Estructuras I

Estructuras trianguladas: Rigidez

Mariano Vázquez Espí

Madrid, 30 de marzo de 2017.

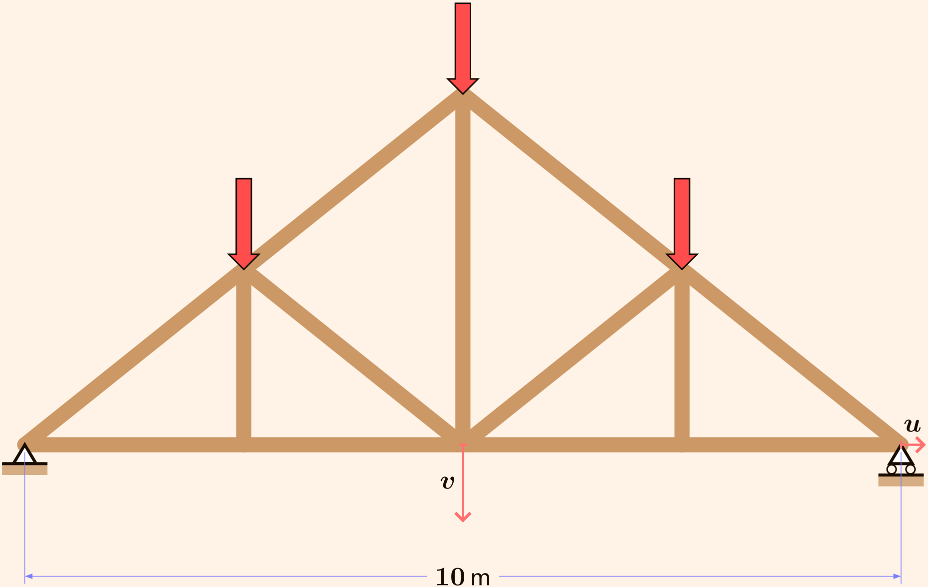
El requisito de rigidez

Una estructura es suficientemente rígida si sus movimientos bajo la carga de servicio son menores que valores considerados como **tolerables** según el uso a que se destina.

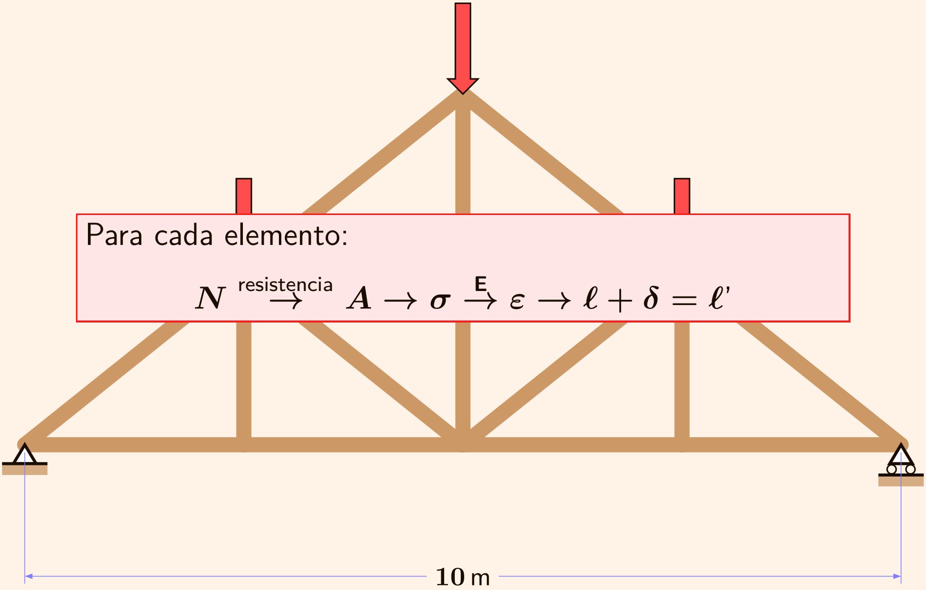
Hay dos tipos de movimientos a controlar:

- giros que produzcan **distorsión** de la geometría inicial: específicamente la **distorsión media** de la estructura
- **desplazamientos** que puedan comprometer el comportamiento de uniones con **otras estructuras** (aparatos de apoyo, etc)
- **siempre** hay que comprobar que la deformación es pequeña si los esfuerzos se calcularon con esa hipótesis

Un cuchillo español



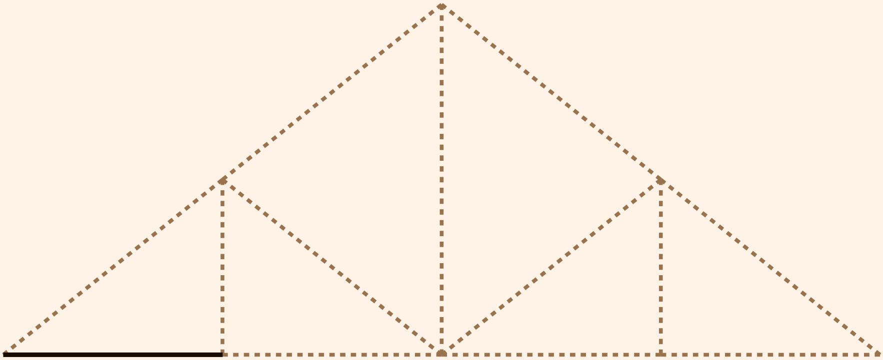
Un cuchillo español

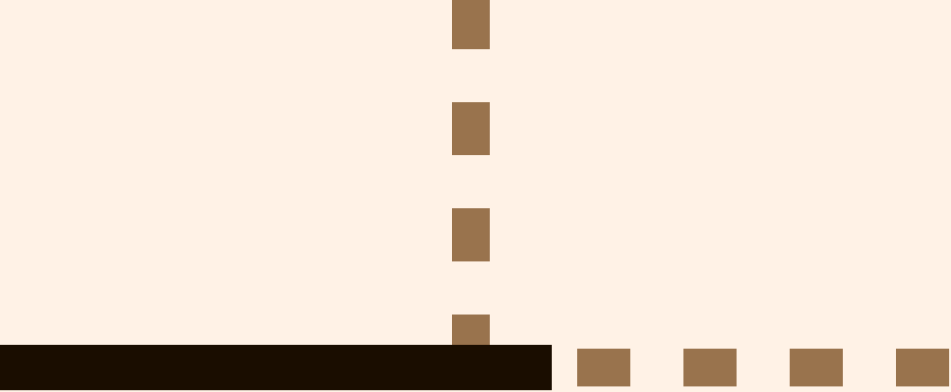


Para cada elemento:

$$\boldsymbol{N} \xrightarrow{\text{resistencia}} \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} \xrightarrow{\mathsf{E}} \boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\ell}'$$

