Estructuras I

Estructuras trianguladas: Resistencia

Mariano Vázquez Espí

Villamanta/Ondara/Madrid, 2012–2016

Con mejoras sugeridas por J.L. de Miguel y J.I. Hernando

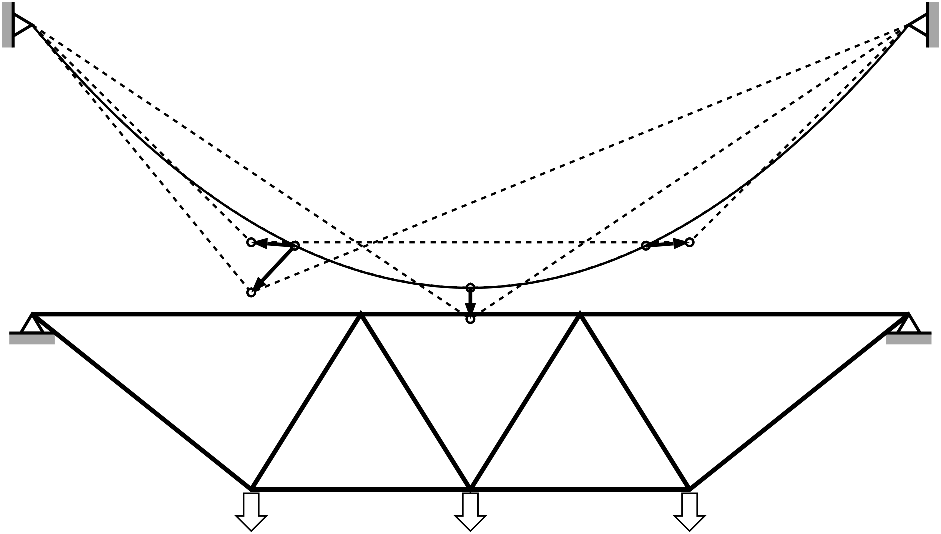
(Las peoras son sólo mías)

Pro memoria

Un conjunto de ecuaciones lineales puede clasificarse como:

- **conjunto compatible** si tiene solución, y en este caso:
  - conjunto compatible **determinado** cuando tiene una única solución.
  - conjunto compatible **indeterminado** cuando admite infinitas soluciones.
- **conjunto incompatible**, si no tiene solución.

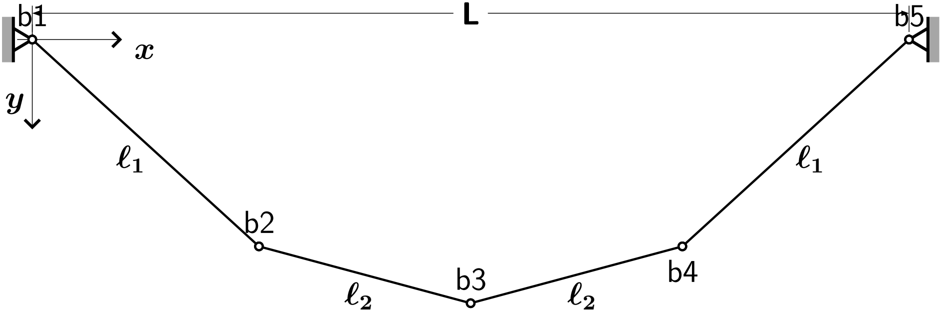
funiculares *versus* cerchas

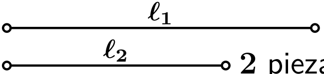


funiculares *versus* cerchas

Juguemos en lo que sigue con conjuntos de barras inextensibles, de longitudes arbitrarias, apoyadas en una sustentación definida mediante vínculos teóricos, y veamos que tipos de formas estructurales podemos construir con ellas.

funiculares *versus* cerchas

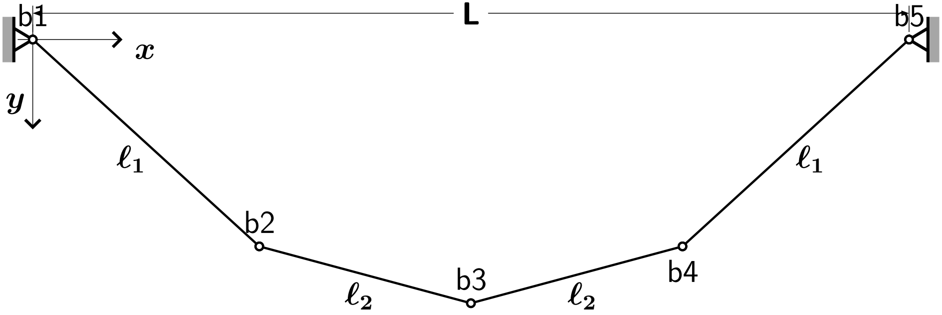




$\mathbf{2}$ piezas de $\mathbf{35{,}2}$ dm

$\mathbf{2}$ piezas de $\mathbf{25}$ dm

funiculares *versus* cerchas



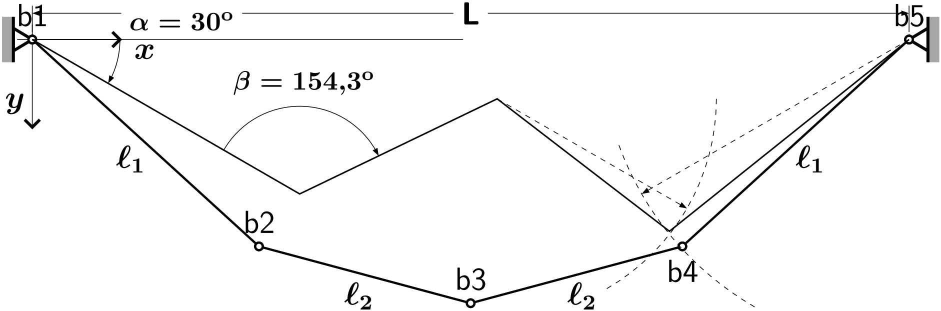
Incógnitas del dibujo: coordenadas $\boldsymbol{x, y}$: $\mathbf{5}$ puntos $\times\ \mathbf{2 = 10}$

Ecuaciones: 8

- sustentación: $\boldsymbol{x_1 = y_1 = y_5 = 0, x_5 =}$ **L**: 4 ecuaciones
- longitudes conocidas (por 'Pitágoras'): $\boldsymbol{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \ell_1}$, etc: 4 ecuaciones

$\mathbf{10 - 8 = 2}$: 2 grados de libertad geométrica

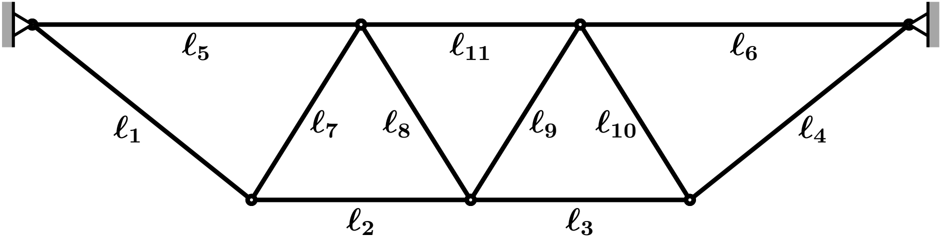
funiculares *versus* cerchas



Los parámetros que definen una forma concreta pueden elegirse: en la figura, por ejemplo, podrían ser los ángulos α y β. Estos dos ángulos, junto con las cuatro longitudes fijas, determinan completamente todas las coordenadas desconocidas de los puntos 2, 3 y 4. (Las soluciones para las coordenadas (x, y) pueden ser números complejos y el dibujo inexistente en el plano 2D ordinario.)

