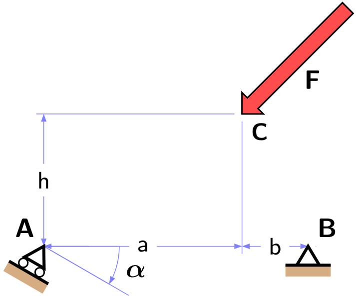
Diagramas de esfuerzos

(Funiculares como diagramas)

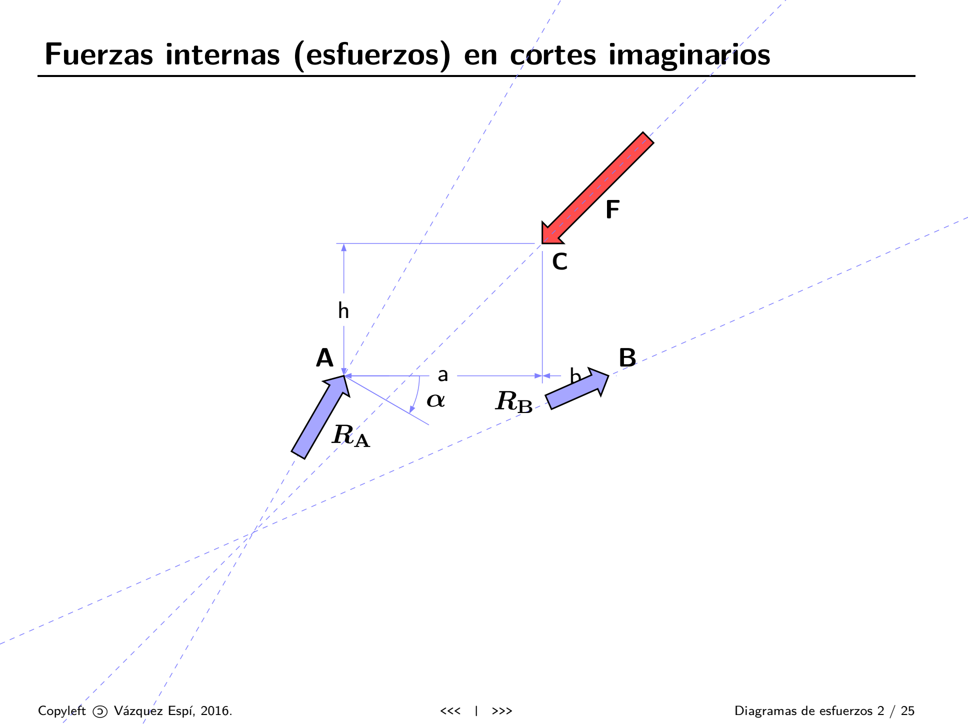
Mariano Vázquez Espí

Ondara/Madrid, 31 de marzo de 2016.

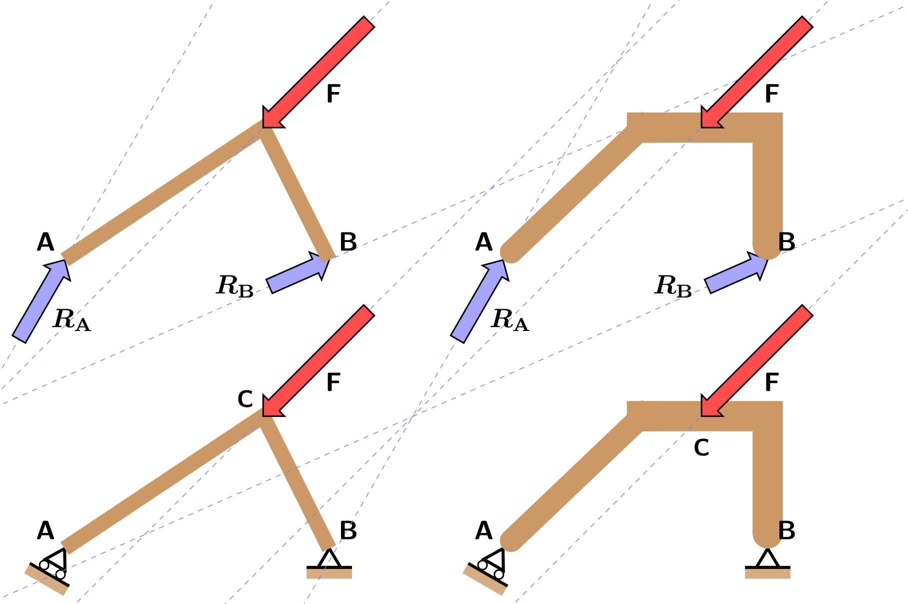
Fuerzas internas (esfuerzos) en cortes imaginarios