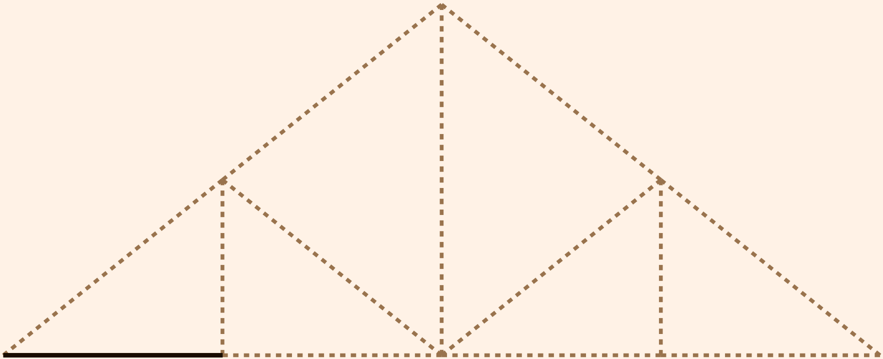
Un cuchillo español



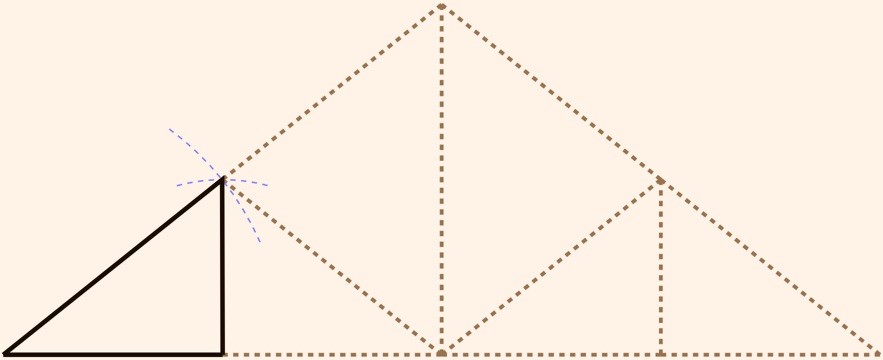


zoom 250X

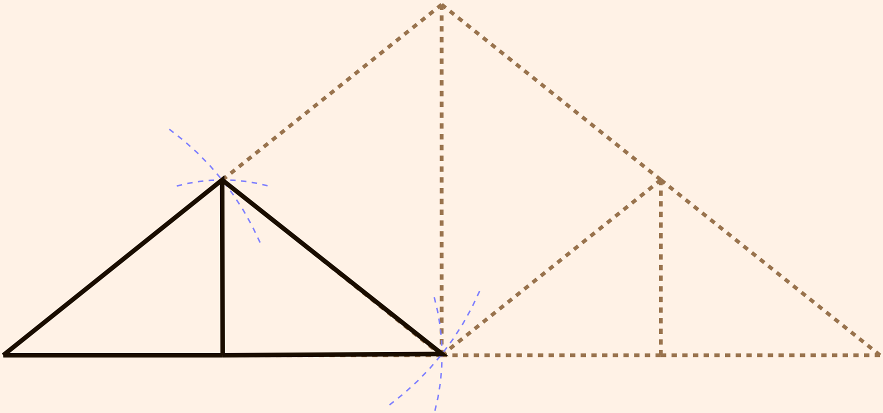
Un cuchillo español



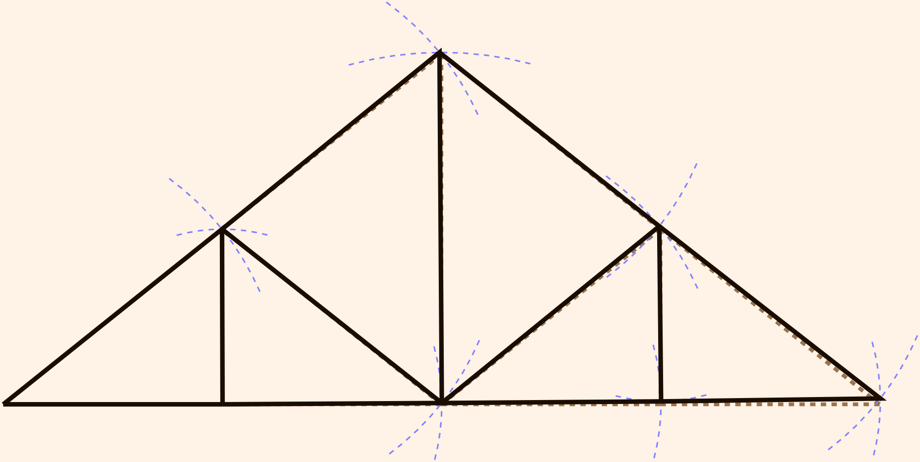
Un cuchillo español

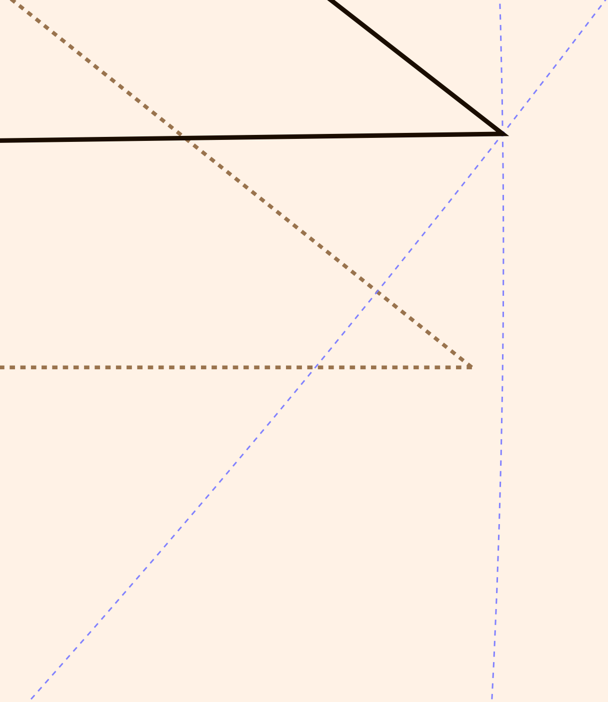


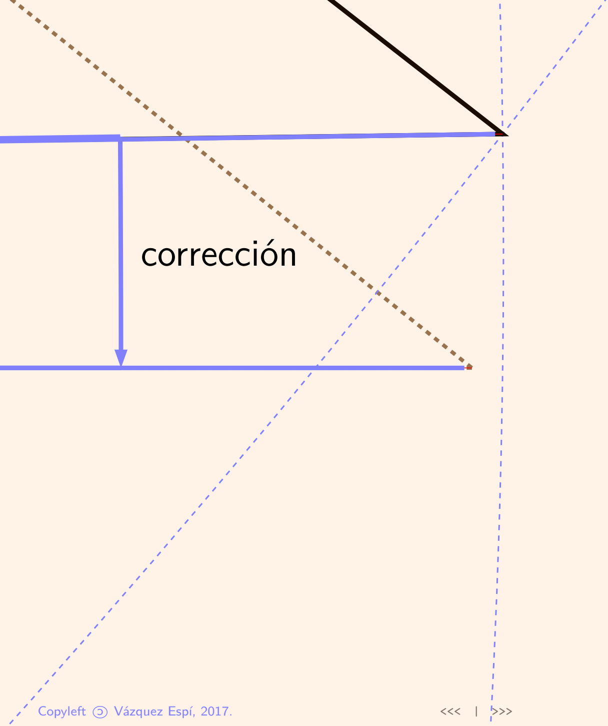
Un cuchillo español



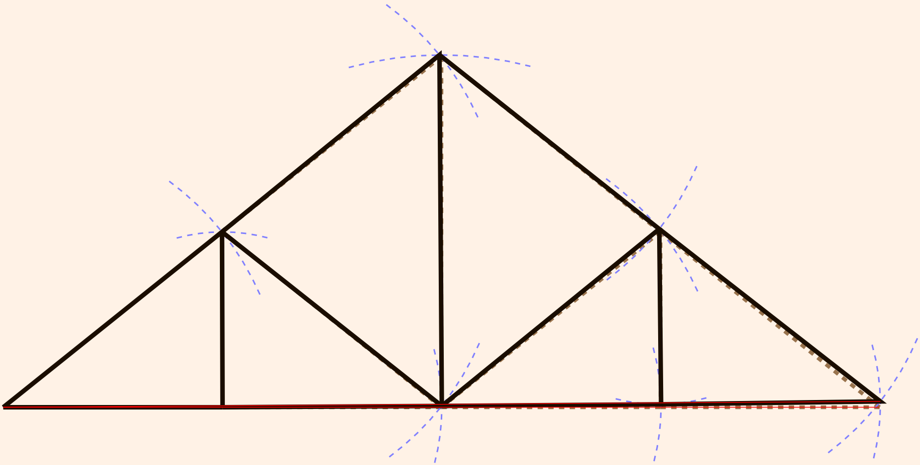
Un cuchillo español



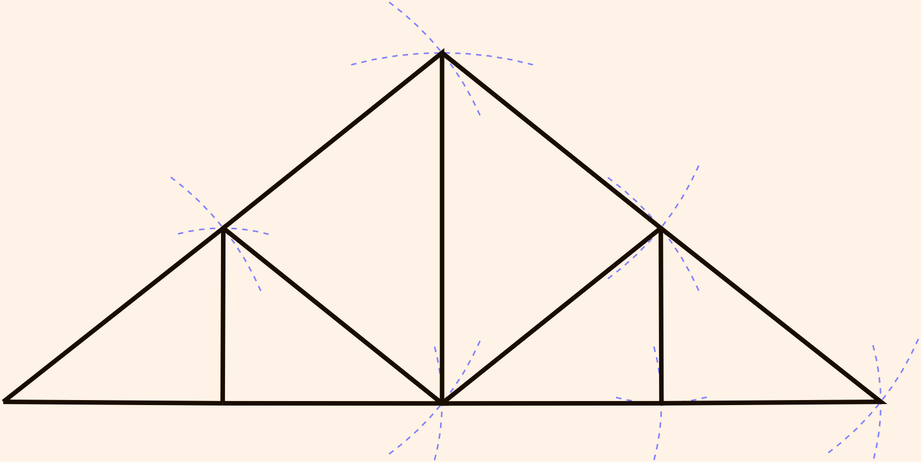


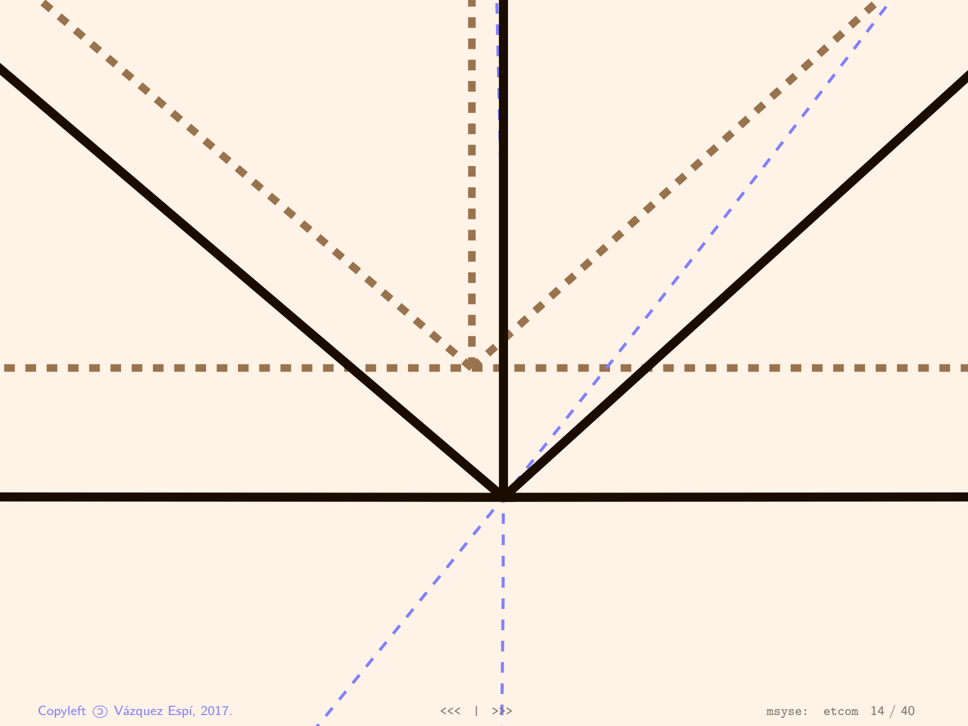

corrección

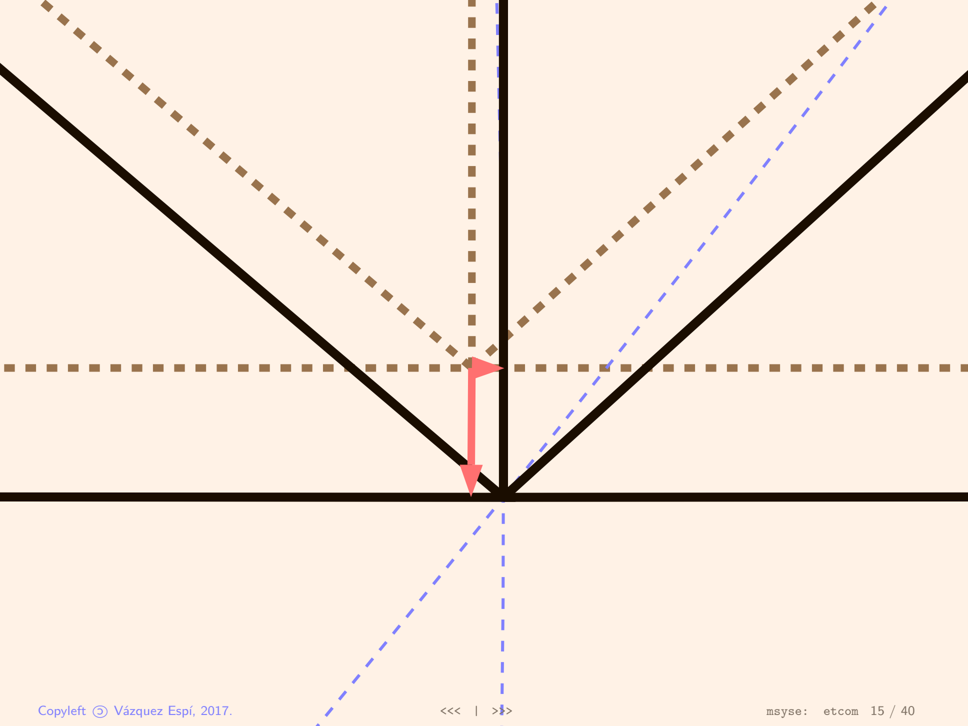