Forma compatible indeterminada (funicular, mecanismo,. . .)

funiculares *versus* cerchas



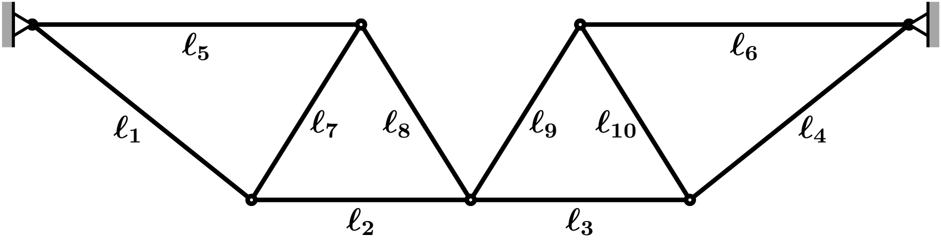
Incógnitas: $\mathbf{7}$ puntos $\times\ \mathbf{2} = \mathbf{14}$.

Ecuaciones: 15:

- Sustentación: 4
- Longitudes: 11

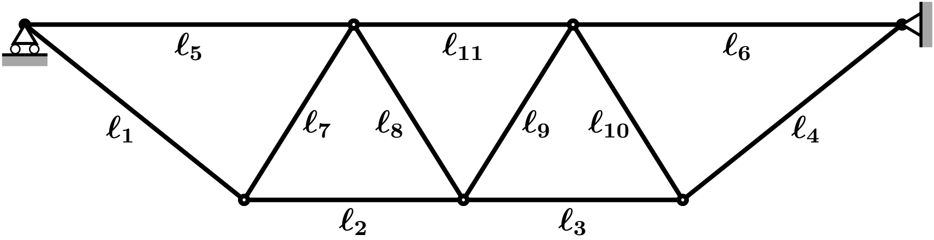
Hay una ecuación más (15) que coordenadas (14): la forma está sobredeterminada: una de las longitudes está determinada al fijar valores para el resto y por tanto no puede ser **arbitraria**. **Forma incompatible** (para valores arbitrarios de $\boldsymbol{\ell_{11}}$, por ejemplo).

funiculares *versus* cerchas



Podemos quitar una de las barras, por ejemplo la 11, y la forma de la triangulación seguiría estando determinada por la sustentación y por las longitudes de las barras, que ahora podemos elegir arbitrariamente. **Forma compatible determinada** (aunque puede no existir en el plano 2D ordinario)

funiculares *versus* cerchas



O podemos dejar todas las barras, y suprimir un vínculo cambiando una articulación por un apoyo, por ejemplo la de la izquierda. El número de coordenadas sigue siendo igual al número de ecuaciones. **Forma compatible determinada**

condición necesaria

En general, en una triangulación de N puntos, E distancias conocidas y V coordenadas conocidas de antemano, se tendrá lo siquiente:

- $V \geq 3$: al menos tres coordenadas son conocidas, o pueden fijarse arbitrariamente (al decidir la posición del dibujo sobre el papel).
- Al comparar $2N$ con $V + E$:
  - $2N > V + E$: **forma compatible indeterminada**: en general habrá infinitas formas que cumplan con las $V + E$ ecuaciones
  - $2N = V + E$: **forma compatible determinada**
  - $2N < V + E$: **forma incompatible** en general: para que un dibujo cumpla con las $V + E$ ecuaciones, habrá que elegir $V + E - 2N$ longitudes en función del resto

condición necesaria

Supongamos ahora que las barras son deformables (aunque poco, según exige el requisito de rigidez). Puesto que las barras pueden alargarse o acortarse, el planteamiento geométrico ya no sirve. Pero bajo la acción de fuerzas en los nudos, si hay equilibrio, los esfuerzos en las barras tienen que cumplir condiciones precisas. El planteamiento geométrico puede sustituirse por uno mecánico (no totalmente análogo).

condición necesaria

En una estructura triangulada de $\boldsymbol{N}$ *nudos*, $\boldsymbol{E}$ barras y $\boldsymbol{V}$ condiciones de sustentación sometida a un conjunto arbitrario de acciones **con deformaciones pequeñas** tendremos: $\boldsymbol{2N}$ ecuaciones de equilibrio (dos por nudo); y $\boldsymbol{V}$ reacciones y $\boldsymbol{E}$ esfuerzos desconocidos: $\boldsymbol{V+E}$ incógnitas:

- $\boldsymbol{2N > V + E}$: en general no habrá equilibrio, salvo para un conjunto peculiar de fuerzas exteriores (equilibrio imposible —estructura funicular)
- $\boldsymbol{2N = V + E}$: si hay equilibrio, las reacciones y esfuerzos están unívocamente determinados por las ecuaciones (equilibrio posible determinado —análisis isostático)
- $\boldsymbol{2N < V + E}$: si hay equilibrio, las reacciones y esfuerzos no están, en general, determinados por las ecuaciones (equilibrio posible indeterminado —análisis hiperestático)

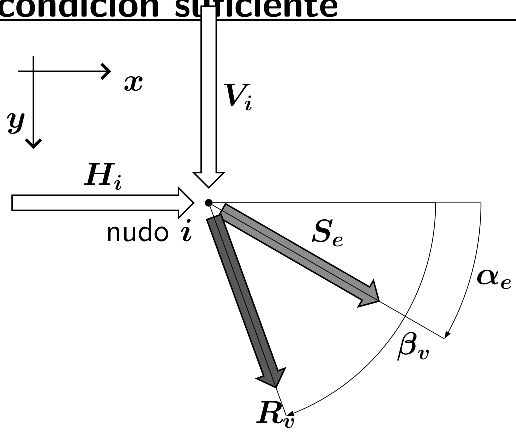
condición necesaria

En resumen,

$$\boxed{\begin{array}{c} \boldsymbol{2N \leq V + E} \\ \text{con} \\ \boldsymbol{V \geq 3} \end{array}}$$

es la condición necesaria (pero no suficiente) para que una estructura triangulada esté en equilibrio con un conjunto arbitrario de acciones sin sufrir grandes deformaciones durante la carga.

condición suficiente

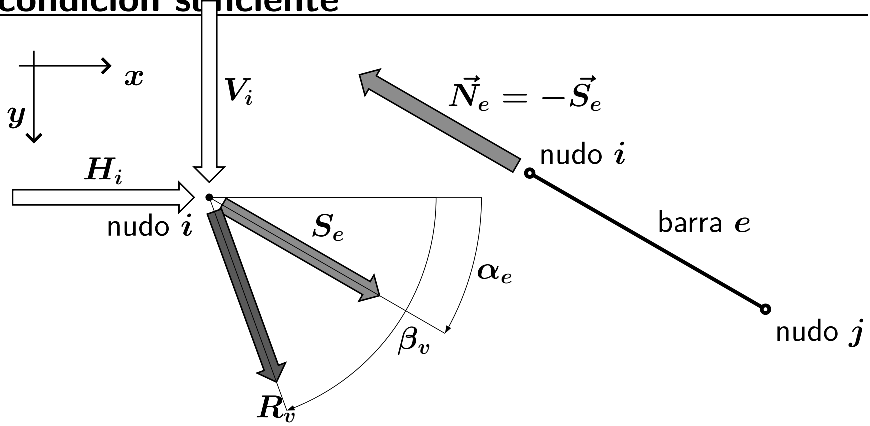


Usando la hipótesis de pequeñas deformaciones, establecemos las ecuaciones de equilibrio en la **geometría de proyecto de la cercha (sin deformación alguna)**. Si finalmente la cercha cumple con el requisito habitual de rigidez, tales ecuaciones resultarán ser suficientemente aproximadas.

