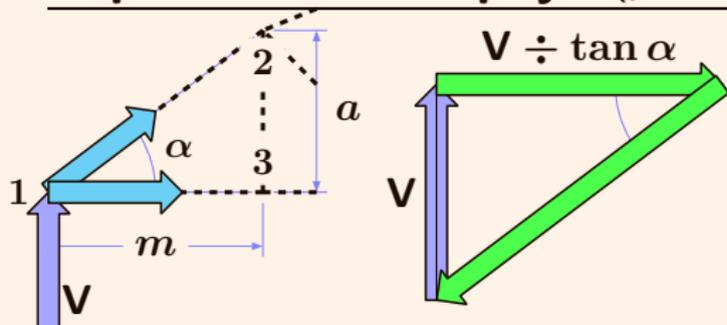
Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)



Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)



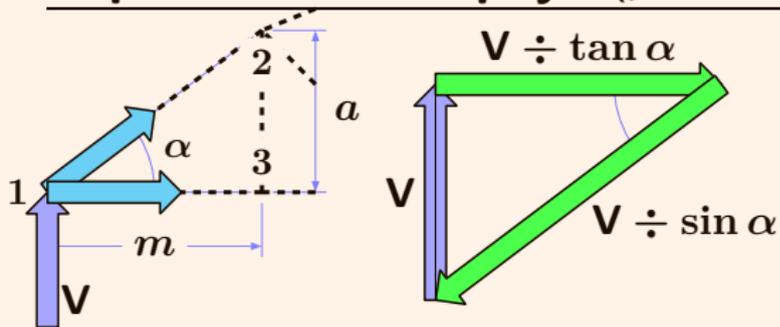
Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)



$$\sum M_2 : V \cdot m - N_{13} \cdot a = 0$$

$$N_{13} = V \frac{m}{a} = \frac{V}{\tan \alpha}$$

Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)

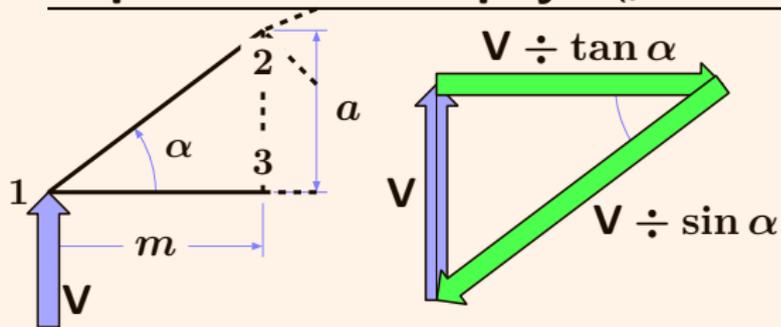


$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot m \cdot \sin \alpha = 0$$

$$N_{12} = -\frac{V}{\sin \alpha} = -1,67V$$

Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)

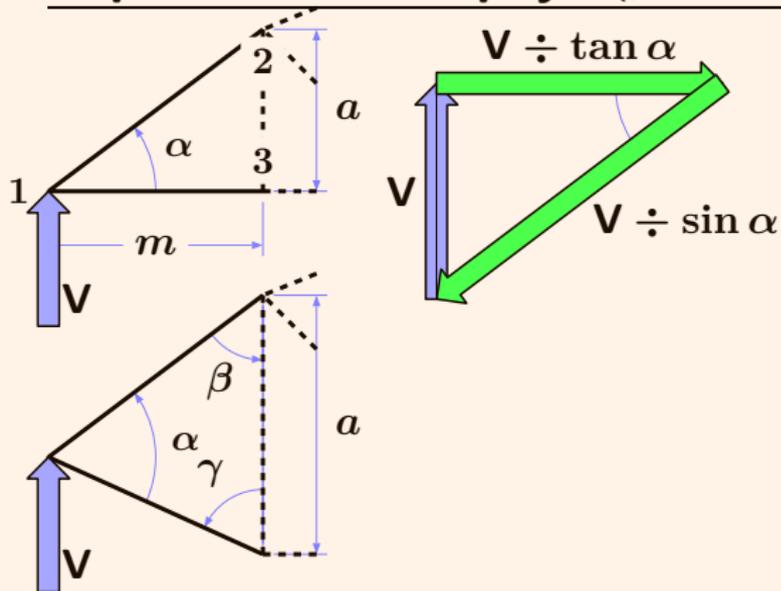


$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot m \cdot \sin \alpha = 0$$

$$N_{12} = -\frac{V}{\sin \alpha} = -1,67V$$

Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)

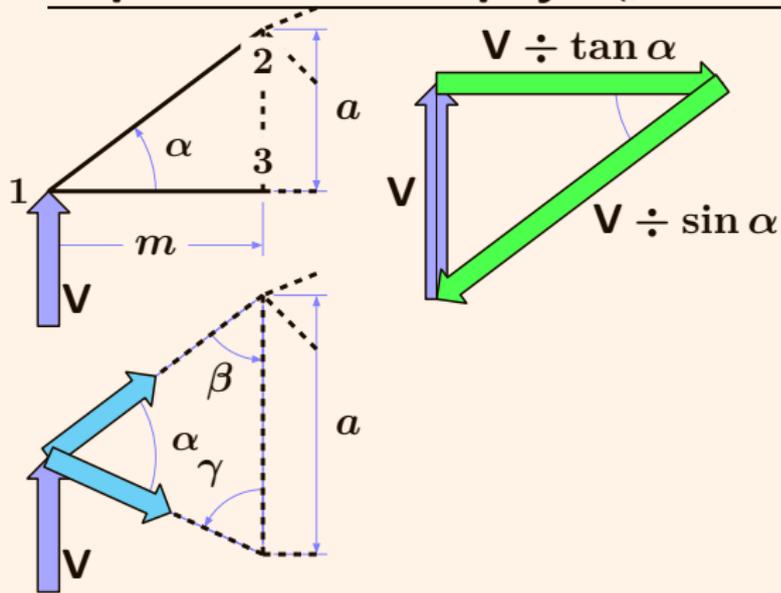


$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot m \cdot \sin \alpha = 0$$

$$N_{12} = -\frac{V}{\sin \alpha} = -1,67V$$

Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)

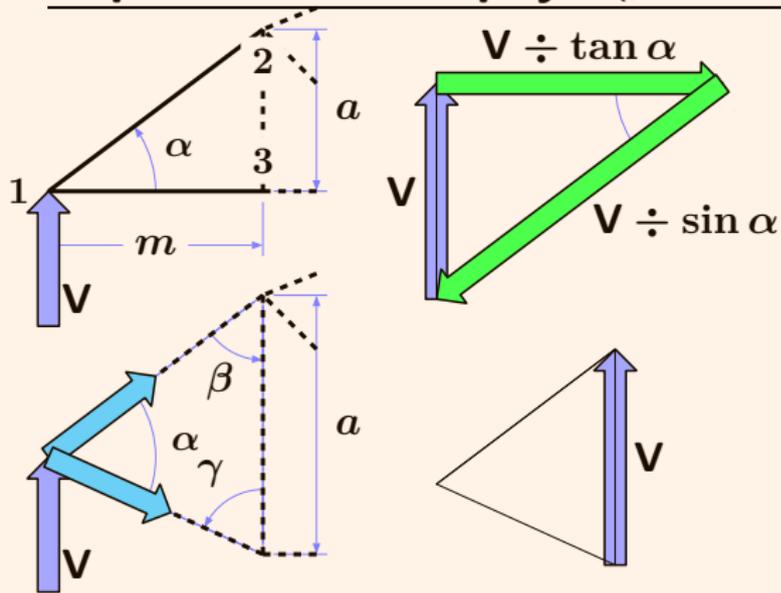


$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot m \cdot \sin \alpha = 0$$

$$N_{12} = -\frac{V}{\sin \alpha} = -1,67V$$

Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)

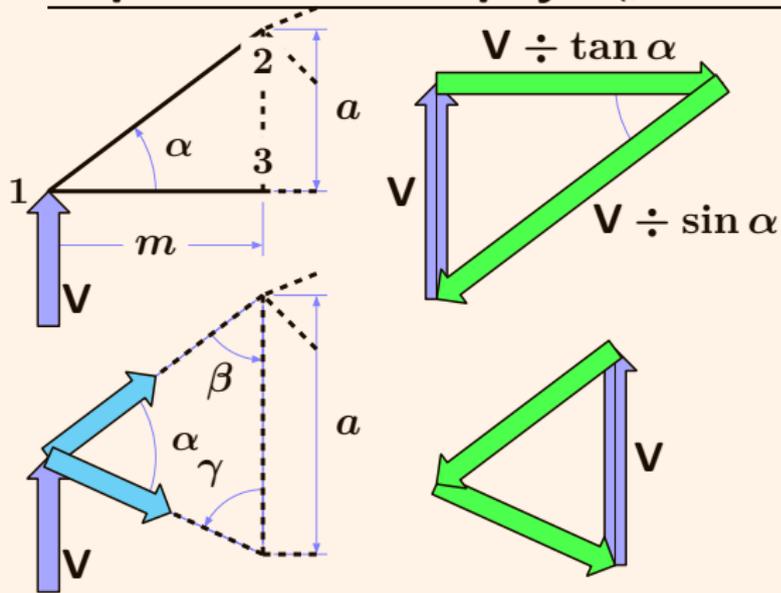


$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot m \cdot \sin \alpha = 0$$

$$N_{12} = -\frac{V}{\sin \alpha} = -1,67V$$

Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)

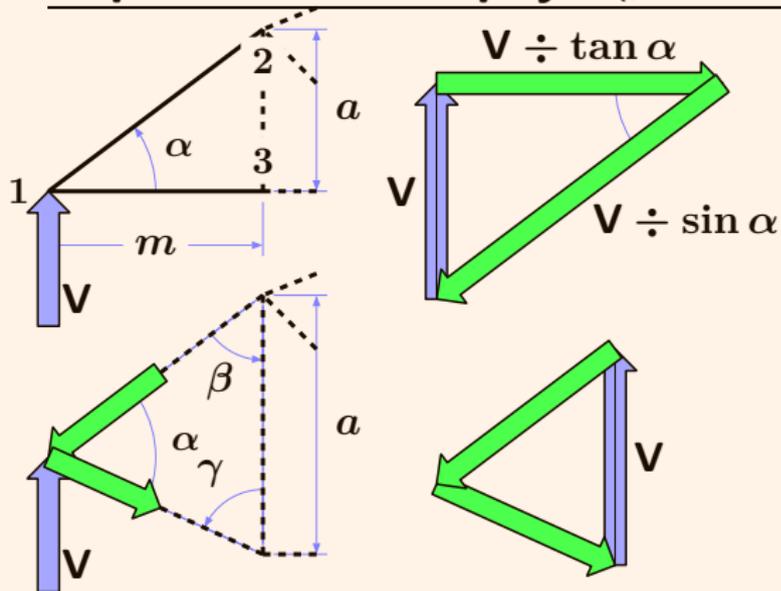


$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot m \cdot \sin \alpha = 0$$

$$N_{12} = -\frac{V}{\sin \alpha} = -1,67V$$

Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)

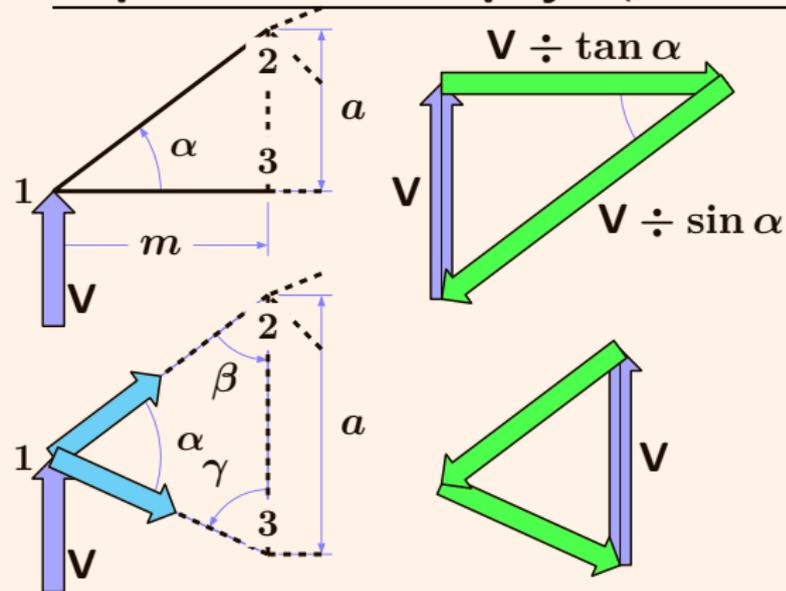


$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot m \cdot \sin \alpha = 0$$

$$N_{12} = -\frac{V}{\sin \alpha} = -1,67V$$

Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)