Un cuchillo español



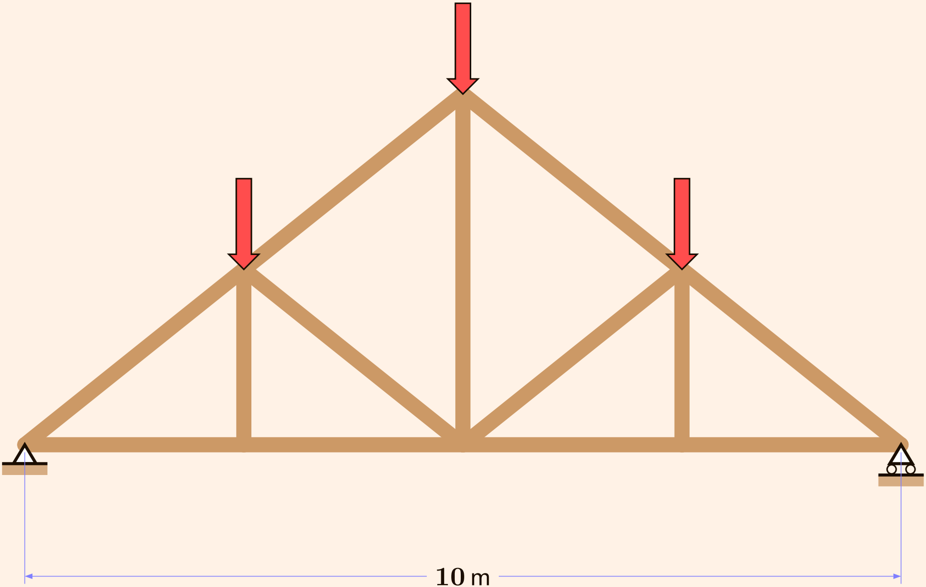
Un cuchillo español





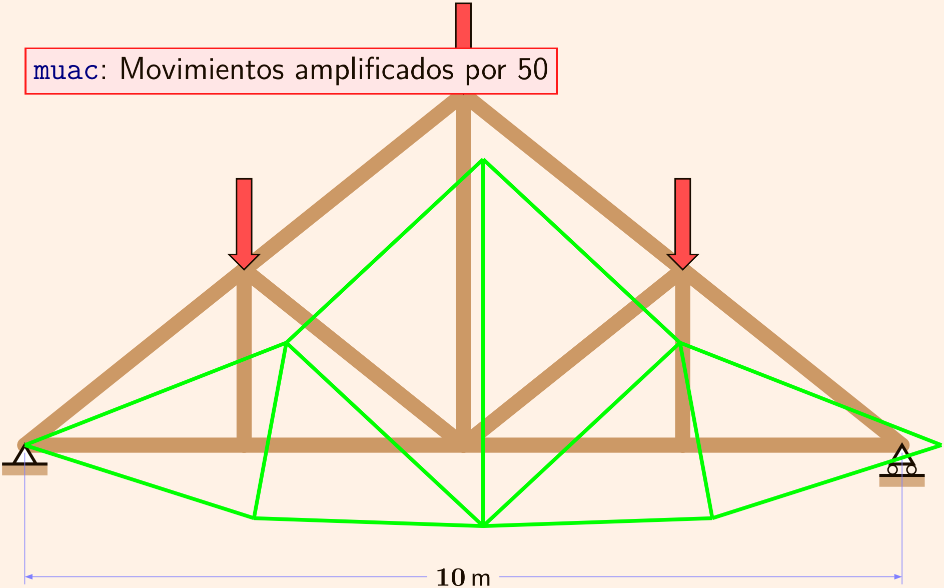


Un cuchillo español



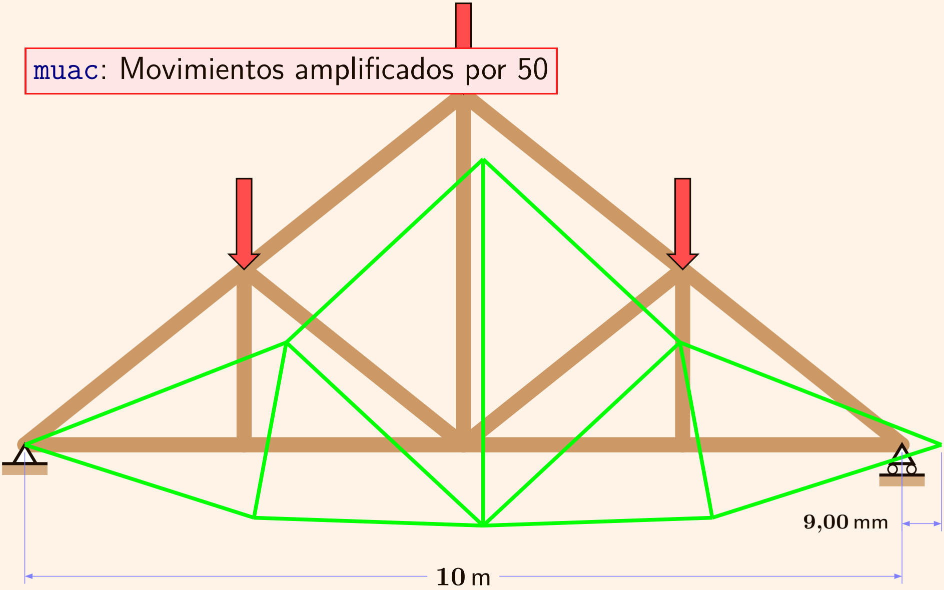
Un cuchillo español

`muac`: Movimientos amplificados por 50



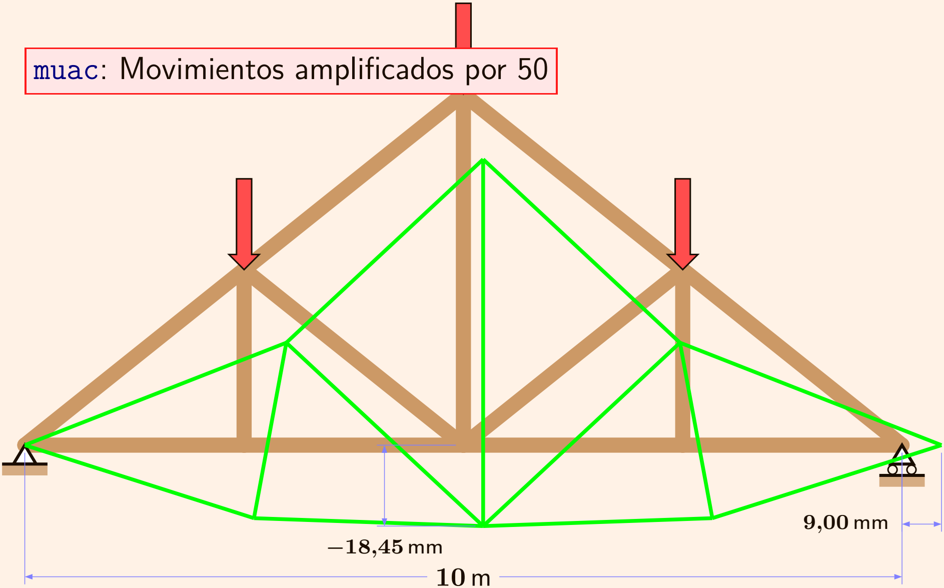
Un cuchillo español

`muac`: Movimientos amplificados por 50



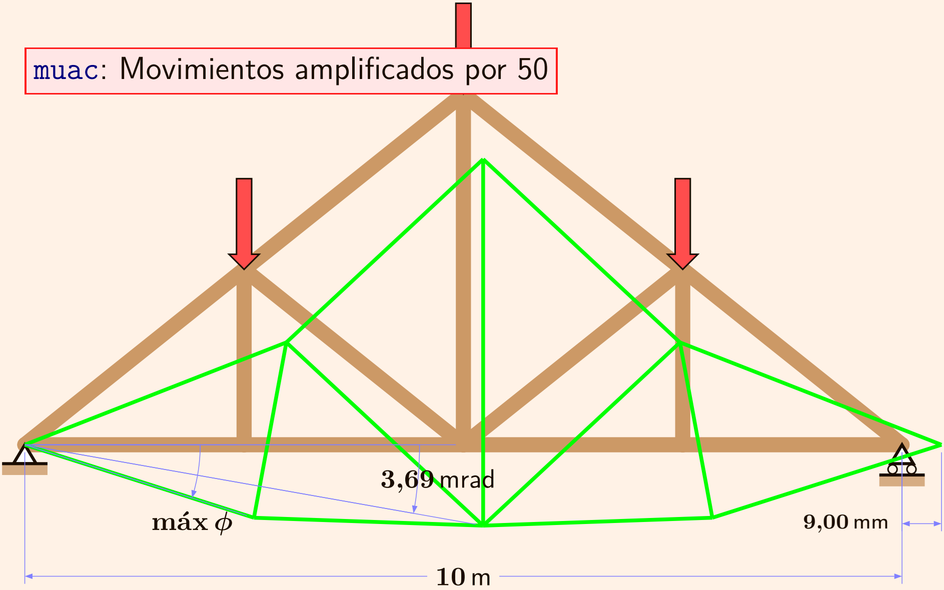
Un cuchillo español

`muac`: Movimientos amplificados por 50



Un cuchillo español

`muac`: Movimientos amplificados por 50



equilibrio/compatibilidad