$$\boldsymbol{H_i} + \sum_{\text{nudo } i} \boldsymbol{S_e} \cos(\boldsymbol{\alpha_e}) + \boldsymbol{R_v} \cos(\boldsymbol{\beta_v}) \approx \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{V_i} + \sum_{\text{nudo } i} \boldsymbol{S_e} \sin(\boldsymbol{\alpha_e}) + \boldsymbol{R_v} \sin(\boldsymbol{\beta_v}) \approx \mathbf{0}$$

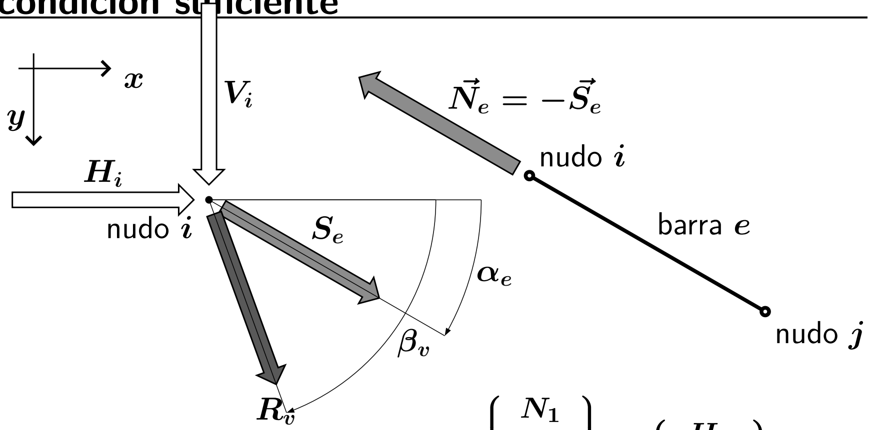
condición suficiente



$$\sum_{\text{nudo } i} N_e \cos(\alpha_e) - R_v \cos(\beta_v) \approx H_i$$

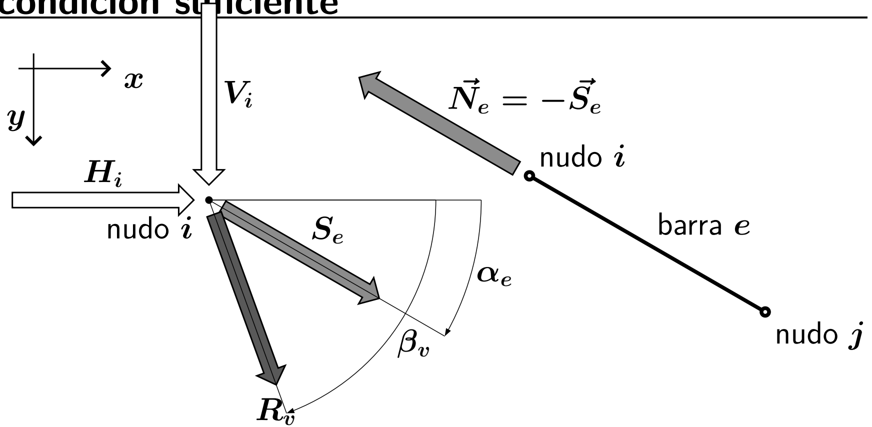
$$\sum_{\text{nudo } i} N_e \sin(\alpha_e) - R_v \sin(\beta_v) \approx V_i$$

condición suficiente



$$Ax = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,E+V} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{2N,1} & \cdots & A_{2N,E+V} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_E \\ R_1 \\ \vdots \\ R_V \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ \vdots \\ H_N \\ V_N \end{Bmatrix} = b$$

condición suficiente



$$\underset{2N\times(E+V)}{[A]} \cdot \underset{(E+V)\times 1}{[x]} = \underset{2N\times 1}{[b]}$$

cerchas compatibles determinadas, $2N = E + V$, y la condición suficiente se reduce a que

$$\boxed{\det A \neq 0}$$

¿Articulaciones en los nudos?

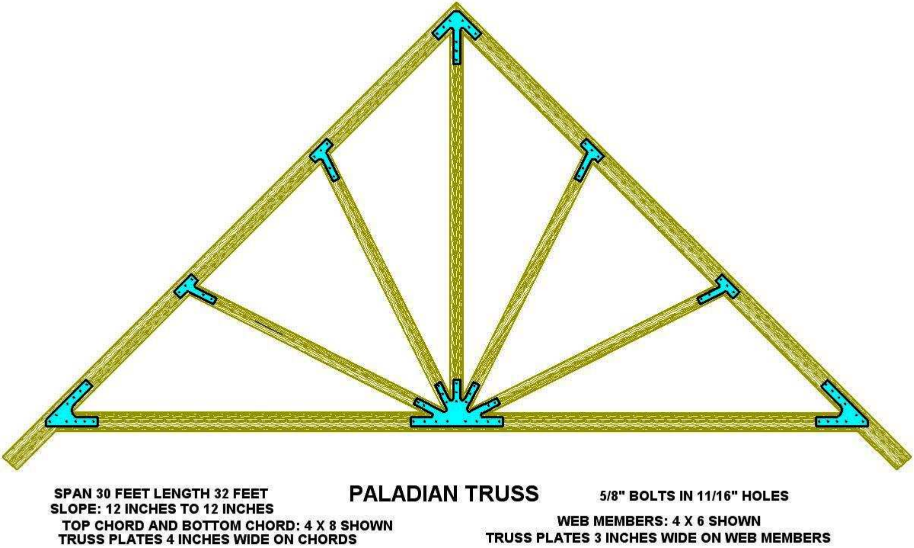
Las hipótesis anteriores suponen que las barras están sometidas a solicitaciones de tracción o compresión simple, y nada más.

Hay quien piensa que esa suposición requiere disponer articulaciones sin rozamiento para unir las barras entre sí. Se trata de una **superstición**. Esto requiere mantenerlas engrasadas y un montón de complicaciones adicionales. Y como las barras pesarán algo, habrá además flexión (aunque sea pequeña).

Si no se disponen articulaciones (lo que en la mayor parte de los casos **no es necesario ni recomendable**), aparecerán en las barras esfuerzos flectores y cortantes: se trata de esfuerzos secundarios, con aumentos de tensión que en análisis o diseños preliminares pueden ignorarse.

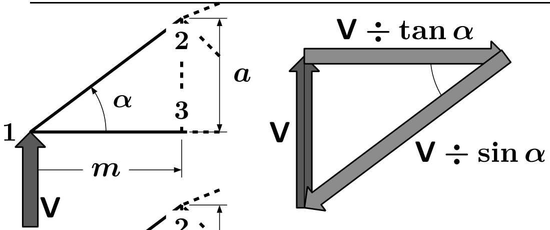
Con el modelo presentado se explora si la estructura será capaz de equilibrar las fuerzas exteriores en nudos con esfuerzos de tracción o compresión exclusivamente, con independencia de como sean las uniones de sus barras. . .