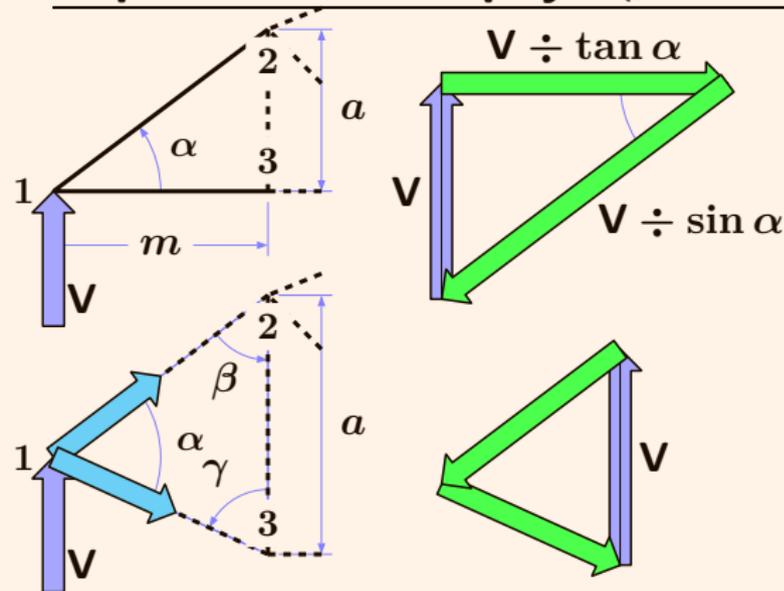


$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot m \cdot \sin \alpha = 0$$

$$N_{12} = -\frac{V}{\sin \alpha} = -1,67V$$

Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)



$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot m \cdot \sin \alpha = 0$$

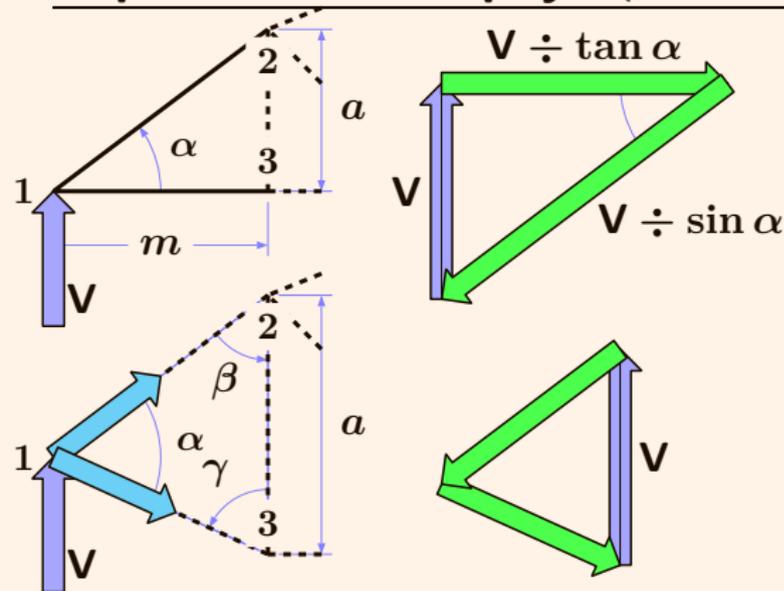
$$N_{12} = -\frac{V}{\sin \alpha} = -1,67V$$

$$\sum M_2 = 0:$$

$$V \cdot m - N_{13} \cdot a \sin \gamma = 0$$

$$N_{13} = V \frac{m}{a \sin \gamma} = 0,91V$$

Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)



$$\sum M_3 = 0:$$

$$\mathbf{V} \cdot m + N_{12} \cdot m \cdot \sin \alpha = 0$$

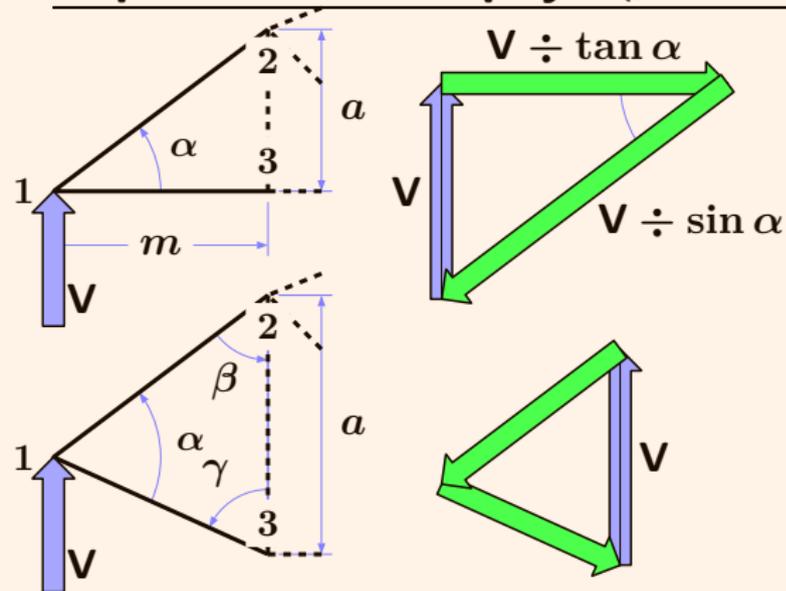
$$N_{12} = -\frac{\mathbf{V}}{\sin \alpha} = -1,67\mathbf{V}$$

$$\sum M_3 = 0:$$

$$\mathbf{V} \cdot m + N_{12} \cdot a \sin \beta = 0$$

$$N_{12} = -\mathbf{V} \frac{m}{a \sin \beta} = -1,04\mathbf{V}$$

Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)



$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot m \cdot \sin \alpha = 0$$

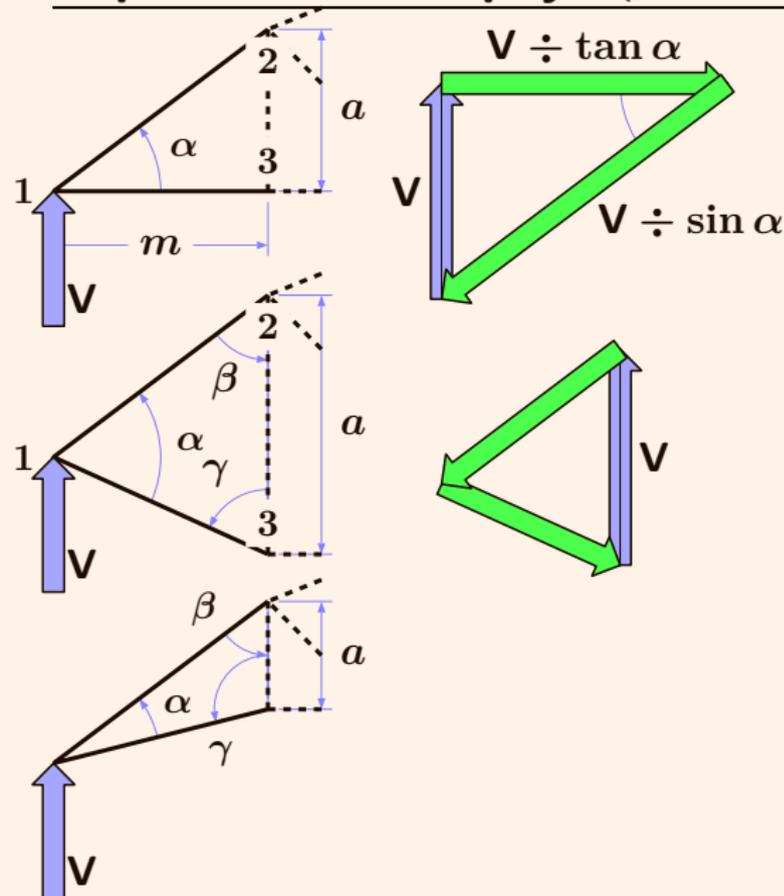
$$N_{12} = -\frac{V}{\sin \alpha} = -1,67V$$

$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot a \sin \beta = 0$$

$$N_{12} = -V \frac{m}{a \sin \beta} = -1,04V$$

Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)



$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot m \cdot \sin \alpha = 0$$

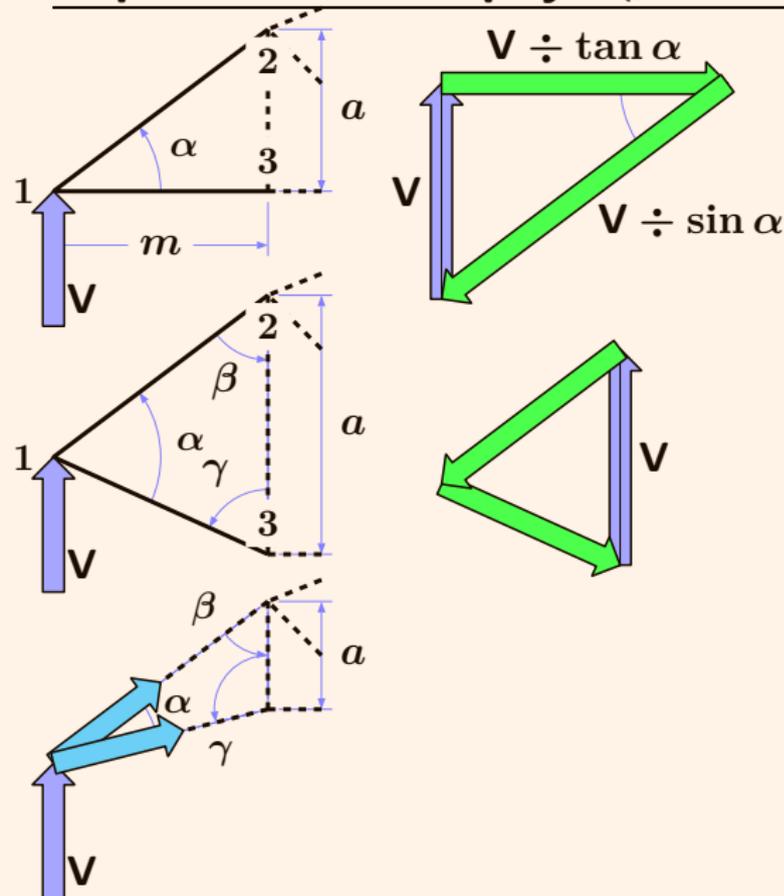
$$N_{12} = -\frac{V}{\sin \alpha} = -1,67V$$

$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot a \sin \beta = 0$$

$$N_{12} = -V \frac{m}{a \sin \beta} = -1,04V$$

Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)



$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot m \cdot \sin \alpha = 0$$

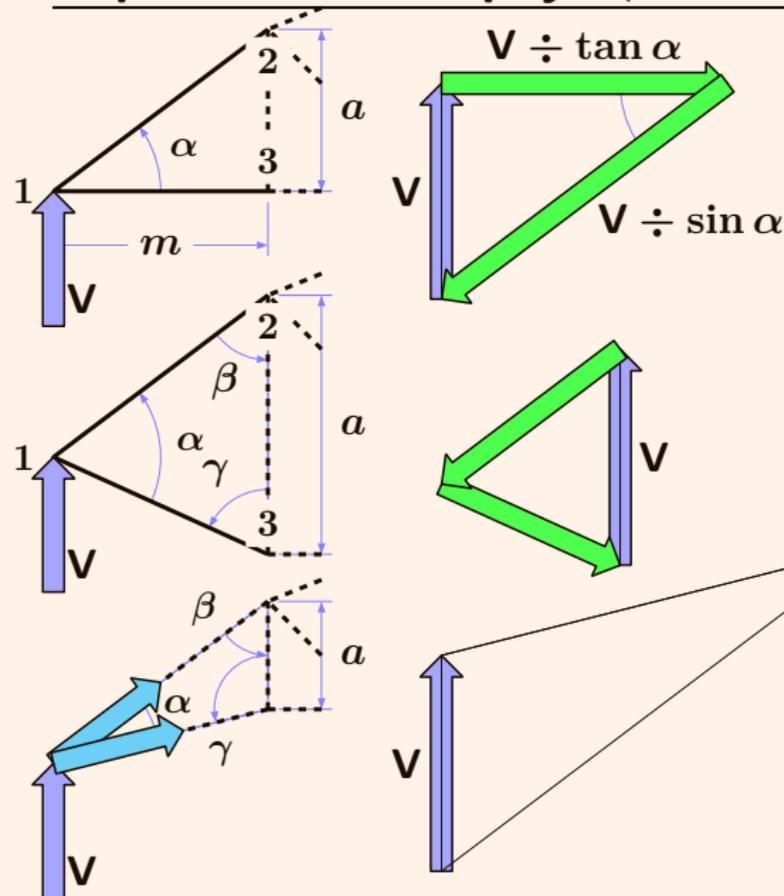
$$N_{12} = -\frac{V}{\sin \alpha} = -1,67V$$

$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot a \sin \beta = 0$$

$$N_{12} = -V \frac{m}{a \sin \beta} = -1,04V$$

Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)



$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot m \cdot \sin \alpha = 0$$

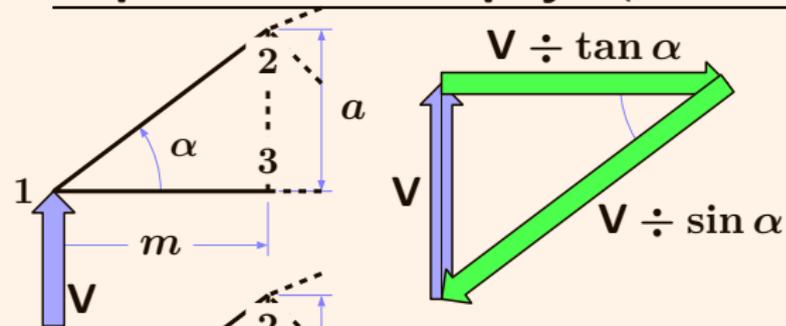
$$N_{12} = -\frac{V}{\sin \alpha} = -1,67V$$