$$\left.\begin{aligned}\sum_e N_e \cos(\alpha_e) &= H_i \\ \sum_e N_e \sin(\alpha_e) &= V_i\end{aligned}\right\} \quad 2N - V \text{ ecuaciones} \quad \left\{\begin{array}{l}\text{si } E = 2N - V\text{:} \\ N_e = \dfrac{1}{\mathsf{z_e}} \displaystyle\sum_i a_i \mathsf{z}_i\end{array}\right.$$

equilibrio/compatibilidad

$$\left.\begin{aligned}\sum_e N_e\cos(\alpha_e) &= H_i\\ \sum_e N_e\sin(\alpha_e) &= V_i\end{aligned}\right\}\quad 2N-V \text{ ecuaciones}\quad \left\{\begin{aligned}&\text{si } E = 2N-V:\\ &N_e = \frac{1}{\mathsf{z_e}}\sum_i a_i\mathsf{z}_i\end{aligned}\right.$$

$$\overset{E\times(2N-V)}{[H]}\cdot\overset{E\times 1}{[N]} = \overset{(2N-V)\times 1}{[a]}$$

equilibrio/compatibilidad

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_e N_e\cos(\alpha_e) = H_i \\[2em] \displaystyle\sum_e N_e\sin(\alpha_e) = V_i\end{array}\right\}\quad 2N-V \text{ ecuaciones}\qquad \left\{\begin{array}{l}\text{si } E = 2N-V\text{:}\\ \displaystyle N_e = \frac{1}{\mathsf{z_e}}\sum_i a_i \mathsf{z}_i\end{array}\right.$$

$$\overset{E\times(2N-V)}{[H]}\cdot\overset{E\times 1}{[N]} = \overset{(2N-V)\times 1}{[a]}$$