¿Articulaciones en los nudos?



¿Articulaciones en los nudos?

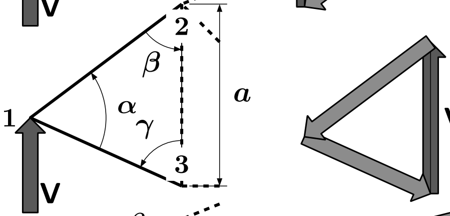
Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)



$\sum M_3 = 0$:

$$\mathsf{V} \cdot m + N_{12} \cdot m \cdot \sin\alpha = 0$$

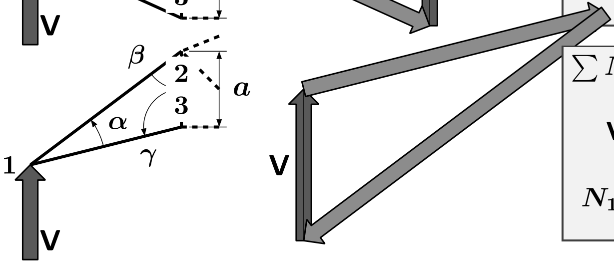
$$N_{12} = -\frac{\mathsf{V}}{\sin\alpha} = -1{,}67\mathsf{V}$$



$\sum M_3 = 0$:

$$\mathsf{V} \cdot m + N_{12} \cdot a \sin\beta = 0$$

$$N_{12} = -\mathsf{V}\frac{m}{a \sin\beta} = -1{,}04\mathsf{V}$$

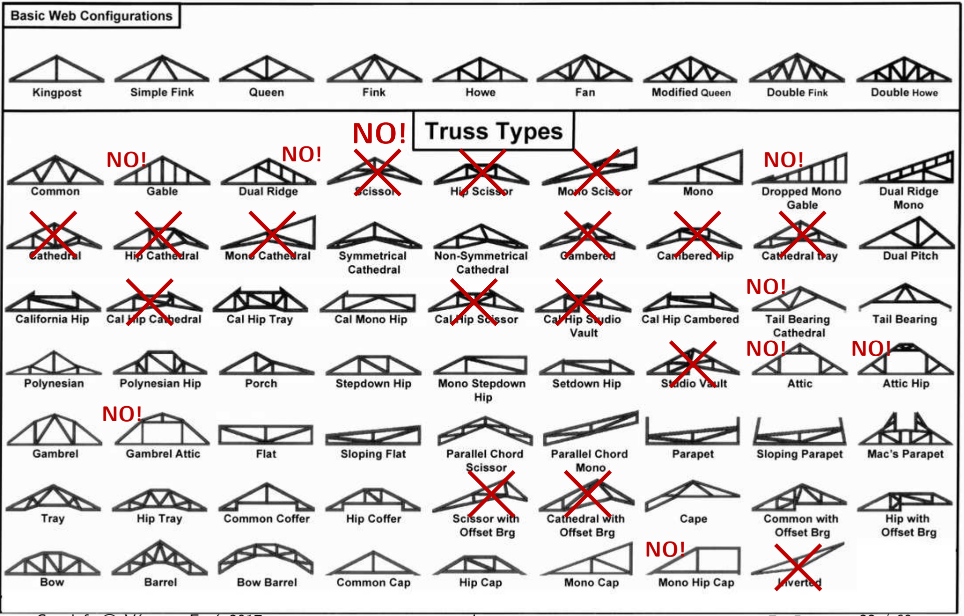


$\sum M_3 = 0$:

$$\mathsf{V} \cdot m + N_{12} \cdot a \sin\beta = 0$$

$$N_{12} = -\mathsf{V}\frac{m}{a \sin\beta} = -2{,}5\mathsf{V}$$

Equilibrio en el apoyo (primera regla de diseño)

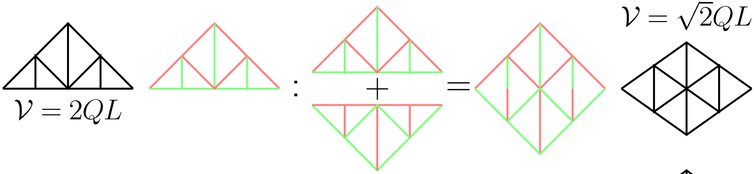


Simetría, esbeltez (segunda regla de diseño)

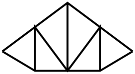
The design theory: a short tour (Contemporary jargon, informal definitions)

Improving structures

Bending likes simetrical solutions (Theorem). If your structure is not simetric respect of the bend span and has optimal slenderness, make it simetric by the mean of a simple mirror, and multiply its original height by $\sqrt{2}$. It will look better now, won't it? (The quantity of structure is reduced as slenderness, by $\sqrt{2}$).



If you haven't freedom enough, try this as much as you can! $\rightarrow$



Resistencia

- En general una cercha estará sometida a $\boldsymbol{H}$ hipótesis de carga distintas.
- Cada barra tendrá que hacer frente a distintos valores de esfuerzo normal; incluso puede estar en ocasiones traccionada unas veces y comprimida otras:

$$\text{tracción pésima}_{e} = \max_{h}(\boldsymbol{N}_{e,h})$$

$$\text{compresión pésima}_{e} = \min_{h}(\boldsymbol{N}_{e,h})$$

Resistencia

- **Barras traccionadas** $N_e > 0$: Si $N = N_e$,

  Comprobación: $\quad N \leq \mathsf{\mathbf{Af}} = \mathcal{R}_{\mathbf{T}}$

  $\mathcal{R}_{\mathbf{T}}$: resistencia segura a tracción

  Dimensionado: $\quad A \geq \mathsf{\mathbf{A}}_{\mathbf{min}} = N/\mathsf{\mathbf{f}}$

Resistencia

- **Barra sin tensión $N_e = 0$**: Si la cercha es una forma compatible determinada ("isostática") *es necesaria y no puede suprimirse*, pues de hacerlo $E + V < 2N$ y la estructura sería funicular. Se dimensiona con el menor perfil disponible. Si la cercha es una forma incompatible ("hiperestática") podría suprimirse…

  Tales barras, aunque son frecuentes en *una* hipótesis de carga particular, son raras cuando se consideran varias. Son inexistentes en cuanto se considera el peso propio de la estructura. O cuando se plantea el equilibrio en la geometría deformada, aunque sea poco.

  A veces puede suprimirse una a condición de suprimir un nudo y otra barra, caso frecuente en nudos sin carga y barras ortogonales…

Resistencia

- **Barras comprimidas $N_e < 0$:**

Barras muy esbeltas	Barras poco esbeltas
Rotura por flexión o pandeo	Rotura por aplastamiento
$\mathcal{R}_\mathrm{C} \ll \textbf{Af}$	$\mathcal{R}_\mathrm{C} \simeq \textbf{Af}$

Resistencia

- **Barras comprimidas** $N_e < 0$: Sea $N = \text{abs}\,(N_e)$.

  Esbeltez geométrica: ℓ/h. Esbeltez mecánica: $\ell/\mathbf{i}$, siendo **i** el radio de giro de la sección, $\mathbf{i} = \sqrt{\mathbf{I}/\mathbf{A}}$. Coeficiente de pandeo ω, función de la esbeltez mecánica y del material empleado: $\omega \geq 1$ siempre.

  Comprobación: $$N \leq \frac{\mathbf{Af}}{\omega} = \mathcal{R}_{\mathrm{C}}$$

  Dimensionado: Por tanteo, dado que en la expresión anterior ω depende de **A** y no es fácil despejar **A**.