$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot a \sin \beta = 0$$

$$N_{12} = -V \frac{m}{a \sin \beta} = -1,04V$$

Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)



$$\sum M_3 = 0:$$

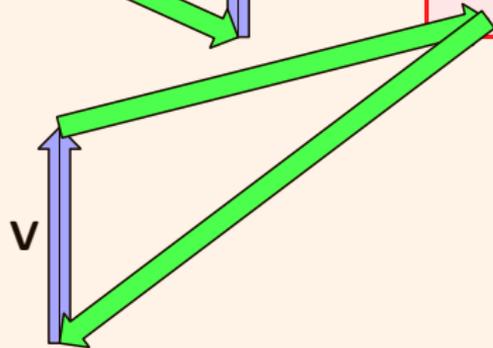
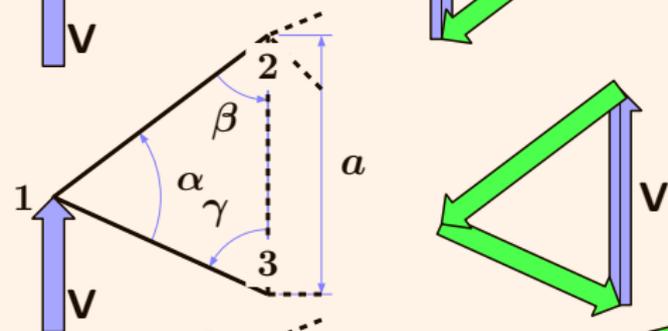
$$V \cdot m + N_{12} \cdot m \cdot \sin \alpha = 0$$

$$N_{12} = -\frac{V}{\sin \alpha} = -1,67V$$

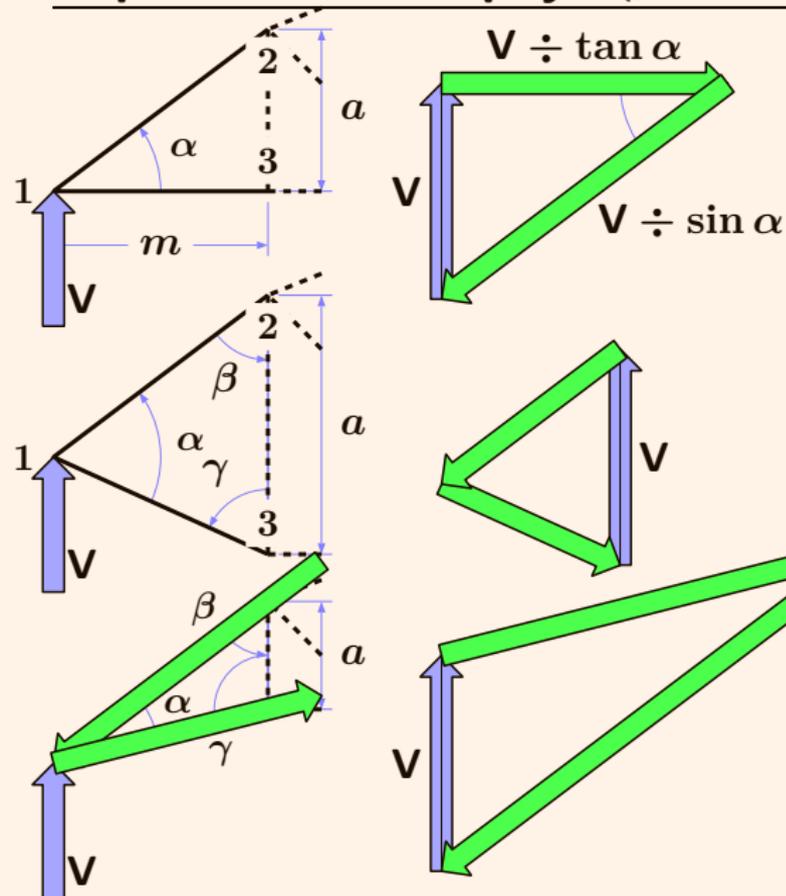
$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot a \sin \beta = 0$$

$$N_{12} = -V \frac{m}{a \sin \beta} = -1,04V$$



Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)



$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot m \cdot \sin \alpha = 0$$

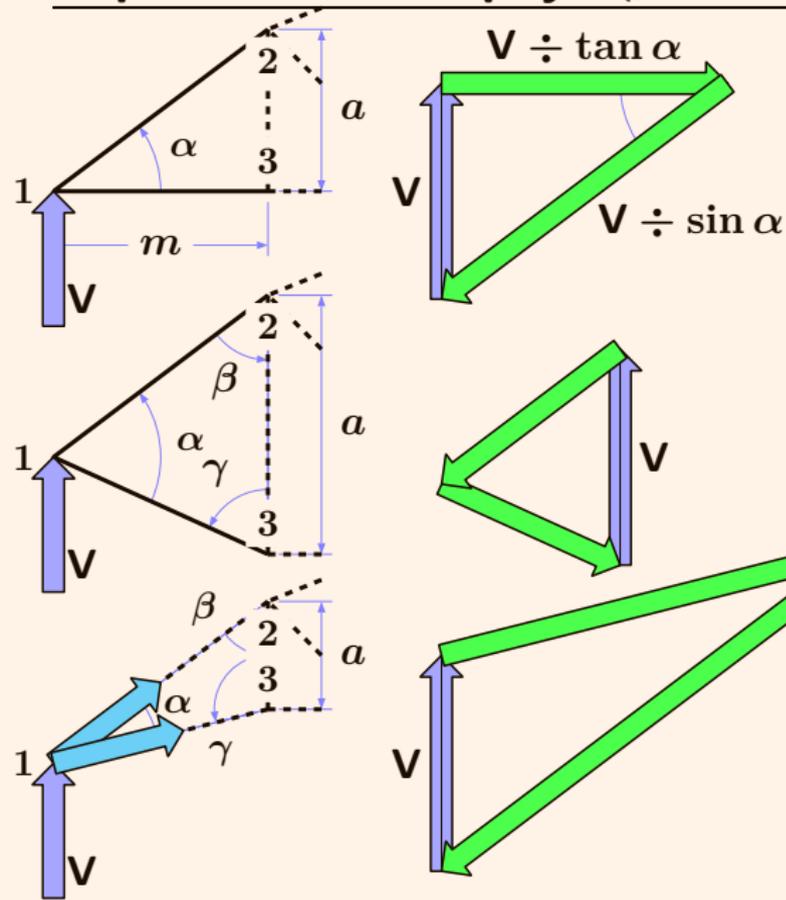
$$N_{12} = -\frac{V}{\sin \alpha} = -1,67V$$

$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot a \sin \beta = 0$$

$$N_{12} = -V \frac{m}{a \sin \beta} = -1,04V$$

Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)



$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot m \cdot \sin \alpha = 0$$

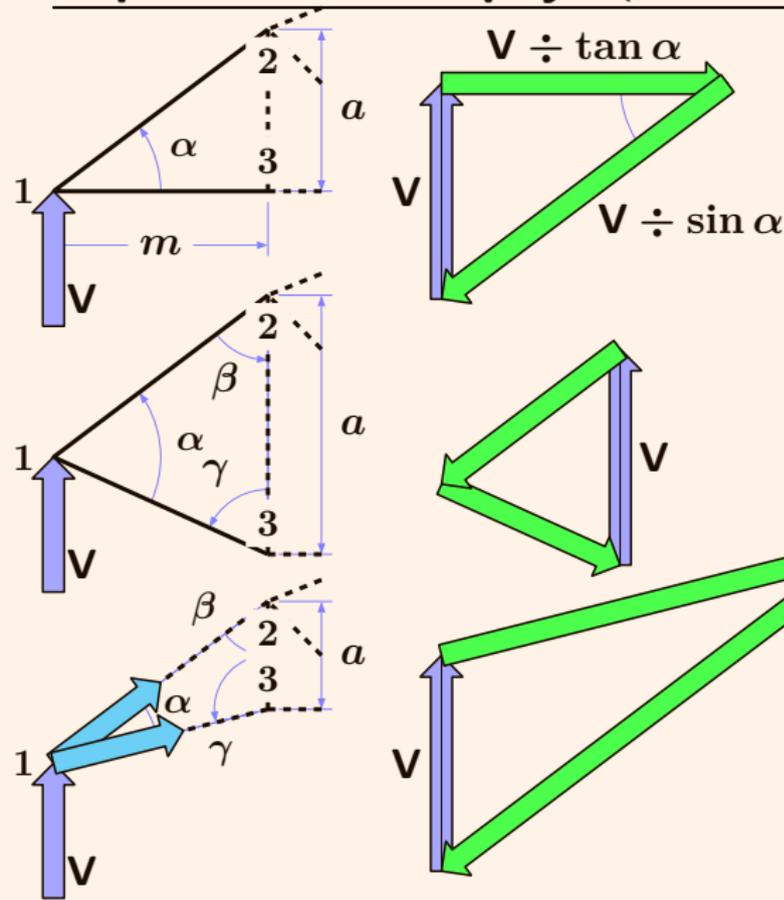
$$N_{12} = -\frac{V}{\sin \alpha} = -1,67V$$

$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot a \sin \beta = 0$$

$$N_{12} = -V \frac{m}{a \sin \beta} = -1,04V$$

Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)



$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot m \cdot \sin \alpha = 0$$

$$N_{12} = -\frac{V}{\sin \alpha} = -1,67V$$

$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot a \sin \beta = 0$$

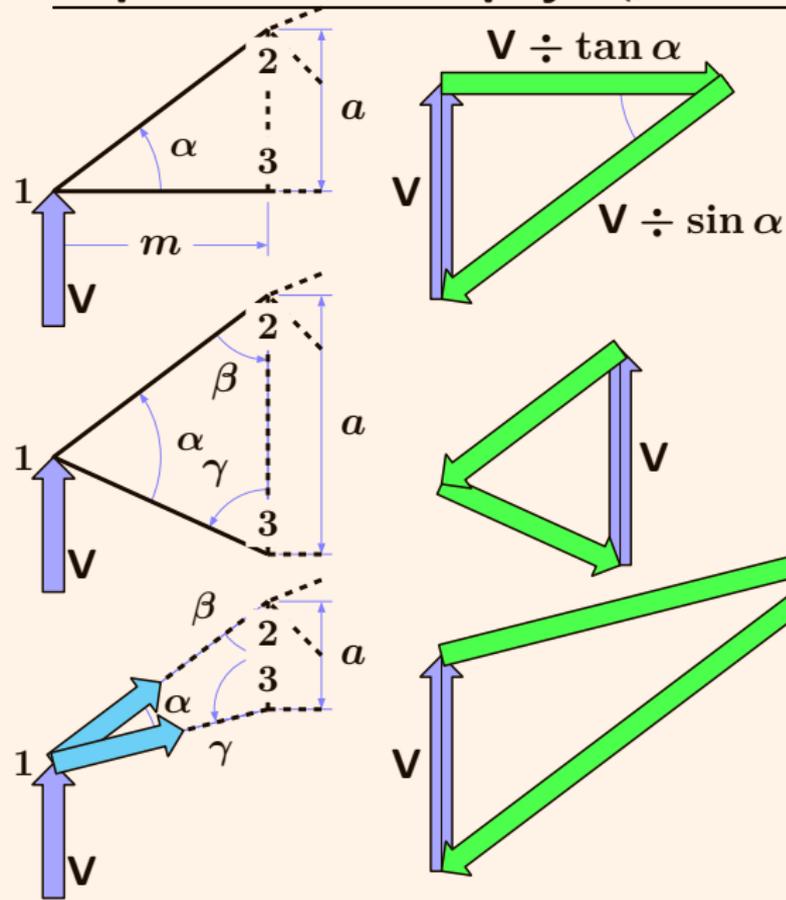
$$N_{12} = -V \frac{m}{a \sin \beta} = -1,04V$$

$$\sum M_2 = 0:$$

$$V \cdot m - N_{13} \cdot a \sin \gamma = 0$$

$$N_{13} = V \frac{m}{a \sin \gamma} = 2,06V$$

Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)



$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot m \cdot \sin \alpha = 0$$

$$N_{12} = -\frac{V}{\sin \alpha} = -1,67V$$

$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot a \sin \beta = 0$$

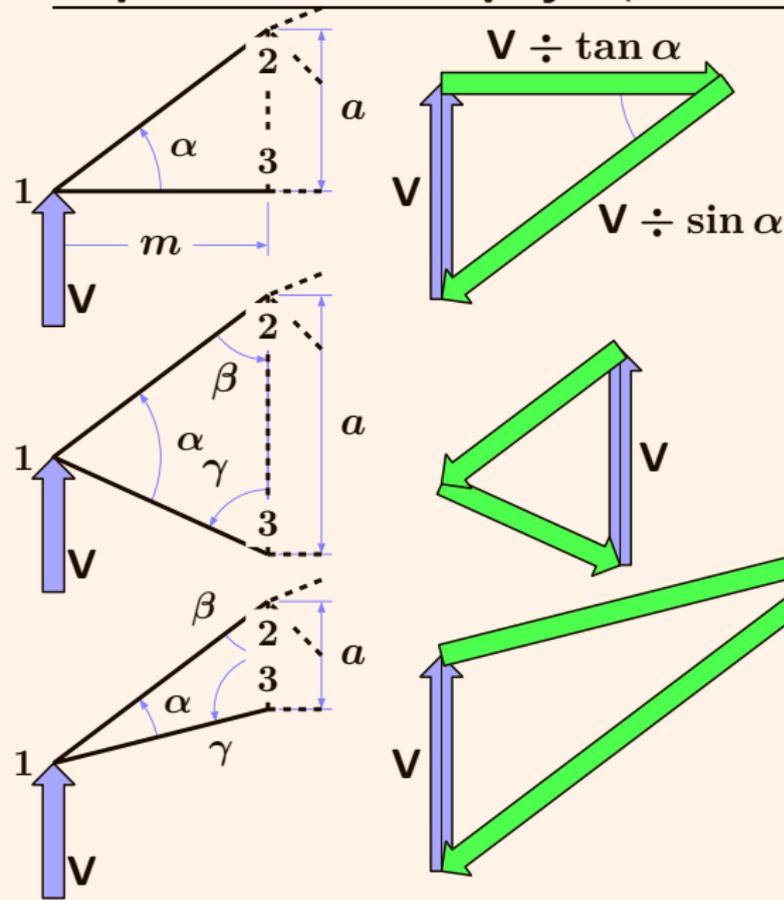
$$N_{12} = -V \frac{m}{a \sin \beta} = -1,04V$$