Si $E = 2N-V$, la matriz H es cuadrada, y si el equilibrio es posible existe H^{-1} :

$$\boxed{\overset{E\times 1}{[N]} = \overset{E\times E}{[H^{-1}]}\cdot\overset{E\times 1}{[a]}\qquad \overset{E\times 1}{[\delta]} = \overset{E\times E}{[B]}\cdot\overset{E\times 1}{[g]} = \overset{E\times E}{[H^{\mathrm{T}}]}\cdot\overset{E\times 1}{[g]}}$$

$$\overset{E\times 1}{[g]} = \overset{E\times E}{[H^{\mathrm{T}^{-1}}]}\cdot\overset{E\times 1}{[\delta]}$$

Si sólo se necesita calcular un GDL, g_i por ejemplo, bastaría con conocer o calcular la fila i de la matriz.

equilibrio/compatibilidad

$$\boxed{\overset{E\times 1}{[\boldsymbol{N}]} = \overset{E\times E}{[\boldsymbol{H}^{-1}]} \cdot \overset{E\times 1}{[\boldsymbol{a}]} \qquad \overset{E\times 1}{[\boldsymbol{\delta}]} = \overset{E\times E}{[\boldsymbol{B}]} \cdot \overset{E\times 1}{[\boldsymbol{g}]} = \overset{E\times E}{[\boldsymbol{H}^{\mathbf{T}}]} \cdot \overset{E\times 1}{[\boldsymbol{g}]}}$$

Trabajos virtuales (o como determinar la fila i...):

Si la estructura está en equilibrio bajo las acciones $\boldsymbol{a}$ con los esfuerzos $\boldsymbol{N}$, debe ocurrir que para cualquier movimiento *pequeño* dado por $\boldsymbol{g}^{\star}$,$\boldsymbol{\delta}^{\star}$:

$$\boldsymbol{g}^{\star\mathbf{T}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\delta}^{\star\mathbf{T}}\boldsymbol{N}$$

La deformación definida por $\boldsymbol{g}^{\star}$,$\boldsymbol{\delta}^{\star}$ es **virtual**, ¡no tiene por que ser la real experimentada bajo las fuerzas definidas por $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{N}$!

equilibrio/compatibilidad

$$\boxed{\overset{E\times 1}{[N]} = \overset{E\times E}{[H^{-1}]} \cdot \overset{E\times 1}{[a]} \qquad \overset{E\times 1}{[\delta]} = \overset{E\times E}{[B]} \cdot \overset{E\times 1}{[g]} = \overset{E\times E}{[H^{\mathrm{T}}]} \cdot \overset{E\times 1}{[g]}}$$

Trabajos virtuales (o como determinar la fila i...):

$$g^{\star\mathrm{T}} a = \delta^{\star\mathrm{T}} N$$

Para la misma estructura sometida a otras fuerzas exteriores e interiores $a^\star, N^\star$ (virtuales, no las reales, **pero también en equilibrio**):

$$g^{\mathrm{T}} a^\star = \delta^{\mathrm{T}} N^\star$$

Ahora g, δ definen la deformación real bajo las fuerzas a, N. ¡Lo que es **virtual** ahora son las fuerzas en equilibrio $a^\star, N^\star$!

equilibrio/compatibilidad

$$\boxed{\overset{E\times 1}{[\boldsymbol{N}]} = \overset{E\times E}{[\boldsymbol{H}^{-1}]} \cdot \overset{E\times 1}{[\boldsymbol{a}]} \qquad \overset{E\times 1}{[\boldsymbol{\delta}]} = \overset{E\times E}{[\boldsymbol{B}]} \cdot \overset{E\times 1}{[\boldsymbol{g}]} = \overset{E\times E}{[\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}]} \cdot \overset{E\times 1}{[\boldsymbol{g}]}}$$

Trabajos virtuales (o como determinar la fila i...):

$$\boldsymbol{g}^{\star\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\delta}^{\star\mathrm{T}}\boldsymbol{N}$$

$$\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^{\star} = \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{\star}$$

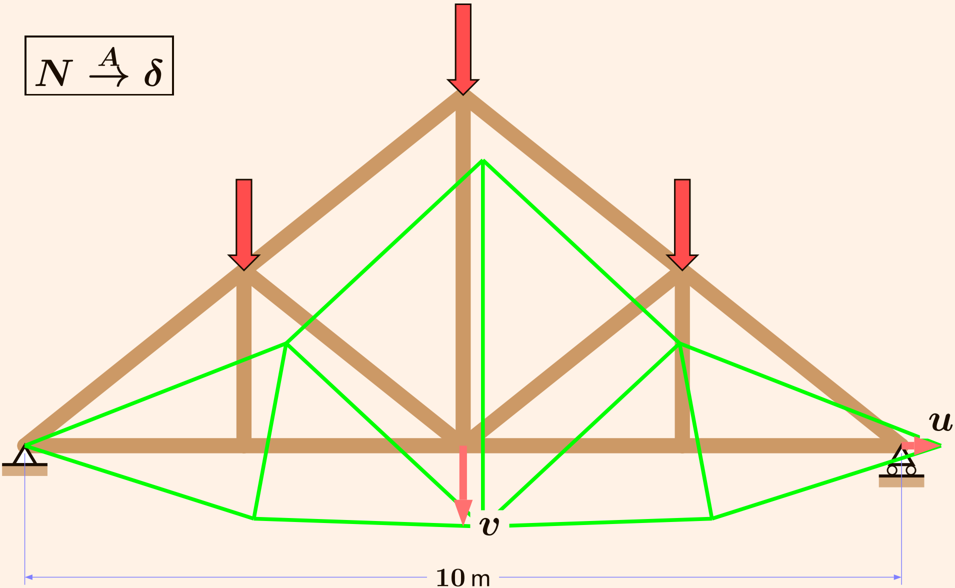
Si elegimos $\boldsymbol{a}^{\star}$ de modo que sólo exista una acción unidad en la dirección del movimiento $\boldsymbol{g_i}$:

$$\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^{\star} = \boldsymbol{g}_i \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{g}_i \cdot 1 = \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{\star}}$$

Truco que nos permite calcular un único movimiento real $\boldsymbol{g_i}$ mediante el cálculo de los esfuerzos *virtuales* $\boldsymbol{N}^{\star}$ de la misma estructura pero con sólo una carga *virtual* unidad en $\boldsymbol{i}$, paralela a $\boldsymbol{g_i}$. (En jerga el truco se denomina ''cálculo de movimientos por trabajos virtuales''.)