  La fracción $\mathbf{A} \div \omega$, siempre menor que **A**, puede considerarse el ***área eficaz*** o ***útil*** para resistir compresiones, $\mathbf{A}_{\mathrm{ef}}$; tanto menor cuanto más esbelta sea la barra.

Resistencia

- **Barras comprimidas** $N_e < 0$: Por ejemplo, para una sección cuadrada de lado **a**:
  - Área: $\mathbf{A} = \mathbf{a}^2$
  - Inercia: $\mathbf{I} = \mathbf{a}^4 \div 12$
  - Radio de giro: $\mathbf{i} = \sqrt{\mathbf{I}/\mathbf{A}} = \mathbf{a} \div \sqrt{12} \simeq 0,29\,\mathbf{a}$
  - Esbeltez mecánica $\boldsymbol{\lambda}_m = \dfrac{\boldsymbol{\ell}}{\mathbf{i}}$
  - Coeficiente de pandeo $\boldsymbol{\omega}$: se encuentra en la tabla correspondiente al tipo de perfil y material empleado entrando con $\boldsymbol{\lambda}_m$
  - Resistencia con seguridad a compresión $\mathcal{R}_{\mathrm{C}} = \mathbf{Af} \div \boldsymbol{\omega}$

Resistencia

- **Barras comprimidas $N_e < 0$:**

Sección		Radio de giro
cuadrada maciza	■	$\mathbf{0,29} \times$ lado
cuadrada hueca	□	$\approx\mathbf{0,40} \times$ lado
circular maciza	●	$\mathbf{0,25} \times$ diámetro
circular hueca	○	$\approx\mathbf{0,35} \times$ diámetro

El radio de giro no puede ser mayor que la mitad del ancho de la pieza. Para secciones razonables no puede ser menor de la cuarta parte.

Pueden elegirse secciones tan ineficientes que el radio de giro tienda a cero: secciones en cruz de brazos muy desiguales, chapas delgadas—una hoja de papel—, etc. El consumo de material se dispara. . .

Clases de formas compatibles determinadas

A veces resulta útil distinguir tres clases:

- **cerchas simples**: puede analizarse su equilibrio nudo a nudo, no es necesario resolver más que dos ecuaciones simultáneas. Son las de uso más frecuente.
- **cerchas compuestas**: unión de dos o más de las simples: suele ser necesario calcular primero el esfuerzo de las barras de unión (mediante cortes) antes de proceder como en el caso anterior.
- **cerchas complejas**: raramente se trata de buenos diseños, y puede ser necesario resolver simultáneamente un gran número de ecuaciones (útiles para *postmodern designs*)

Las formas incompatibles (equilibrio posible indeterminado) se usan también frecuentemente —tienen ventajas e inconvenientes—, pero no las estudiamos aquí.

cerchas “simples”

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \boldsymbol{2N} & & \boldsymbol{E+V} \\ \mathbf{2\times 2} & = & \mathbf{1+3} \end{array}}$$

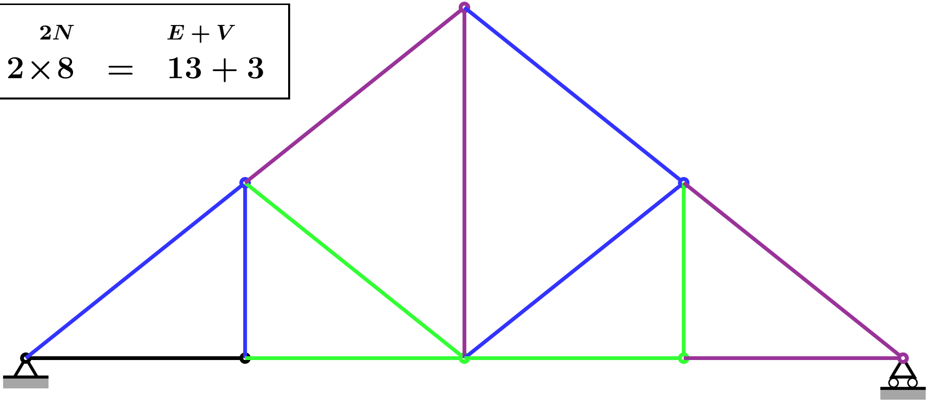
cerchas "simples"

Si ahora añadimos un nudo y dos barras, añadimos dos nuevas ecuaciones y dos nuevas incógnitas, y la nueva forma pertenece a la misma clase que la original (compatible determinada)

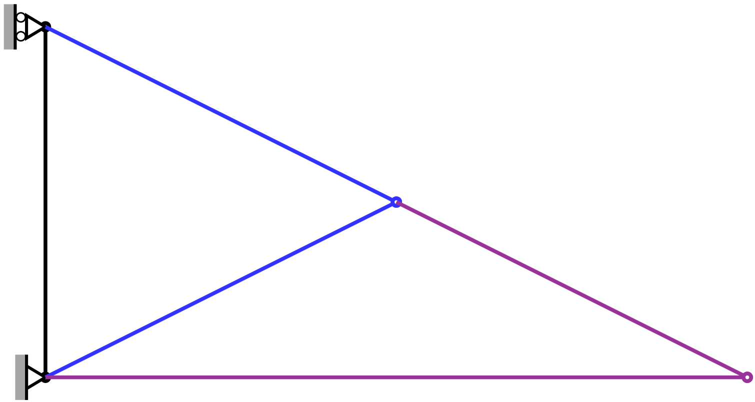
$$\overset{2N}{2\times 2} = \overset{E+V}{1+3}$$

cerchas “simples”

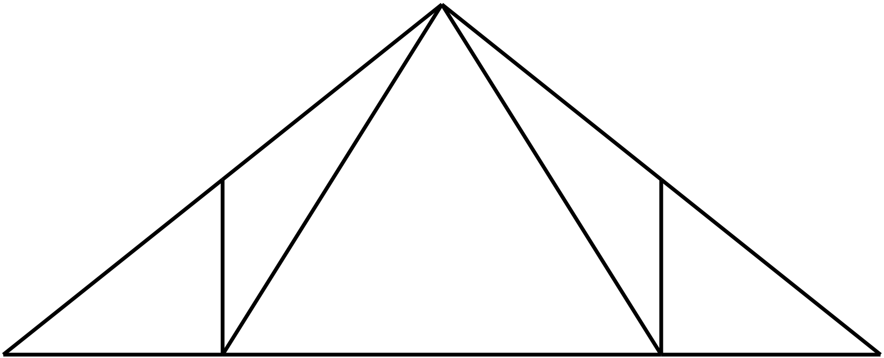
$$\overset{2N}{2\times 8} \quad = \quad \overset{E+V}{13+3}$$



cerchas ‘‘simples’’