$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot a \sin \beta = 0$$

$$N_{12} = -V \frac{m}{a \sin \beta} = -2,5V$$

Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)



$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot m \cdot \sin \alpha = 0$$

$$N_{12} = -\frac{V}{\sin \alpha} = -1,67V$$

$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot a \sin \beta = 0$$

$$N_{12} = -V \frac{m}{a \sin \beta} = -1,04V$$

$$\sum M_3 = 0:$$

$$V \cdot m + N_{12} \cdot a \sin \beta = 0$$

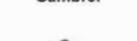
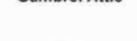
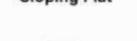
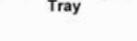
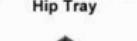
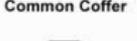
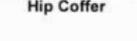
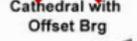
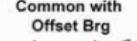
$$N_{12} = -V \frac{m}{a \sin \beta} = -2,5V$$

Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)

Basic Web Configurations

								
Kingpost	Simple Fink	Queen	Fink	Howe	Fan	Modified Queen	Double Fink	Double Howe

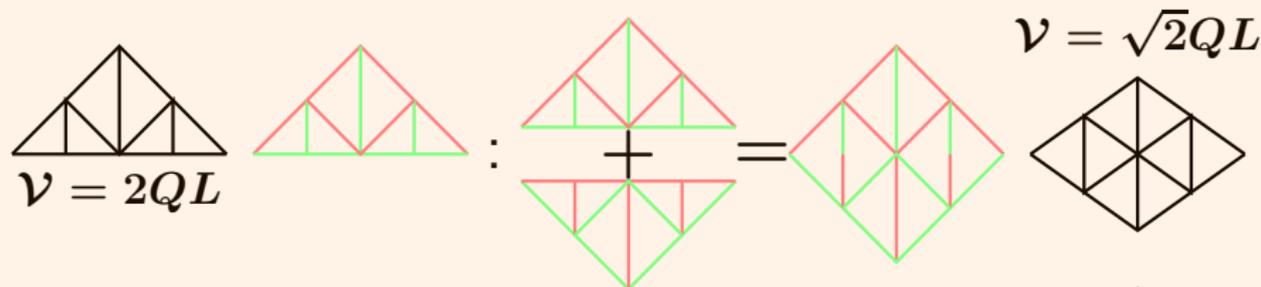
Truss Types

								
Common	Gable	Dual Ridge	Scissor	Hip Scissor	Mono Scissor	Mono	Dropped Mono Gable	Dual Ridge Mono
								
Cathedral	Hip Cathedral	Mono Cathedral	Symmetrical Cathedral	Non-Symmetrical Cathedral	Gambrel	Gambrel Hip	Cathedral Tray	Dual Pitch
								
California Hip	Cal Hip Cathedral	Cal Hip Tray	Cal Mono Hip	Cal Hip Scissor	Cal Hip Studio Vault	Cal Hip Gambrel	Tail Bearing Cathedral	Tail Bearing
								
Polynesian	Polynesian Hip	Porch	Stepdown Hip	Mono Stepdown Hip	Setdown Hip	Studio Vault	Attic	Attic Hip
								
Gambrel	Gambrel Attic	Flat	Sloping Flat	Parallel Chord Scissor	Parallel Chord Mono	Parapet	Sloping Parapet	Mac's Parapet
								
Tray	Hip Tray	Common Coffe	Hip Coffe	Scissor with Offset Brg	Cathedral with Offset Brg	Cape	Common with Offset Brg	Hip with Offset Brg
								
Bow	Barrel	Bow Barrel	Common Cap	Hip Cap	Mono Cap	Mono Hip Cap	Inverted	

Simetría, esbeltez (segunda regla de diseño)

La flexión “gusta” de soluciones simétricas (Teorema).

Si la estructura no es simétrica respecto a la luz de flexión pero tiene una esbeltez óptima, haciéndola simétrica mediante un simple espejo, y de una altura total $\sqrt{2}$ veces la original, tendrá mucho mejor aspecto (La cantidad de estructura se reducirá al igual que su esbeltez, por $\sqrt{2}$).



Si no hay suficiente libertad de diseño, debe intentarse lo que sigue tanto como se pueda



Resistencia

- En general una cercha estará sometida a H hipótesis de carga distintas.
- Cada barra tendrá que hacer frente a distintos valores de esfuerzo normal; incluso puede estar en ocasiones traccionada unas veces y comprimida otras:

$$\text{tracción pésima}_e = \underset{h}{\text{máx}}(N_{e,h})$$

$$\text{compresión pésima}_e = \underset{h}{\text{mín}}(N_{e,h})$$

Resistencia

- **Barras traccionadas** $N_e > 0$: Si $N = N_e$,

Comprobación: $N \leq \mathbf{A}f = \mathcal{R}_T$

\mathcal{R}_T : resistencia segura a tracción

Dimensionado: $A \geq \mathbf{A}_{\min} = N/f$

Resistencia

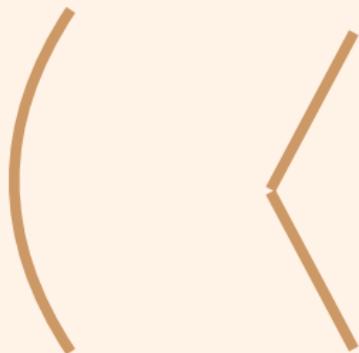
- **Barra sin tensión $N_e = 0$:** Si la cercha es una forma compatible determinada (“isostática”) *es necesaria y no puede suprimirse*, pues de hacerlo $E + V < 2N$ y la estructura sería funicular. Se dimensiona con el menor perfil disponible. Si la cercha es una forma incompatible (“hiperestática”) podría suprimirse. . .

Tales barras, aunque son frecuentes en *una* hipótesis de carga particular, son raras cuando se consideran varias. Son inexistentes en cuanto se considera el peso propio de la estructura. O cuando se plantea el equilibrio en la geometría deformada, aunque sea poco.

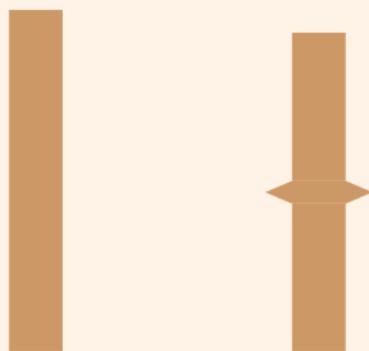
A veces puede suprimirse una a condición de suprimir un nudo y otra barra, caso frecuente en nudos sin carga y barras ortogonales. . .

Resistencia

- Barras comprimidas $N_e < 0$:



Barras muy esbeltas
Rotura por flexión o pandeo
 $\mathcal{R}_C \ll Af$



Barras poco esbeltas
Rotura por aplastamiento
 $\mathcal{R}_C \simeq Af$

Resistencia

- **Barras comprimidas** $N_e < 0$: Sea $N = \text{abs}(N_e)$.

Esbeltez geométrica: ℓ/h . Esbeltez mecánica: ℓ/i , siendo i el radio de giro de la sección, $i = \sqrt{I/A}$. Coeficiente de pandeo ω , función de la esbeltez mecánica y del material empleado: $\omega \geq 1$ siempre.

Comprobación:
$$N \leq \frac{Af}{\omega} = \mathcal{R}_C$$

Dimensionado: Por tanteo, dado que en la expresión anterior ω depende de A y no es fácil despejar A .

La fracción $A \div \omega$, siempre menor que A , puede considerarse el **área eficaz** o **útil** para resistir compresiones, A_{ef} ; tanto menor cuanto más esbelta sea la barra.

Resistencia

- **Barras comprimidas** $N_e < 0$: Por ejemplo, para una sección cuadrada de lado **a**:
 - Área: $\mathbf{A} = \mathbf{a}^2$
 - Inercia: $\mathbf{I} = \mathbf{a}^4 \div 12$
 - Radio de giro: $\mathbf{i} = \sqrt{\mathbf{I}/\mathbf{A}} = \mathbf{a} \div \sqrt{12} \simeq 0,29 \mathbf{a}$
 - Esbeltez mecánica $\lambda_m = \frac{\ell}{\mathbf{i}}$
 - Coeficiente de pandeo ω : se encuentra en la tabla correspondiente al tipo de perfil y material empleado entrando con λ_m
 - Resistencia con seguridad a compresión $\mathcal{R}_C = \mathbf{A}\mathbf{f} \div \omega$

Resistencia

- **Barras comprimidas $N_e < 0$:**

Sección		Radio de giro
cuadrada maciza		$0,29 \times \text{lado}$
cuadrada hueca		$\approx 0,40 \times \text{lado}$
circular maciza		$0,25 \times \text{diámetro}$
circular hueca		$\approx 0,35 \times \text{diámetro}$

El radio de giro no puede ser mayor que la mitad del ancho de la pieza. Para secciones razonables no puede ser menor de la cuarta parte.

Pueden elegirse secciones tan ineficientes que el radio de giro tienda a cero: secciones en cruz de brazos muy desiguales, chapas delgadas—una hoja de papel—, etc. El consumo de material se dispara. . .

Resistencia

- **Barras traccionadas y comprimidas alternativamente:**
Es imprescindible comprobar o diseñar su resistencia para las dos situaciones extremas.

Clases de formas compatibles determinadas

A veces resulta útil distinguir tres clases:

- **cerchas simples:** puede analizarse su equilibrio nudo a nudo, no es necesario resolver más que dos ecuaciones simultáneas. Son las de uso más frecuente.
- **cerchas compuestas:** unión de dos o más de las simples: suele ser necesario calcular primero el esfuerzo de las barras de unión (mediante cortes) antes de proceder como en el caso anterior.
- **cerchas complejas:** raramente se trata de buenos diseños, y puede ser necesario resolver simultáneamente un gran número de ecuaciones (útiles para *postmodern designs*)

Las formas incompatibles (equilibrio posible indeterminado) se usan también frecuentemente —tienen ventajas e inconvenientes—, pero no las estudiamos aquí.

cerchas “simples”

$$2N = E + V$$
$$2 \times 2 = 1 + 3$$



cerchas “simples”

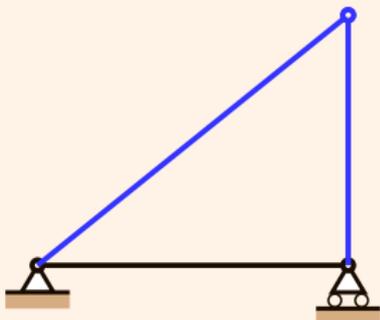
Si ahora añadimos un nudo y dos barras, añadimos dos nuevas ecuaciones y dos nuevas incógnitas, y la nueva forma pertenece a la misma clase que la original (compatible determinada)

$$2N = E + V$$
$$2 \times 2 = 1 + 3$$



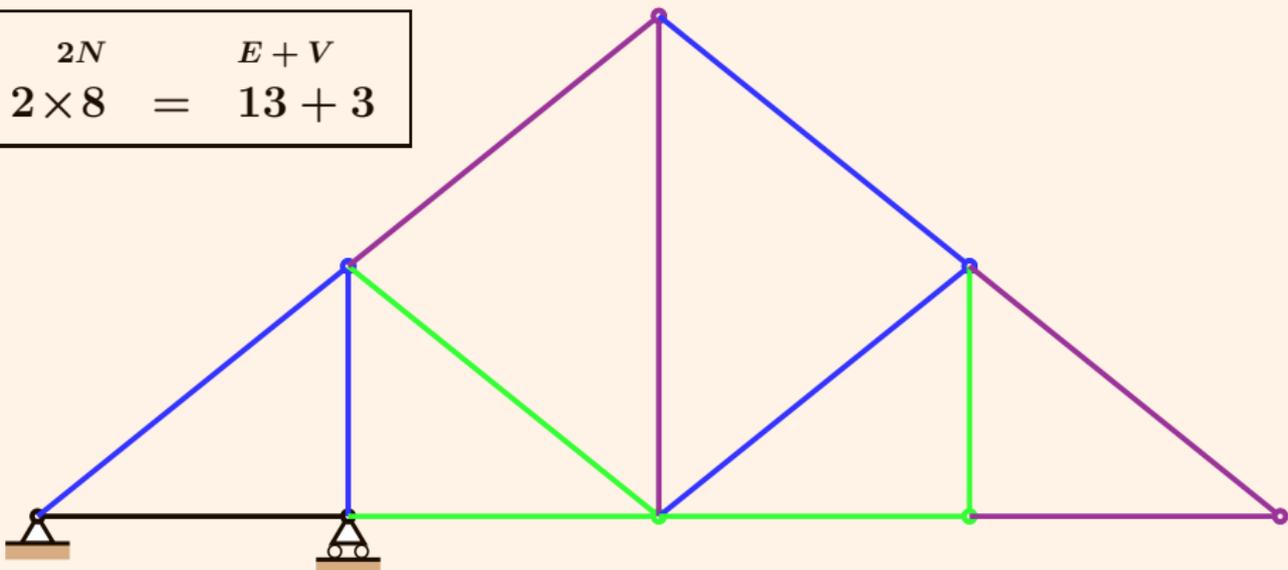
cerchas “simples”