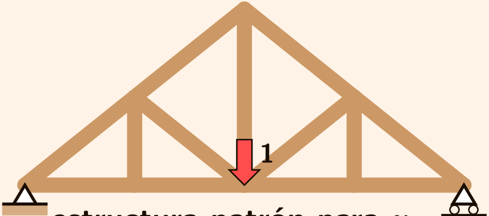
Un cuchillo español por trabajos virtuales

$$\boxed{N \xrightarrow{A} \delta}$$



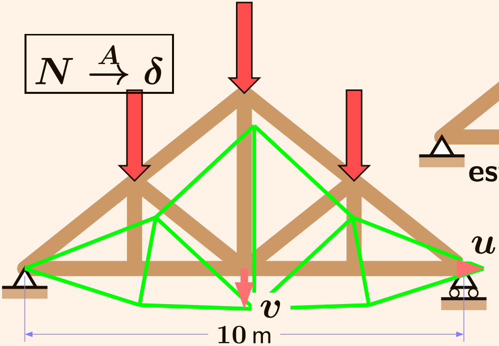
Un cuchillo español por trabajos virtuales

$$\boxed{N^{\star} \Rightarrow v = \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}} N^{\star}}$$



estructura patrón para v

$$\boxed{N \xrightarrow{A} \delta}$$



estructura real con N y δ

$$\boxed{N^{\star\star} \Rightarrow u = \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}} N^{\star\star}}$$

estructura patrón para u

Cálculo de movimientos: conclusión

En resumen, disponemos de tres métodos prácticos:

- Método gráfico mediante programas de dibujo (todos los movimientos)
- Método universal mediante programas de ordenador (todos los movimientos)
- Trabajos virtuales: para cada movimiento hay que resolver un caso 'patrón' de carga

(Existe un método gráfico del XIX, apropiado para usarlo con lápiz y reglas: el diagrama de WILLIOT, hoy totalmente en desuso. . .)

> El requisito de rigidez se comprueba comparando los movimientos calculados con aquellos que sean tolerables según el uso de la estructura.

Cálculo de movimientos: diseño

El método de los trabajos virtuales es útil para el diseño preliminar de estructuras por varias razones.

- Permite centrarse exclusivamente en la comprobación de los desplazamientos de "interés", mediante expresiones del tipo

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N}^{\star} = \sum_{\boldsymbol{e}} \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{e}} \boldsymbol{N}^{\star}_{\boldsymbol{e}}$$

  con una estructura patrón para cada grado de libertad $\boldsymbol{g}$.

Cálculo de movimientos: diseño

El método de los trabajos virtuales es útil para el diseño preliminar de estructuras por varias razones.

- Permite cuantificar la contribución individual de cada pieza, $\boldsymbol{\delta}_e \boldsymbol{N}_e^\star$, al grado $\boldsymbol{g}$, y determinar su importancia, relativa al resto.

  Nótese que $\boldsymbol{\delta}_e \boldsymbol{N}_e^\star$ puede ser positivo o negativo segun que el esfuerzo real tenga el mismo signo que el virtual o el contrario:

  $$\boldsymbol{\delta}_e \boldsymbol{N}_e^\star = \frac{\boldsymbol{\ell}_e}{\mathsf{E}\boldsymbol{A}_e} \cdot \boldsymbol{N}_e \cdot \boldsymbol{N}_e^\star$$

  y puesto que el requisito de rigidez limita el valor absoluto de $\boldsymbol{g}$, las piezas críticas son aquellas cuya contribución tenga el mismo signo que $\boldsymbol{g}$.

Cálculo de movimientos: diseño

El método de los trabajos virtuales es útil para el diseño preliminar de estructuras por varias razones.

- Permite estimar una cota superior del movimiento con sólo conocer la forma estructural, el signo del esfuerzo real N_e en cada barra, y la máxima deformación segura ε_{f} del material a emplear (dimensionado estricto), eligiendo la carga virtual de forma que $v > 0$:

$$\delta_e \approx \operatorname{sgn}(N_e) \cdot \varepsilon_{\mathsf{f}} \cdot \ell_e$$

$$v \leq v_{\mathbf{max}} = \varepsilon_{\mathsf{f}} \sum_e \operatorname{sgn}(N_e) \cdot \ell_e \cdot N_e^\star$$

Una estructura insegura podría tener mayor desplazamiento que $v_{\mathbf{max}}$ pero no se trata de un diseño aceptable.

Cálculo de movimientos: diseño

El método de los trabajos virtuales es útil para el diseño preliminar de estructuras por varias razones.

- Permite establecer reglas de proporción para cumplir el requisito de rigidez. Partiendo de la cota anterior $v \leq v_{\mathbf{max}}$ si para una forma concreta resulta que $v_{\mathbf{max}} \leq v_{\mathbf{tol}}$, **cualquier dimensionado seguro será también rígido** y no hace falta en adelante comprobar el requisito de rigidez de esa forma.

  Además, dividiendo por el tamaño **L** del problema:

  $$\frac{v_{\mathbf{max}}}{\mathsf{L}} = \varepsilon_{\mathsf{f}} \sum_{e} \mathrm{sgn}(N_e) \cdot N_e^{\star} \cdot \frac{\ell_e}{\mathsf{L}}$$

  se ve que la flecha relativa al tamaño (proporcional a la distorsión) solo depende de la proporción del esquema estructural, pero no de la intensidad de la carga, lo que permite generalizar la conclusión anterior a formas de distintos tamaños.