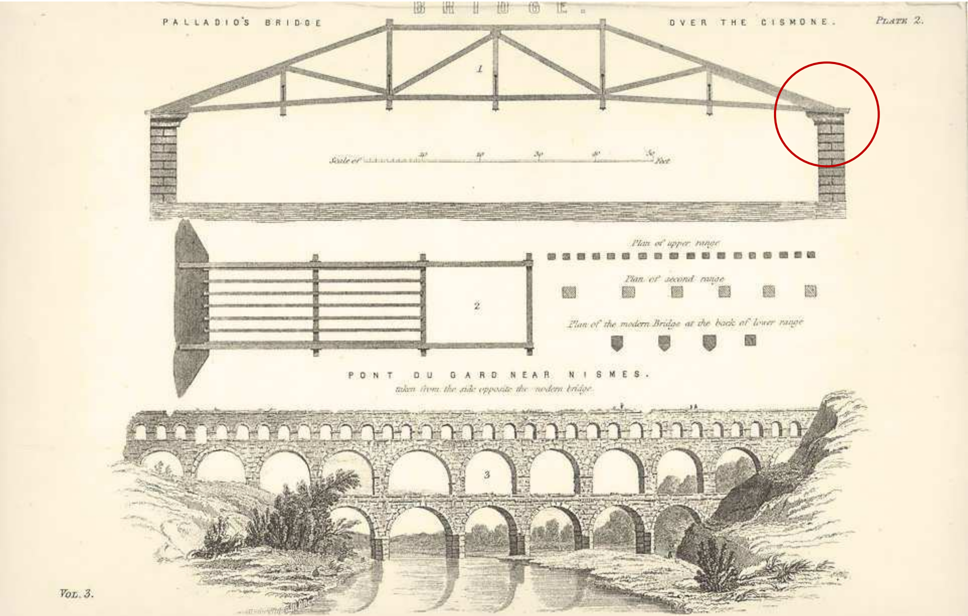


cerchas ‘‘simples’’



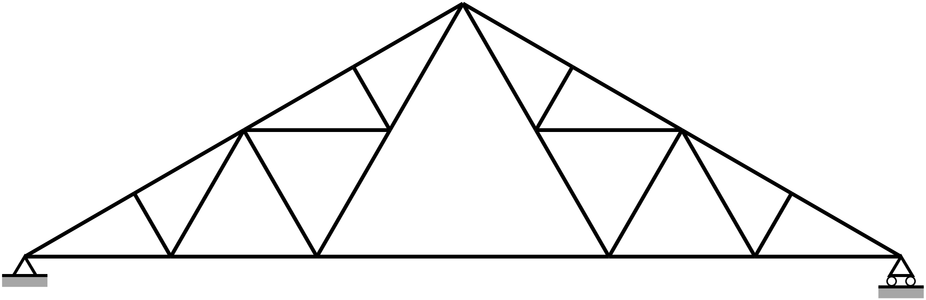
cerchas ‘‘simples’’

cerchas ‘‘simples’’



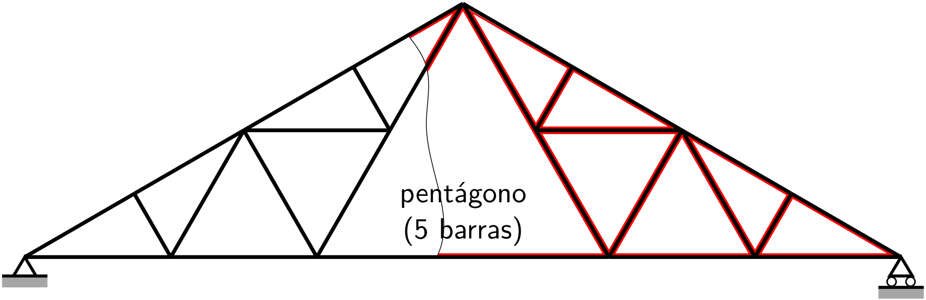
cerchas "compuestas"

$$\boxed{\overset{\boldsymbol{2N}}{\mathbf{2\times 15}} \quad = \quad \overset{\boldsymbol{E+V}}{\mathbf{27+3}}}$$



cerchas ‘‘compuestas’’

$$\boxed{\underset{\textstyle 2\times 15}{2N} \quad = \quad \underset{\textstyle 27+3}{E+V}}$$




Príncipe Pío
Príncipe Pío

cerchas “complejas”

1. Aquellas cerchas que ni pueden generarse como simples, ni pueden descomponerse se denominan “complejas”.

2. Una regla práctica para reconocerlas es que, en el plano, cualquier corte imaginable interesa a más de tres barras, de manera que aún siendo formas compatibles determinadas, no es posible obtener ningún esfuerzo sin obtener todos los demás. Es decir, las ecuaciones de equilibrio *sólo* pueden resolverse *simultáneamente*.

3. En el plano son raras, salvo cuando resultan de la superposición de dos o más cerchas.

4. Lo que es seguro es que no suelen ser buenos diseños...

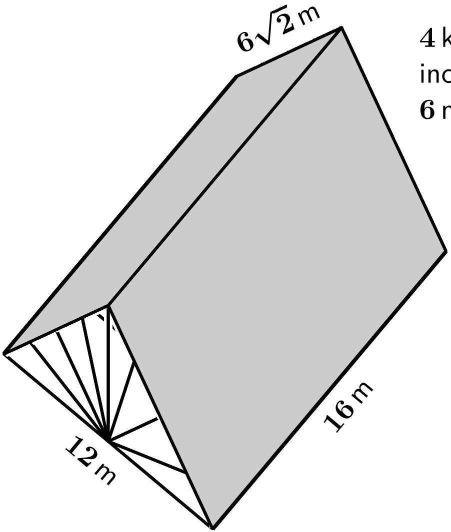
   [*Lo complejo no es siempre bello*]

Estructuras trianguladas “famosas”

Estructuras trianguladas “famosas”

Estructuras trianguladas “famosas”

Peso total: $\mathbf{1{,}09}$ MN

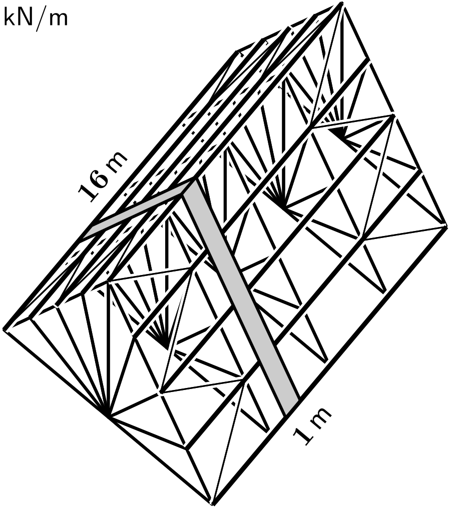


$\mathbf{4}$ kN/m$^{\mathbf{2}}$ de tejado inclinado $\mathbf{45^o}$
$\mathbf{6}$ m de altura

Cercha italiana atribuida a Palladio, que la empleo a menudo. Los dos ángulos rectos se dividen en cuatro partes iguales con las diagonales.