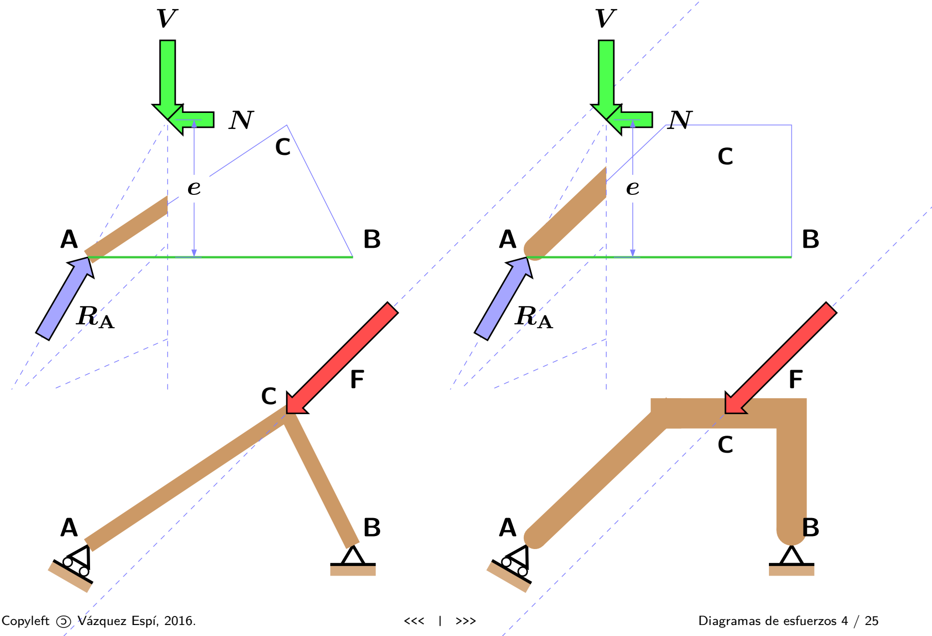
Fuerzas internas (esfuerzos) en cortes imaginarios



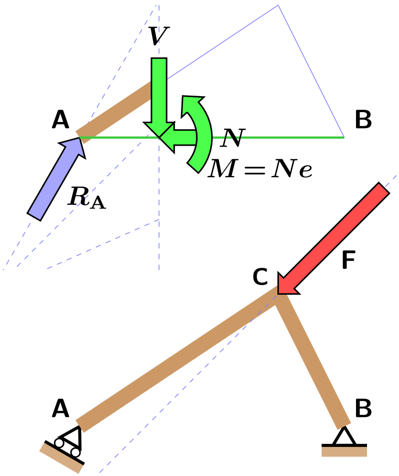
Fuerzas internas (esfuerzos) en cortes imaginarios