$$2N = E + V$$
$$2 \times 3 = 3 + 3$$



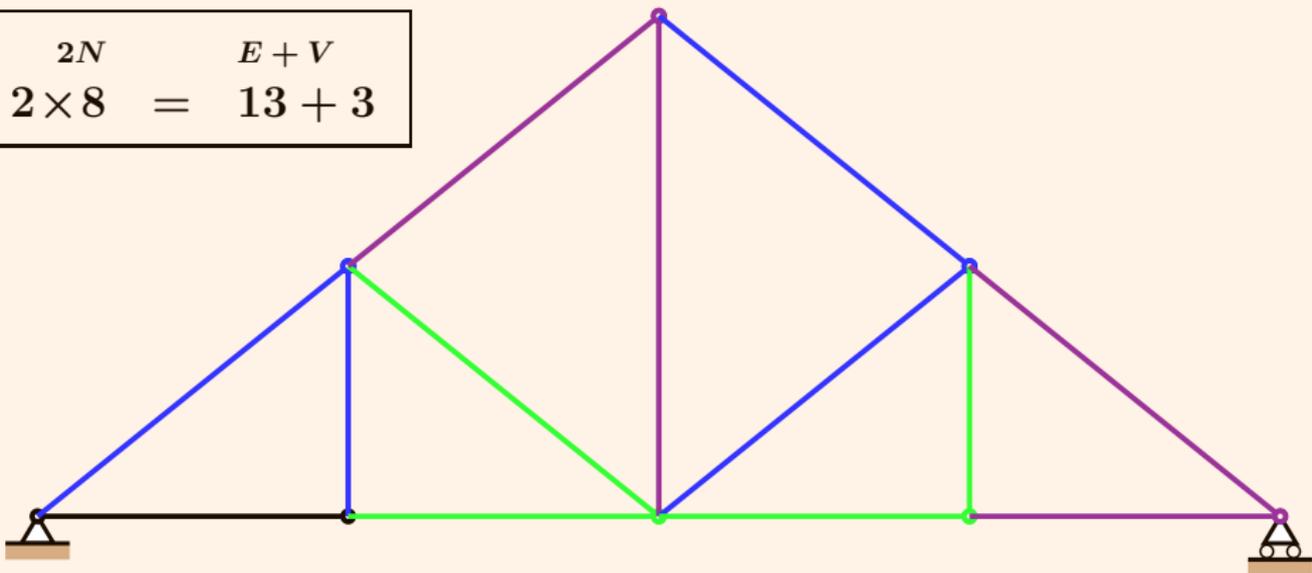
cerchas “simples”

$$2N = E + V$$
$$2 \times 8 = 13 + 3$$



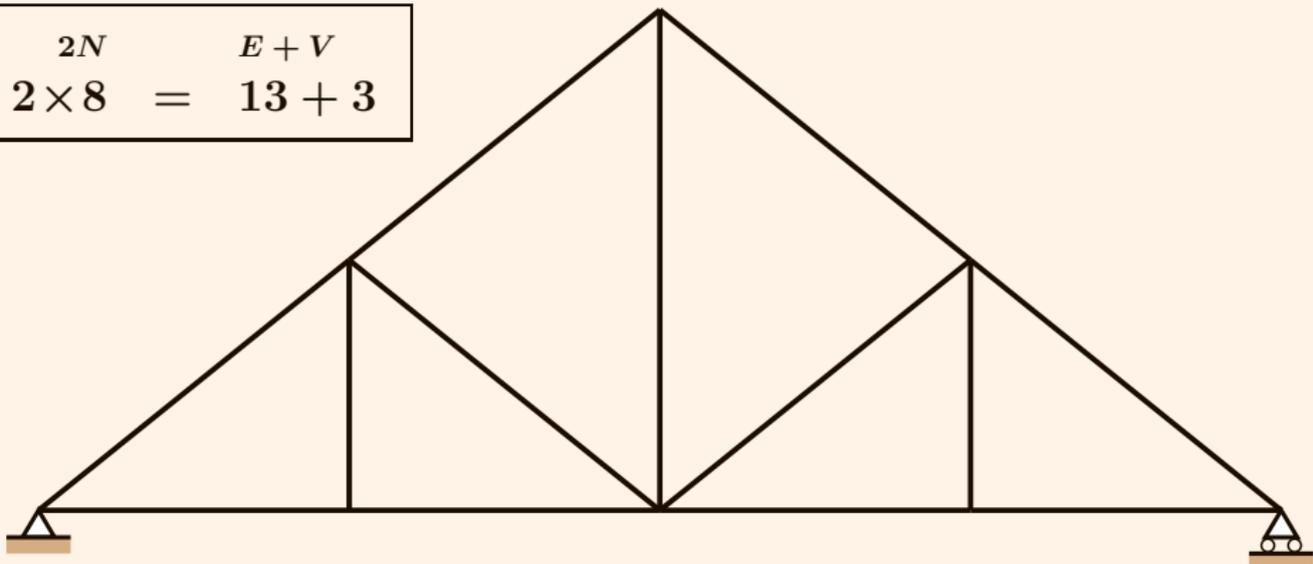
cerchas “simples”

$$2N = E + V$$
$$2 \times 8 = 13 + 3$$

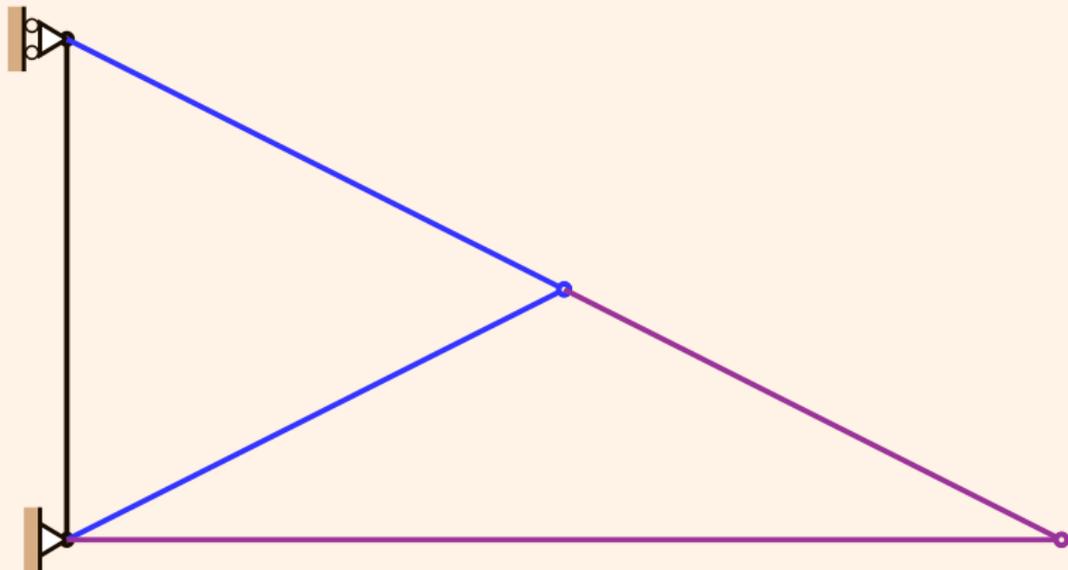


cerchas “simples”

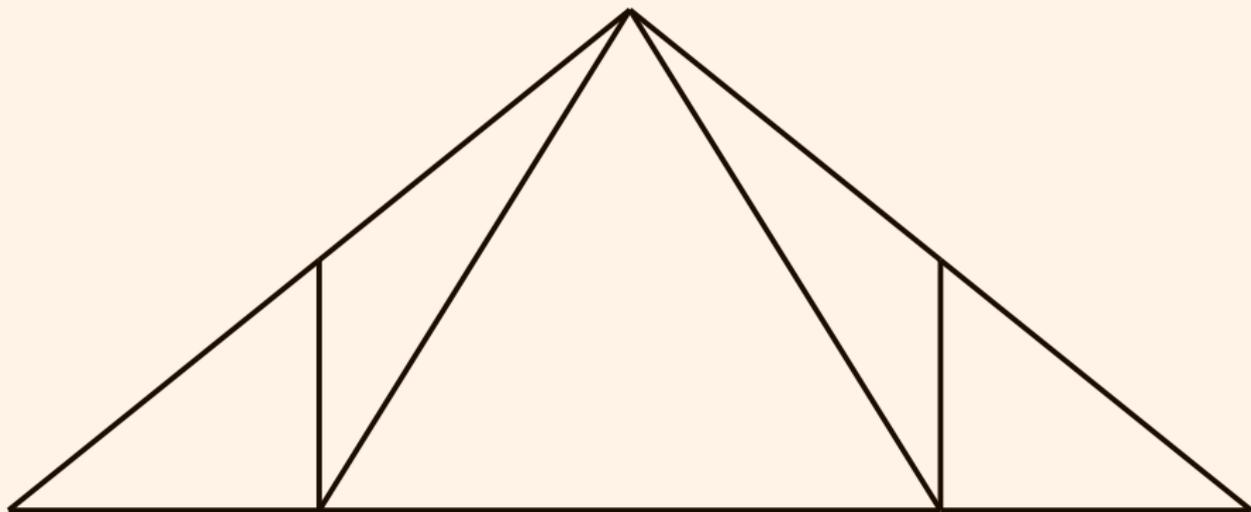
$$2N = E + V$$
$$2 \times 8 = 13 + 3$$



cerchas “simples”



cerchas “simples”

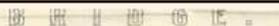


cerchas “simples”



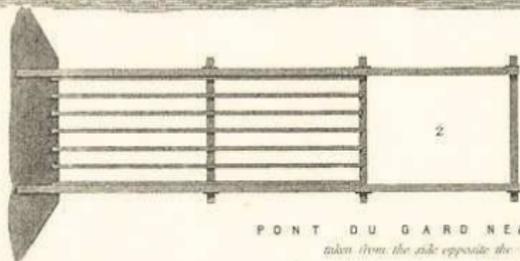
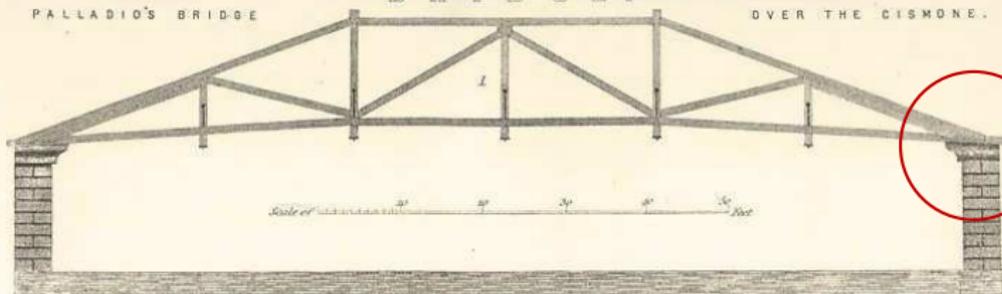
cerchas “simples”

PALLADIO'S BRIDGE



OVER THE CISMONE.

PLATE 2.