$\boxed{\text{Peso total: } \mathbf{1{,}09}\,\text{MN}}$

Peso total lineal: $\mathbf{67{,}9}\,\text{kN/m}$

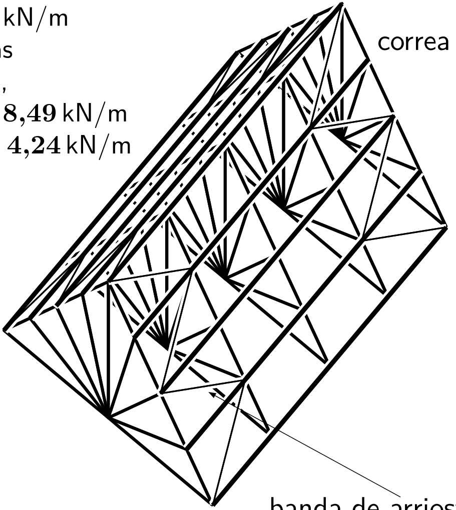


Peso total: $\mathbf{1{,}09}$ MN

Peso total lineal: $\mathbf{67{,}9}$ kN/m

⋆ Repartido en 7 correas interiores y 2 extremas,

- sobre correa interna: $\mathbf{8{,}49}$ kN/m
- sobre correa externa: $\mathbf{4{,}24}$ kN/m



$\boxed{\text{Peso total: } \mathbf{1{,}09}\,\text{MN}}$

Peso total lineal: $\mathbf{67{,}9}\,\text{kN/m}$

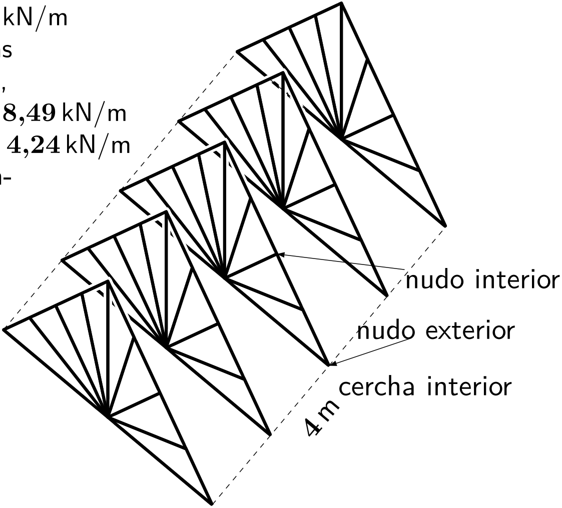
⋆ Repartido en 7 correas interiores y 2 extremas,

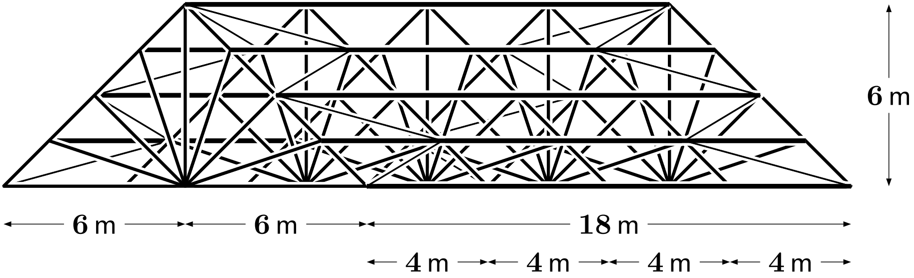
- sobre correa interna: $\mathbf{8{,}49}\,\text{kN/m}$
- sobre correa externa: $\mathbf{4{,}24}\,\text{kN/m}$

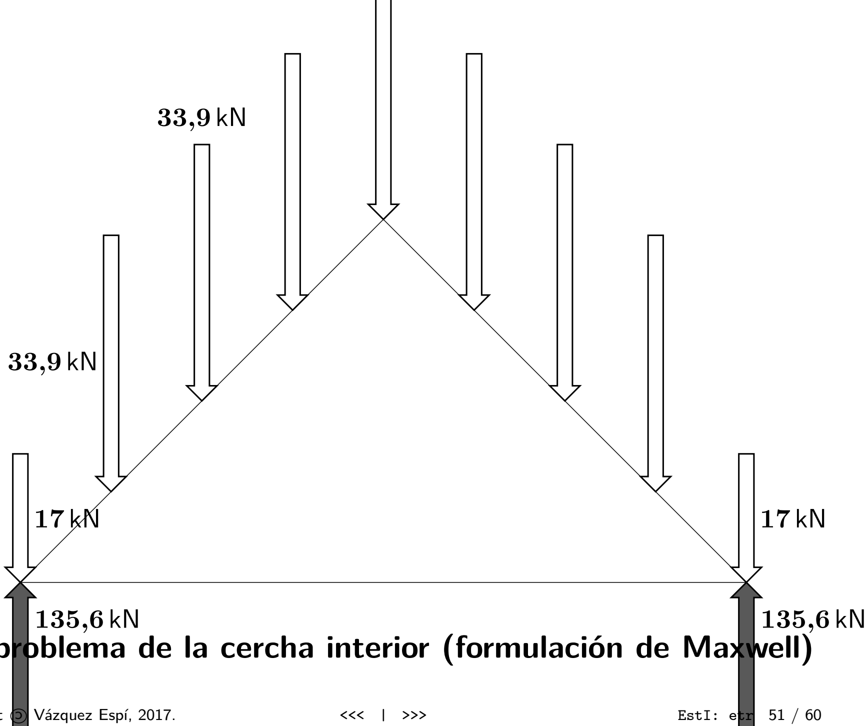
⋆ Pesos en la cercha interior:

nudo interior: $\mathbf{33{,}9}\,\text{kN}$

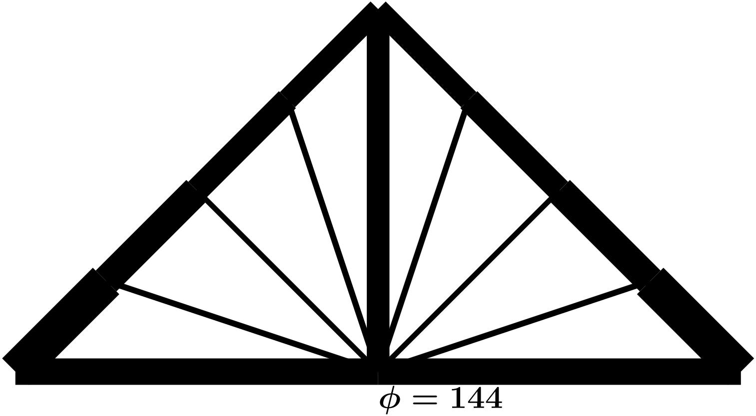
nudo exterior: $\mathbf{17{,}0}\,\text{kN}$



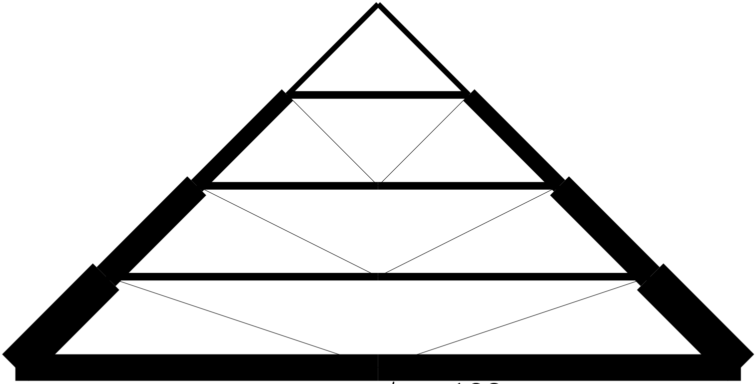

6 m
6 m
6 m
18 m
4 m
4 m
4 m
4 m



El problema de la cercha interior (formulación de Maxwell)

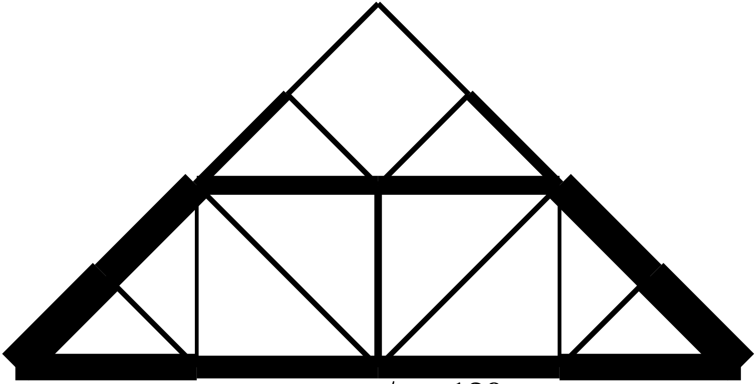


Palladian truss (forma simple)