Diseño por rigidez

Si para un diseño seguro resulta que $v > v_{\mathbf{tol}}$, hay que cambiarlo hasta que $v' \leq v_{\mathbf{tol}}$. La contribución de cada pieza al desplazamiento v vale:

$\boxed{\delta_e N_e^\star = \dfrac{N_e \cdot \ell_e}{\mathsf{E} \cdot A_e} \cdot N_e^\star}$ y se presentan dos situaciones extremas y opuestas:

- **Mantener la forma y aumentar la cantidad de material.**
- **Cambiar la forma y buscar una “mejor”.**

Diseño por rigidez

Si para un diseño seguro resulta que $v > v_{\mathbf{tol}}$, hay que cambiarlo hasta que $v' \leq v_{\mathbf{tol}}$. La contribución de cada pieza al desplazamiento v vale:

$\boxed{\delta_e N_e^\star = \frac{N_e \cdot \ell_e}{\mathsf{E} \cdot A_e} \cdot N_e^\star}$ y se presentan dos situaciones extremas y opuestas:

- **Mantener la forma y aumentar la cantidad de material.** El esquema es invariable y sólo podemos aumentar el área A_e de las barras, aumentándo el volumen de material ($\sum A\ell$). Aquí hay varias posibilidades:

Diseño por rigidez

Si para un diseño seguro resulta que $v > v_{\mathrm{tol}}$, hay que cambiarlo hasta que $v' \leq v_{\mathrm{tol}}$. La contribución de cada pieza al desplazamiento v vale:

$\boxed{\delta_e N_e^\star = \dfrac{N_e \cdot \ell_e}{\mathsf{E} \cdot A_e} \cdot N_e^\star}$ y se presentan dos situaciones extremas y opuestas:

- **Mantener la forma y aumentar la cantidad de material.** El esquema es invariable y sólo podemos aumentar el área A_e de las barras, aumentándo el volumen de material ($\sum A\ell$). Aquí hay varias posibilidades:
  - Una regla sencilla y rápida es aumentar el área de todas las barras en la misma proporción en que el desplazamiento supera al tolerable:

$$A_e' \geq A_e \frac{v}{v_{\mathrm{tol}}}$$

    y ahora $v' \leq v_{\mathrm{tol}}$, y el volumen crecerá en la misma proporción.

Diseño por rigidez

Si para un diseño seguro resulta que $v > v_{\mathbf{tol}}$, hay que cambiarlo hasta que $v' \leq v_{\mathbf{tol}}$. La contribución de cada pieza al desplazamiento v vale:

$\boxed{\delta_e N_e^\star = \frac{N_e \cdot \ell_e}{\mathsf{E} \cdot A_e} \cdot N_e^\star}$ y se presentan dos situaciones extremas y opuestas:

- **Mantener la forma y aumentar la cantidad de material.** El esquema es invariable y sólo podemos aumentar el área A_e de las barras, aumentándo el volumen de material ($\sum A\ell$). Aquí hay varias posibilidades:
  - Una regla algo mejor es aumentar solamente el área de las barras que contribuyen a aumentar v, dejando al resto igual. Si v_+ representa el desplazamiento producido por ese subconjunto de barras (nótese que $v_+ \geq v$), obtenemos:

$$A'_{e+} \geq A_{e+} \cdot \frac{v_+}{v_{\mathbf{tol}} + v_+ - v}$$

y el volumen de material crecerá menos que en el caso anterior.

Diseño por rigidez

Si para un diseño seguro resulta que $v > v_{\mathbf{tol}}$, hay que cambiarlo hasta que $v' \leq v_{\mathbf{tol}}$. La contribución de cada pieza al desplazamiento v vale:

$\boxed{\delta_e N_e^\star = \dfrac{N_e \cdot \ell_e}{\mathsf{E} \cdot A_e} \cdot N_e^\star}$ y se presentan dos situaciones extremas y opuestas:

- **Mantener la forma y aumentar la cantidad de material.** El esquema es invariable y sólo podemos aumentar el área A_e de las barras, aumentándo el volumen de material $(\sum A\ell)$. Aquí hay varias posibilidades:
    - En cualquier caso, si hay varias hipótesis de carga, hay que comprobar la rigidez en cada una de ellas, y cada pieza debe dimensionarse con el máximo grueso que resulte de los métodos anteriores.

Diseño por rigidez

Si para un diseño seguro resulta que $v > v_{\text{tol}}$, hay que cambiarlo hasta que $v' \leq v_{\text{tol}}$. La contribución de cada pieza al desplazamiento v vale:

$\boxed{\delta_e N_e^\star = \dfrac{N_e \cdot \ell_e}{\mathsf{E} \cdot A_e} \cdot N_e^\star}$ y se presentan dos situaciones extremas y opuestas:

- **Mantener la forma y aumentar la cantidad de material.** El esquema es invariable y sólo podemos aumentar el área A_e de las barras, aumentándo el volumen de material ($\sum A\ell$). Aquí hay varias posibilidades:
  - Puede haber diseños mejores que los obtenidos con las reglas anteriores, es decir, que requieren menor aumento de volumen, pero su determinación es un difícil problema de optimación…

Diseño por rigidez

Si para un diseño seguro resulta que $v > v_{\mathbf{tol}}$, hay que cambiarlo hasta que $v' \leq v_{\mathbf{tol}}$. La contribución de cada pieza al desplazamiento v vale:

$\boxed{\delta_e N_e^\star = \dfrac{N_e \cdot \ell_e}{\mathsf{E} \cdot A_e} \cdot N_e^\star}$ y se presentan dos situaciones extremas y opuestas:

- **Mantener la forma y aumentar la cantidad de material.**
- **Cambiar la forma y buscar una "mejor".**
  Podemos variar el esquema y por tanto esfuerzos, longitudes y áreas, manteniendo la intensidad y posición de las fuerzas exteriores (acciones y reacciones). El problema matemático asociado es difícil, pero puede darse una guía: si un nuevo esquema requiere menos volumen para ser seguro también será más rigido (tendrá menos deformación y desplazamiento). Por tanto, al revés que en el caso anterior, disminuyendo el volumen de material empleado, también disminuye la deformación.

Estructuras I

Estructuras trianguladas: Rigidez

Mariano Vázquez Espí

GIAU+S (UPM)
Grupo de Investigacion en Arquitectura, Urbanismo y Sostenibilidad
Universidad Politécnica de Madrid
http://habitat.aq.upm.es/gi

Edicion del 30 de marzo de 2017
compuesto con *free software*:
GNULinux/LaTeX/dvips/ps2pdf