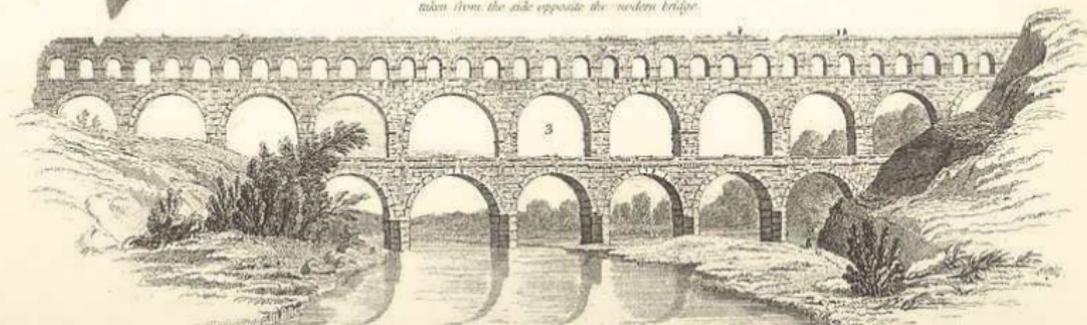
Plan of upper range

Plan of second range

Plan of the modern Bridge at the back of lower range

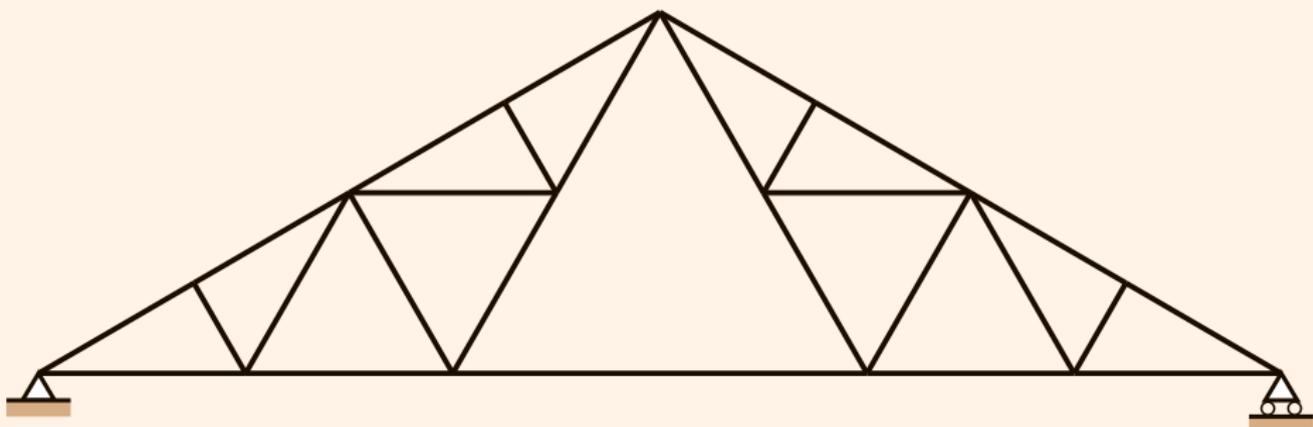
PONT DU GARD NEAR NISMES.

taken from the side opposite the modern bridge.



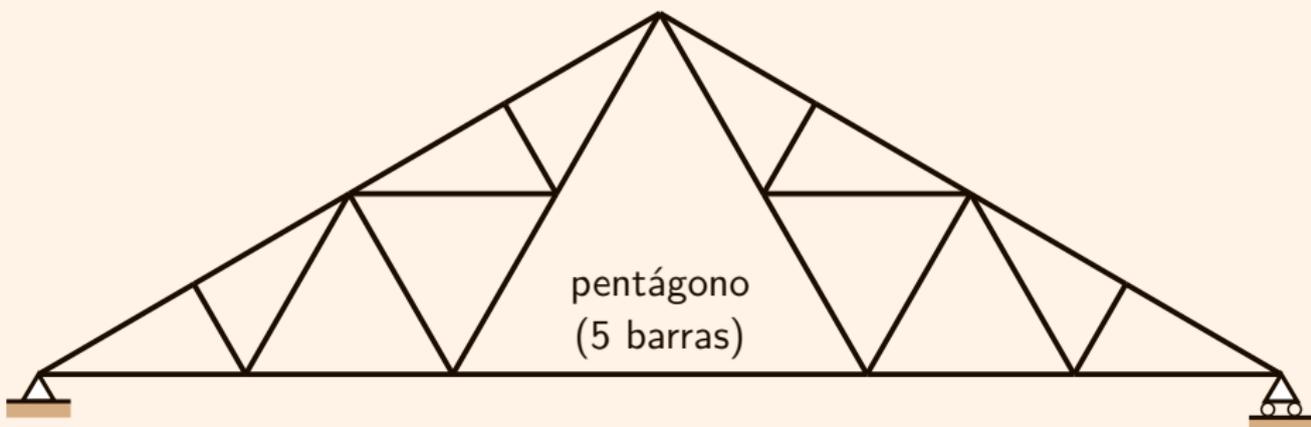
cerchas “compuestas”

$$2N = E + V$$
$$2 \times 15 = 27 + 3$$



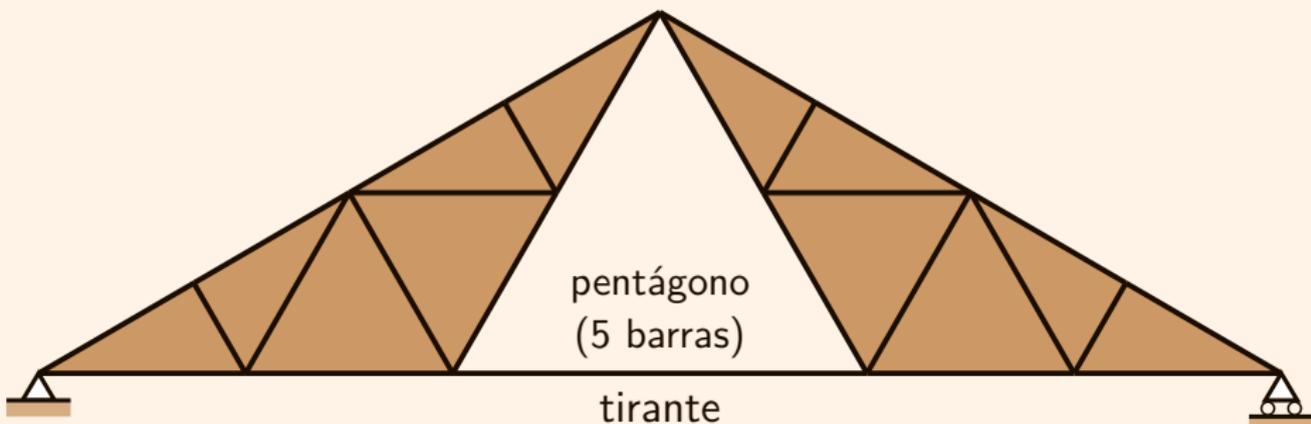
cerchas “compuestas”

$$2N = E + V$$
$$2 \times 15 = 27 + 3$$



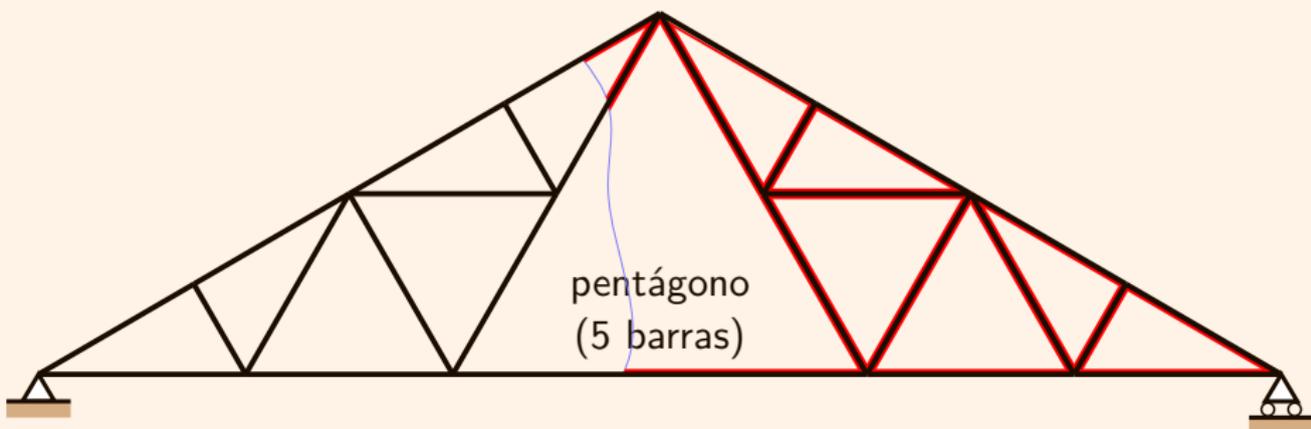
cerchas “compuestas”

$$2N = E + V$$
$$2 \times 15 = 27 + 3$$



cerchas “compuestas”

$$2N = E + V$$
$$2 \times 15 = 27 + 3$$





cerchas “complejas”

1. Aquellas cerchas que ni pueden generarse como simples, ni pueden descomponerse se denominan “complejas”.
2. Una regla práctica para reconocerlas es que, en el plano, cualquier corte imaginable interesa a más de tres barras, de manera que aún siendo formas compatibles determinadas, no es posible obtener ningún esfuerzo sin obtener todos los demás. Es decir, las ecuaciones de equilibrio *sólo* pueden resolverse *simultáneamente*.
3. En el plano son raras, salvo cuando resultan de la superposición de dos o más cerchas.
4. Lo que es seguro es que no suelen ser buenos diseños. . .
[*Lo complejo no es siempre bello*]

Estructuras trianguladas “famosas”



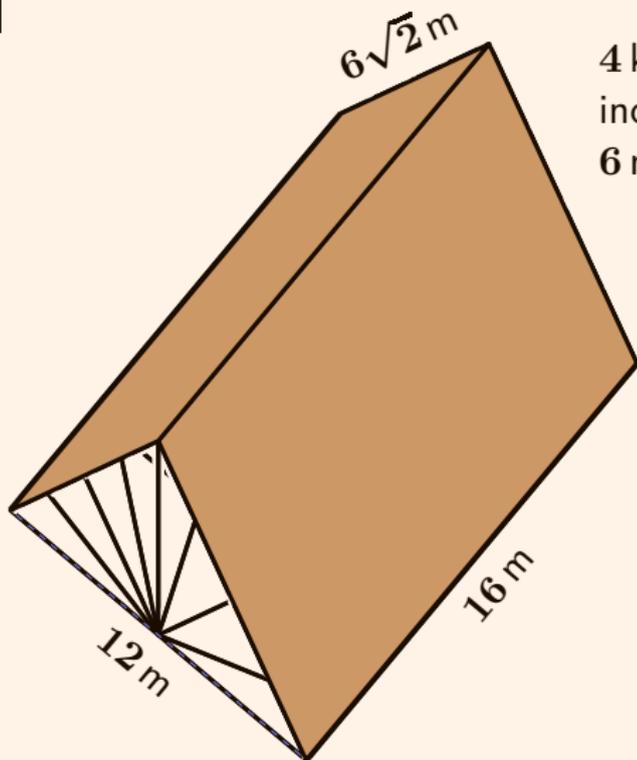
Estructuras trianguladas “famosas”



Estructuras trianguladas “famosas”



Peso total: 1,09 MN

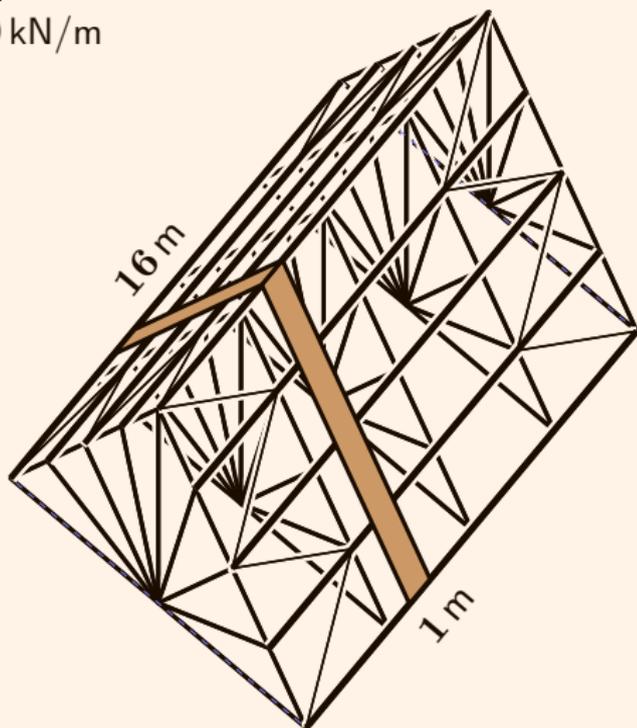


4 kN/m² de tejado
inclinado 45°
6 m de altura

Cercha italiana
atribuida a Palladio,
que la empleo a
menudo. Los dos
ángulos rectos se
dividen en cuatro
partes iguales con las
diagonales.