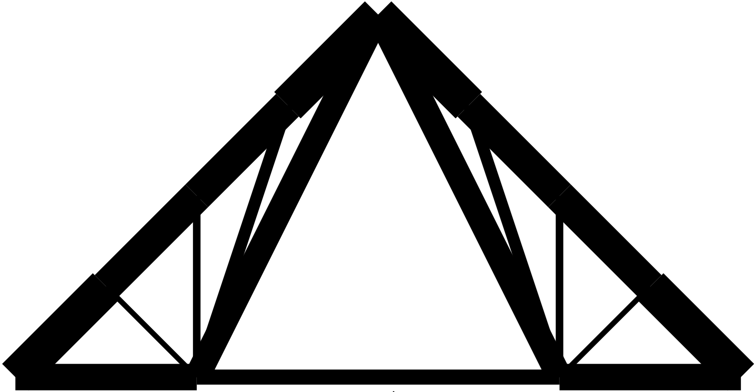


$\phi = 108$

Arcos superpuestos (forma compuesta)

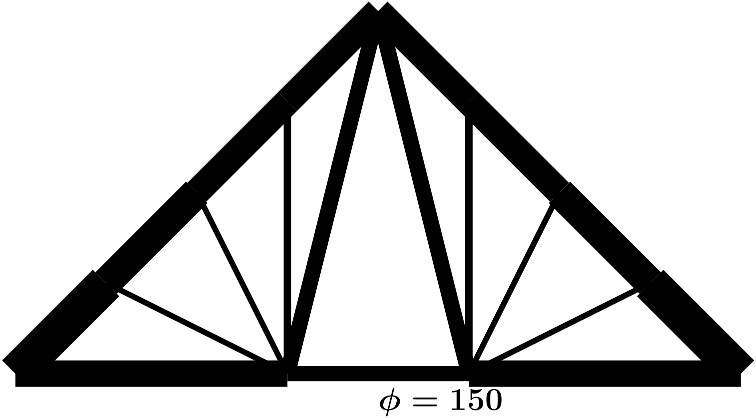


Dos cerchas simples superpuestas (forma compuesta)

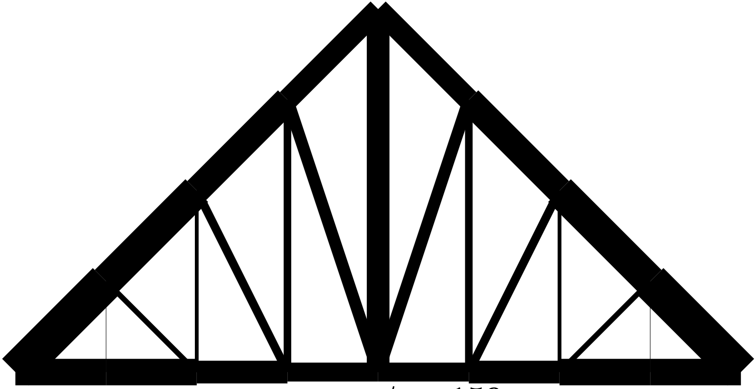


$\phi = 180$

Dos palladianas compuestas con tirante (f. compuesta)

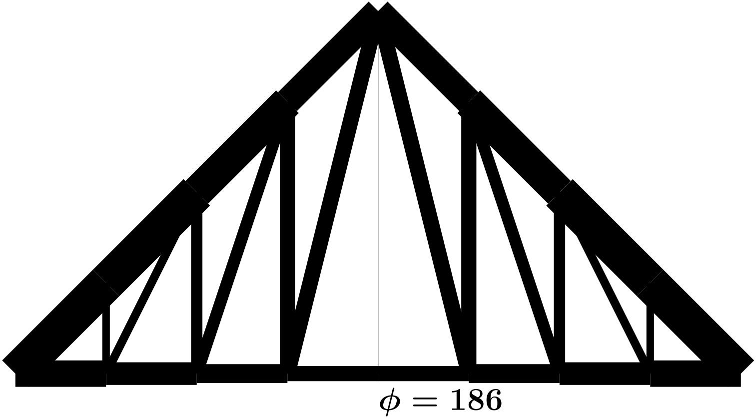


Lo mismo pero mejor (forma compuesta)

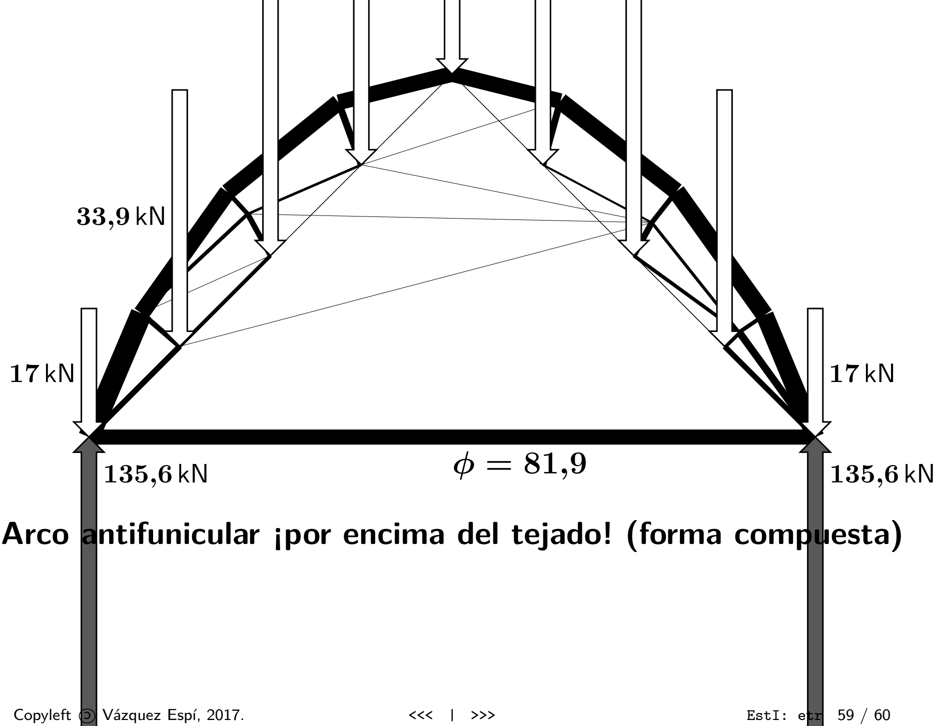


$\phi = 159$

Clásica celosia de montantes y diagonales (forma simple)



Clásica celosia de montantes y codales (forma simple)



Arco antifunicular ¡por encima del tejado! (forma compuesta)

Estructuras I

Estructuras trianguladas: Resistencia

Mariano Vázquez Espí

GIAU+S (UPM)
Grupo de Investigacion en Arquitectura, Urbanismo y Sostenibilidad
Universidad Politécnica de Madrid
`http://habitat.aq.upm.es/gi`

Edicion del 2 de marzo de 2017
compuesto con *free software*:
GNULinux/LaTeX/dvips/ps2pdf