Peso total: **1,09 MN**

Peso total lineal: **67,9 kN/m**



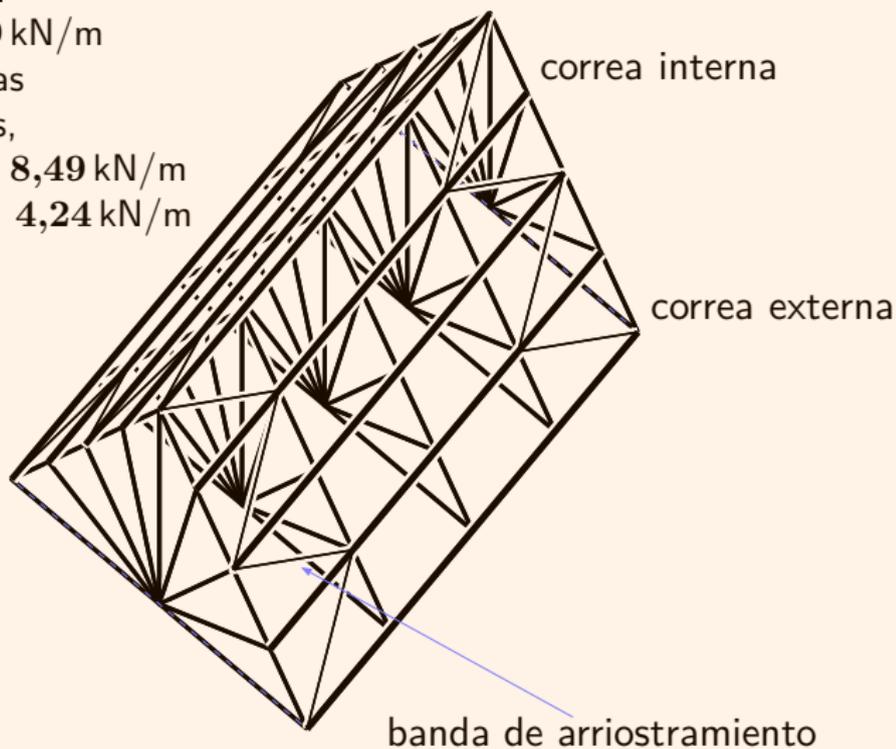
Peso total: **1,09 MN**

Peso total lineal: **67,9 kN/m**

★ Repartido en 7 correas interiores y 2 externas,

- sobre correa interna: **8,49 kN/m**

- sobre correa externa: **4,24 kN/m**



Peso total: **1,09 MN**

Peso total lineal: **67,9 kN/m**

★ Repartido en 7 correas interiores y 2 extremas,

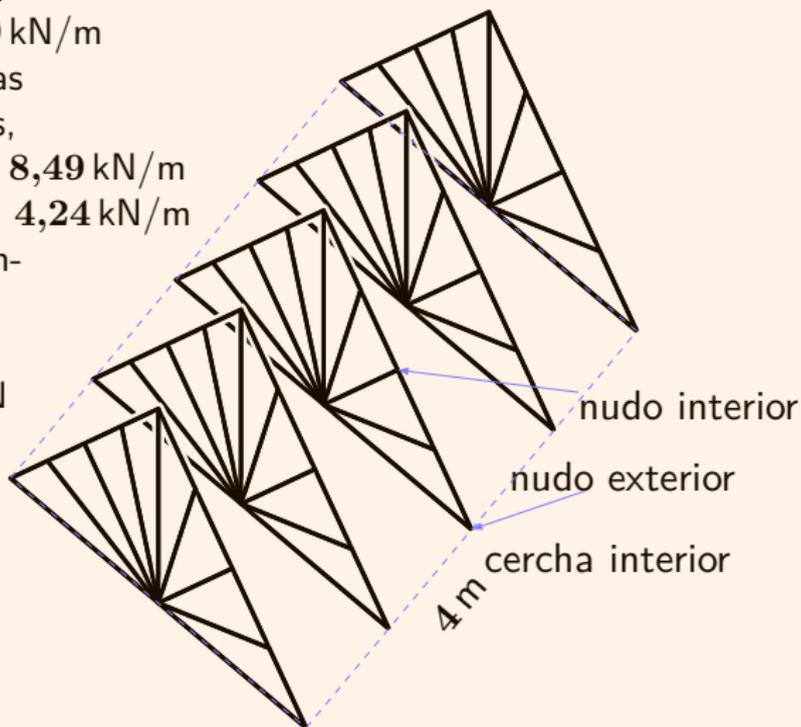
- sobre correa interna: **8,49 kN/m**

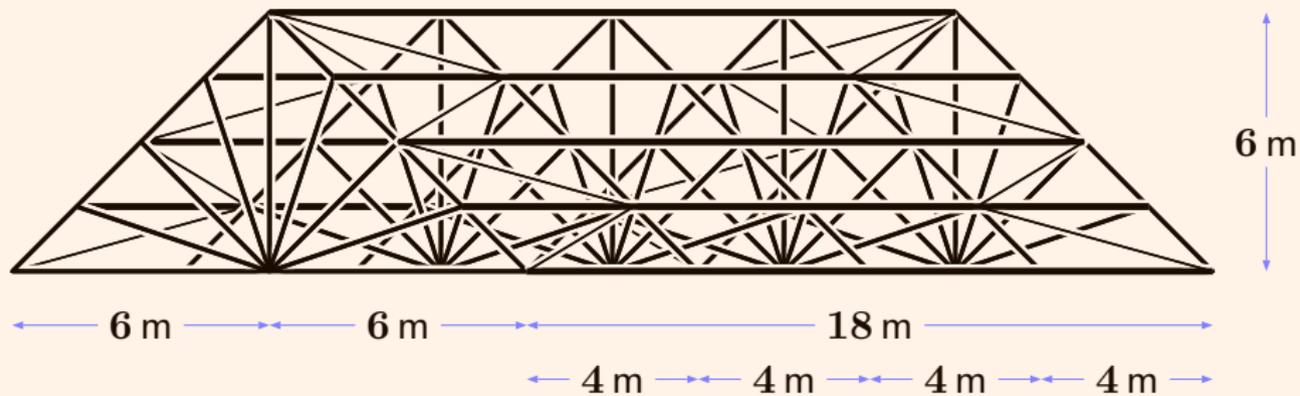
- sobre correa externa: **4,24 kN/m**

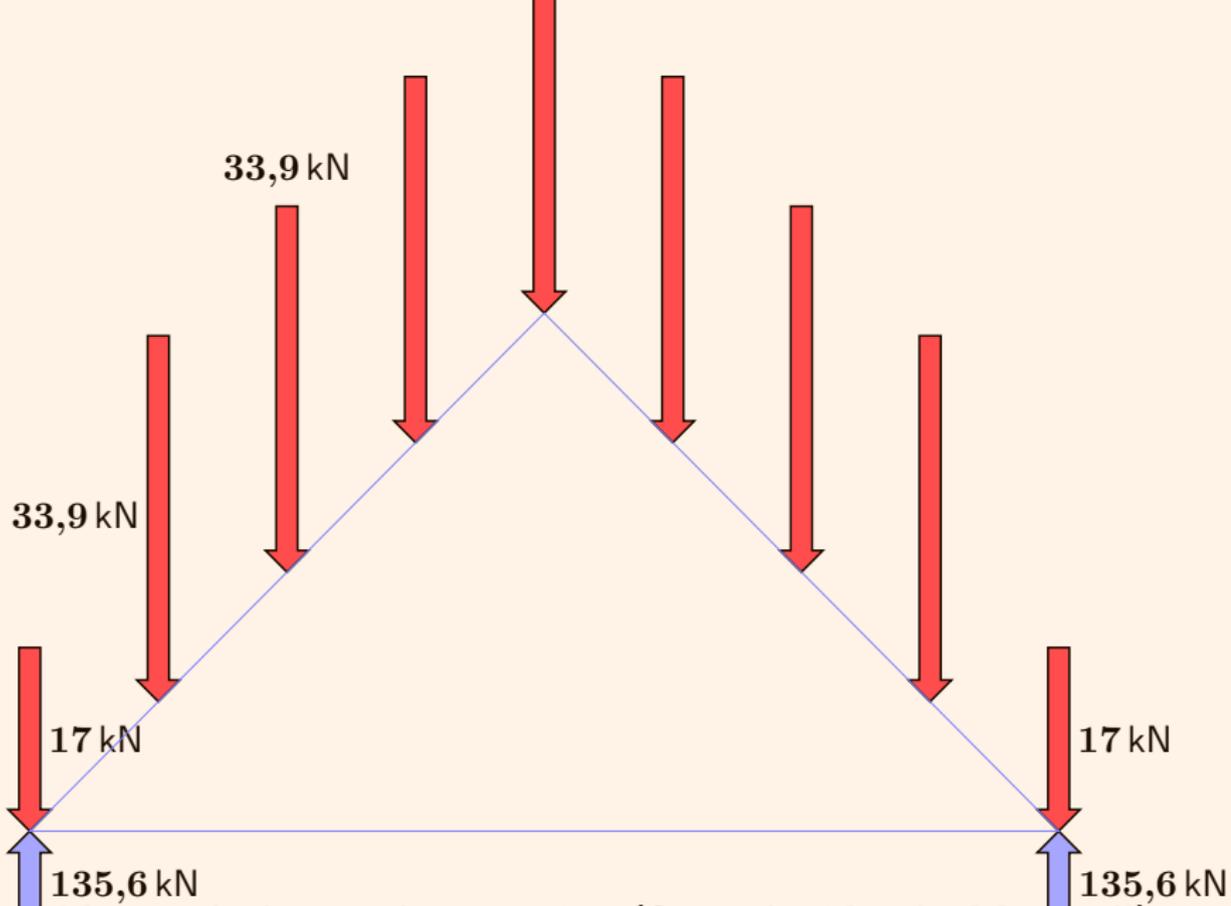
★ Pesos en la cercha interior:

nudo interior: **33,9 kN**

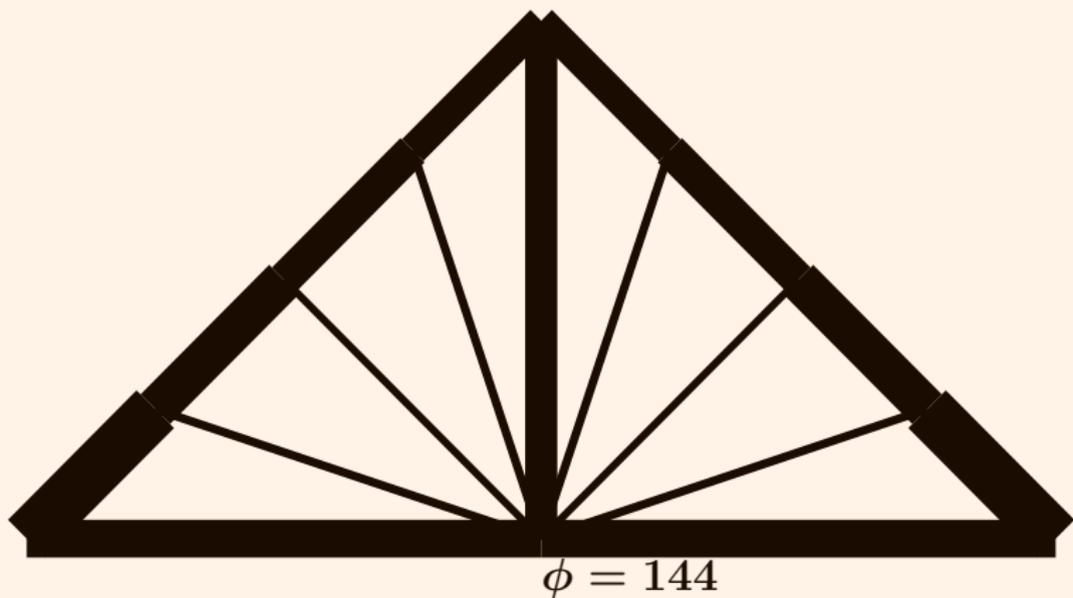
nudo exterior: **17,0 kN**



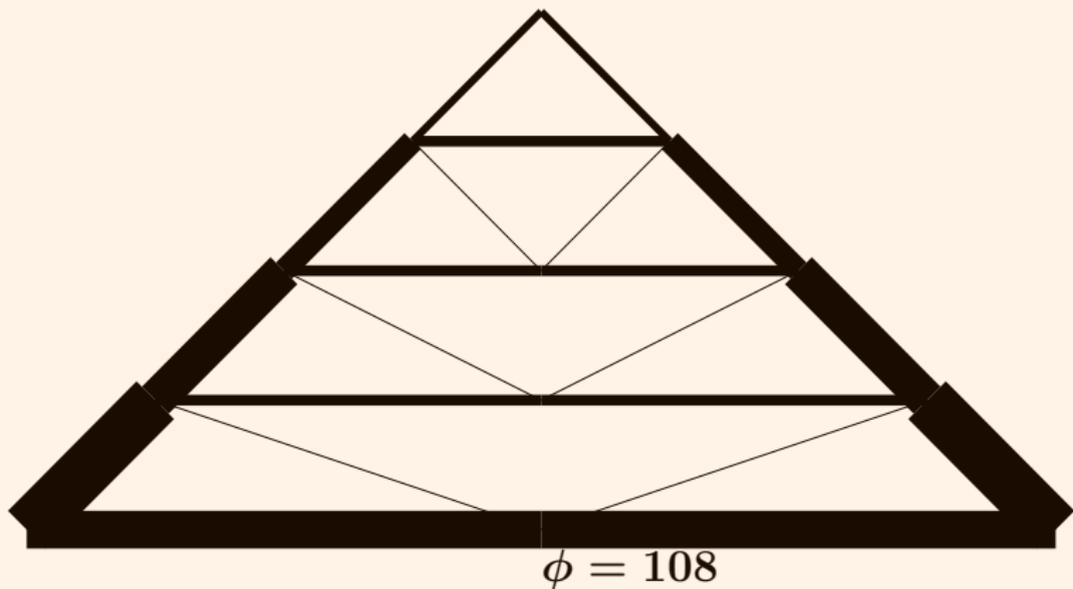




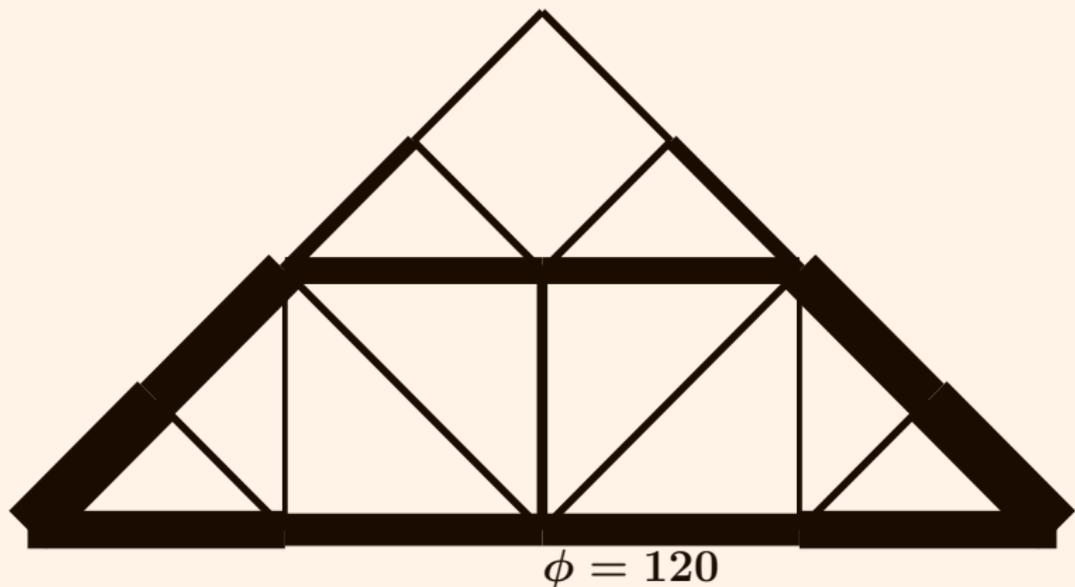
El problema de la cercha interior (formulación de Maxwell)



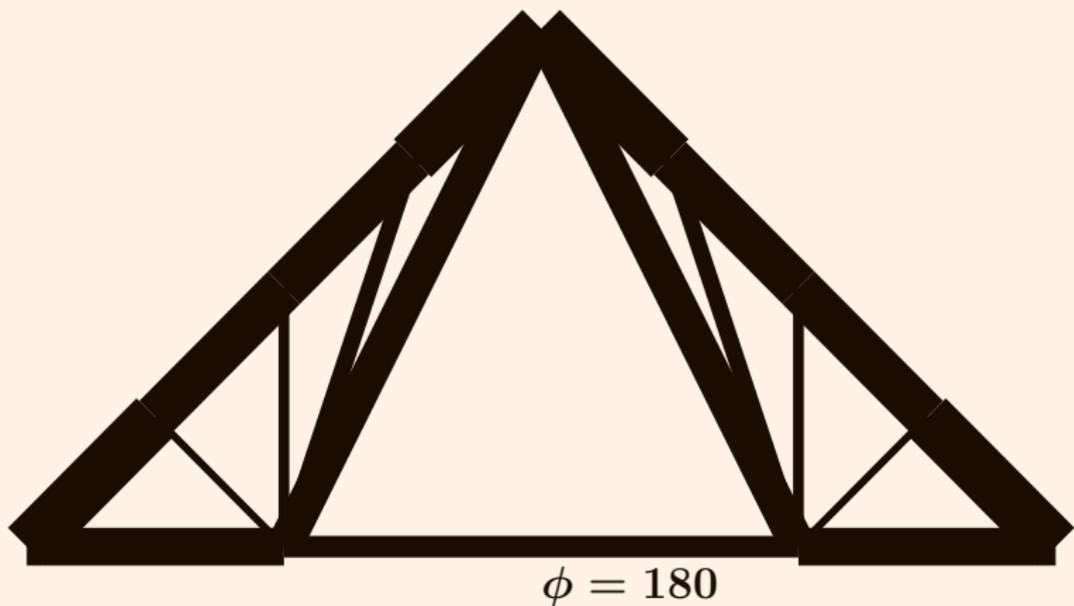
Palladian truss (forma simple)



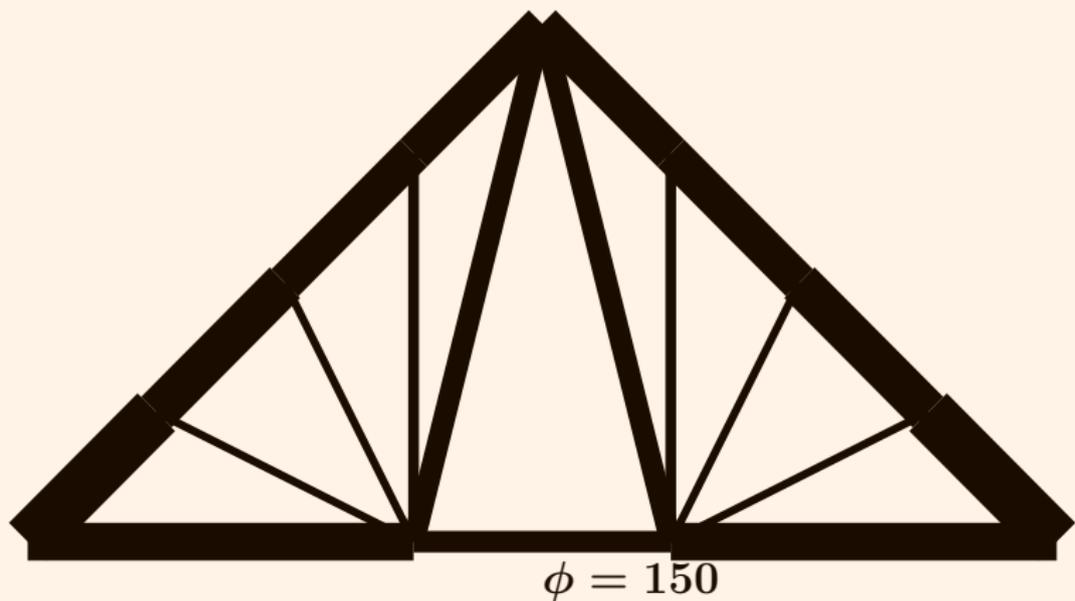
Arcos superpuestos (forma compuesta)



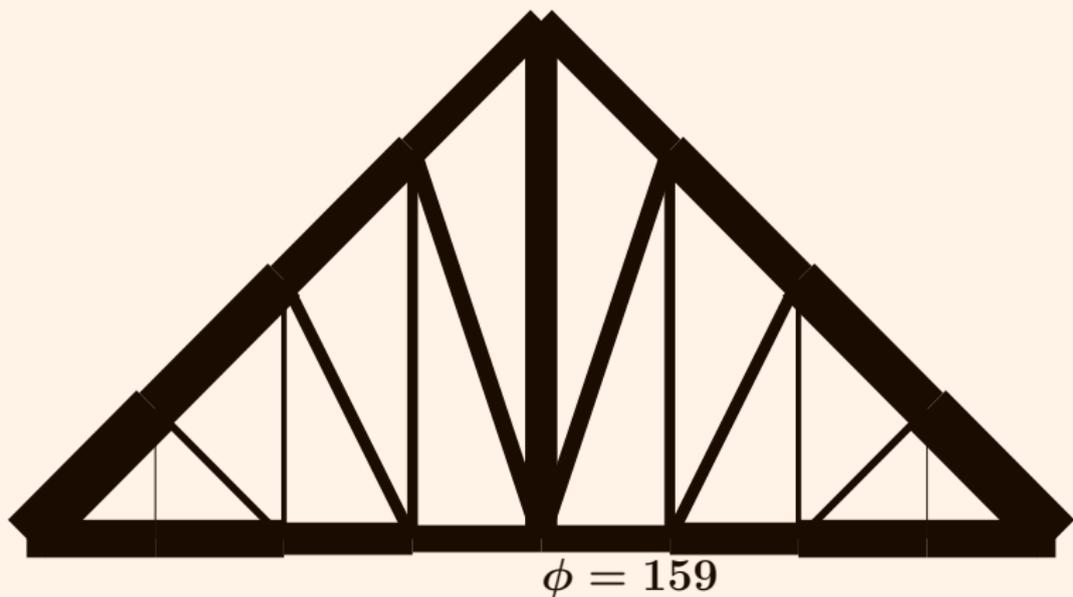
Dos cerchas simples superpuestas (forma compuesta)



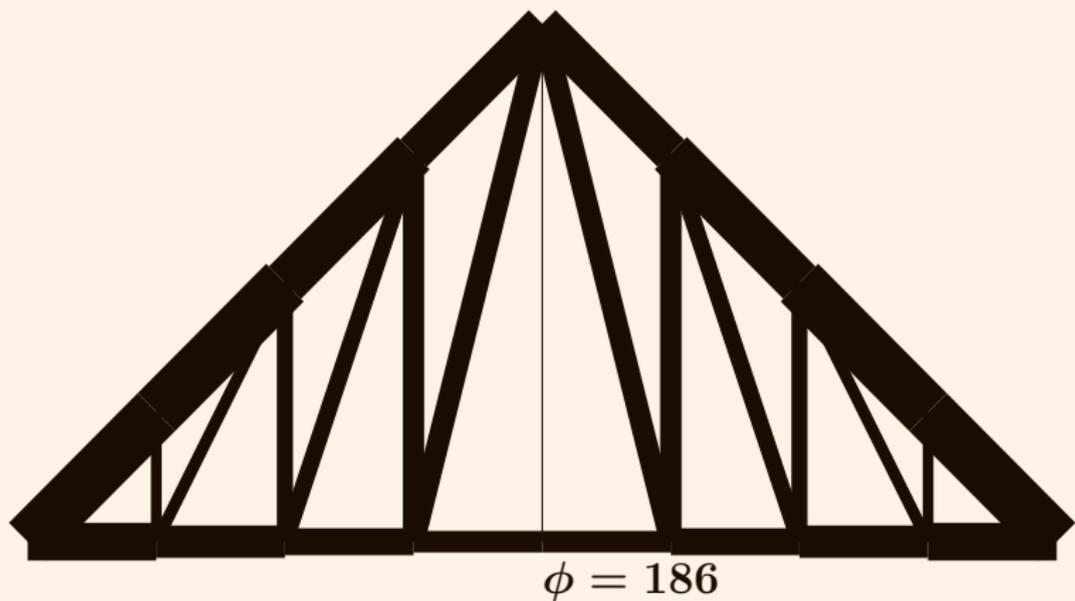
Dos palladianas compuestas con tirante (f. compuesta)



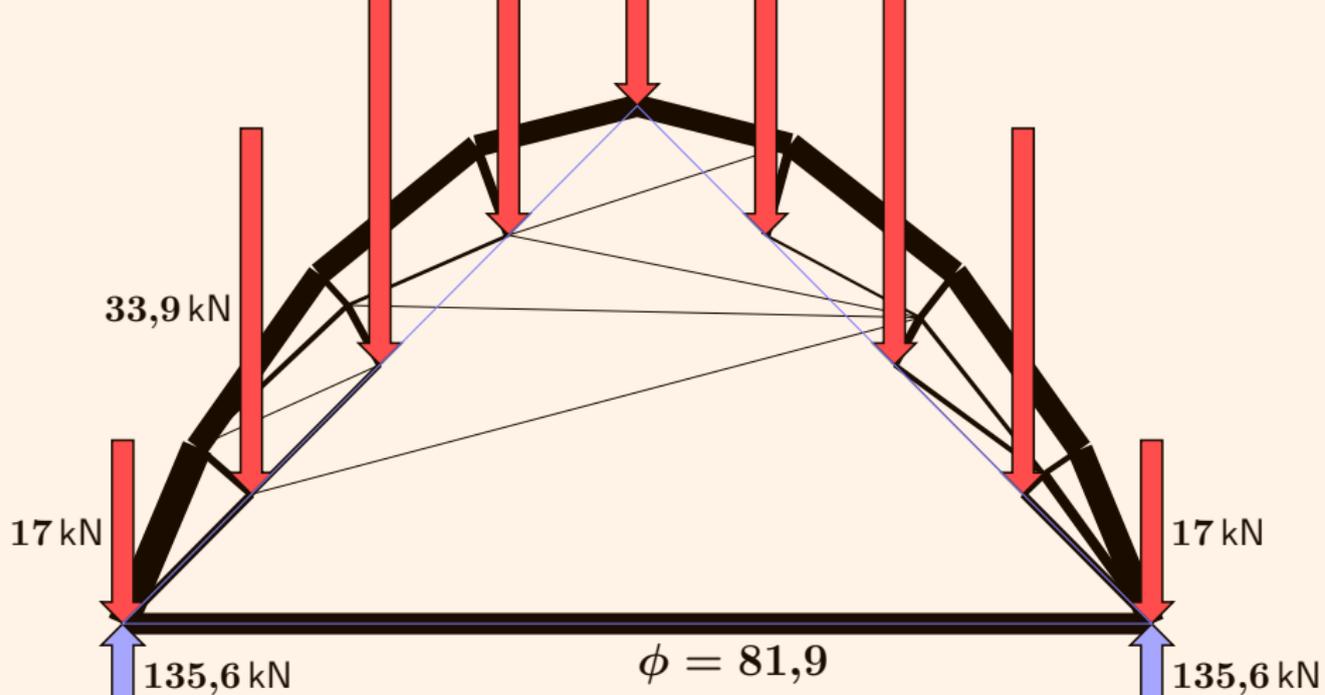
Lo mismo pero mejor (forma compuesta)



Clásica celosía de montantes y diagonales (forma simple)



Clásica celosía de montantes y codales (forma simple)



Arco antifunicular ¡por encima del tejado! (forma compuesta)

Estructuras I
Estructuras trianguladas: Resistencia

Mariano Vázquez Espí

GIAU+S (UPM)

Grupo de Investigación en Arquitectura, Urbanismo y Sostenibilidad

Universidad Politécnica de Madrid

<http://habitat.aq.upm.es/gi>

Edición del 4 de marzo de 2020

compuesto con *free software*:

GNULinux/L^AT_EX/dvips/ps2pdf

Copyright © Vázquez Espí, 2020