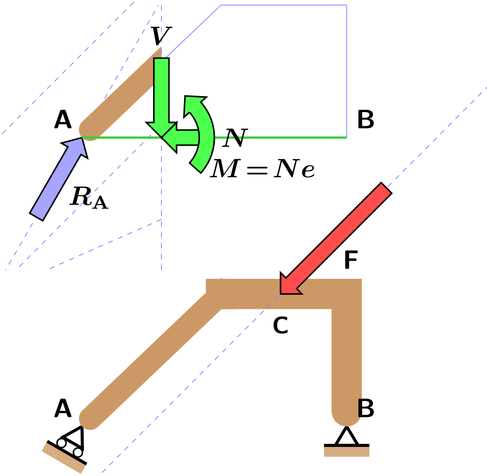


Fuerzas internas (esfuerzos) en cortes imaginarios

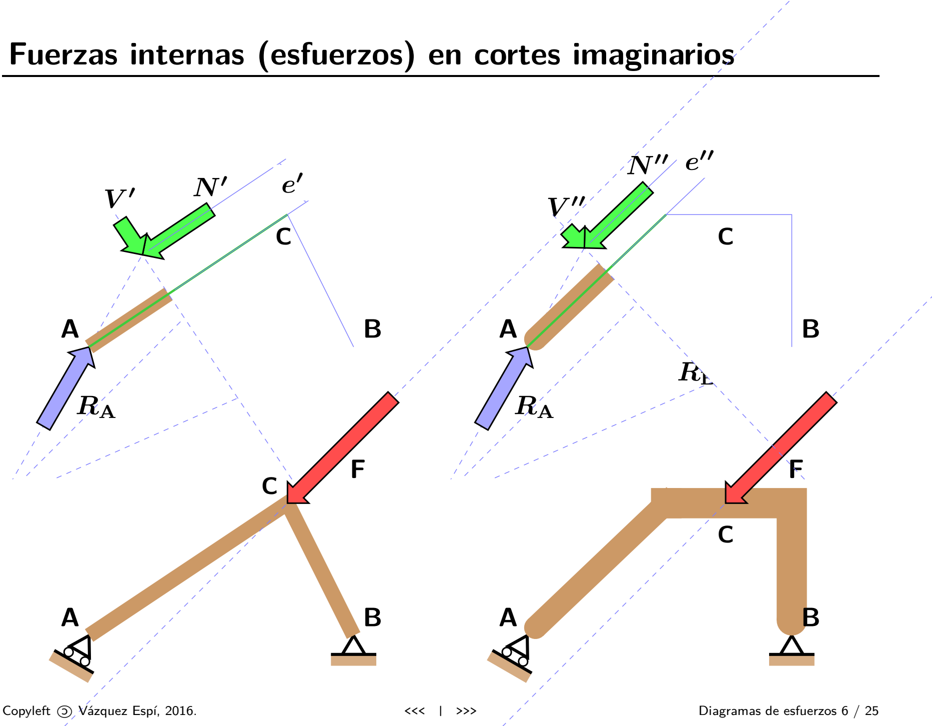


Fuerzas internas (esfuerzos) en cortes imaginarios

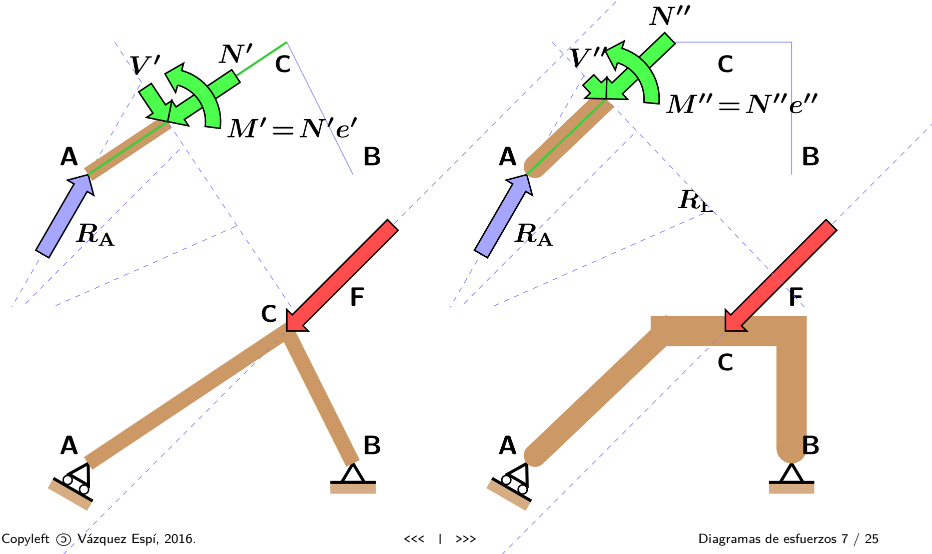




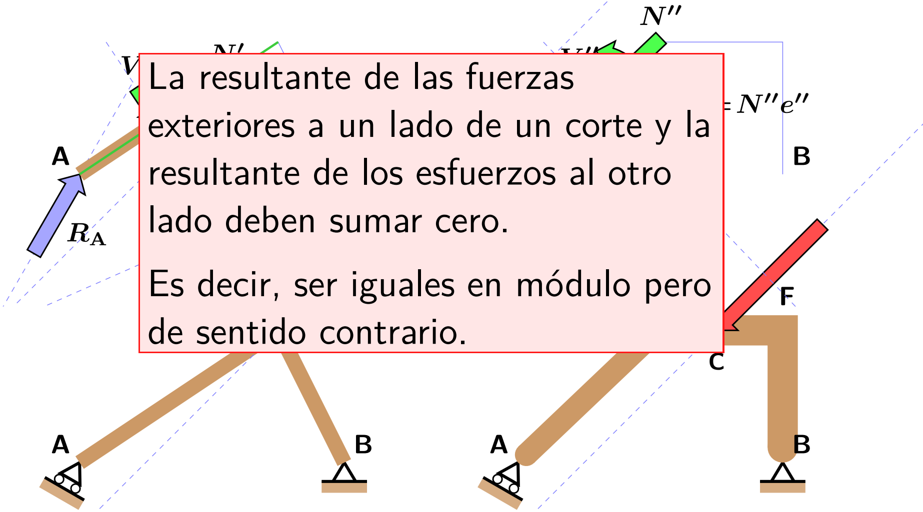
Fuerzas internas (esfuerzos) en cortes imaginarios



Fuerzas internas (esfuerzos) en cortes imaginarios



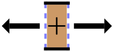
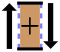
Fuerzas internas (esfuerzos) en cortes imaginarios



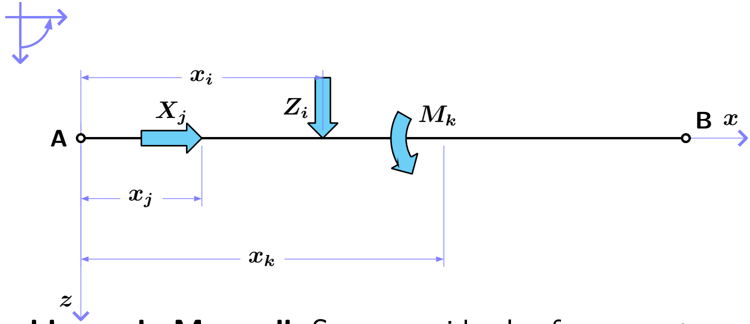
La resultante de las fuerzas exteriores a un lado de un corte y la resultante de los esfuerzos al otro lado deben sumar cero.

Es decir, ser iguales en módulo pero de sentido contrario.

Solicitaciones y esfuerzos

	Esfuerzos		
Solicitación	Longitudinal Normal Axil	Transversal Cortante	Par Flector Momento flector
Tracción simple	$\boldsymbol{N}$	—	—
Flexión simple	—	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{M}$
Flexión compuesta Tracción compuesta Compresión compuesta	$\boldsymbol{N}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{M}$
Compresión simple	$\boldsymbol{N}$	—	$\boldsymbol{M}$
Cizalladura	—	$\boldsymbol{V}$	—
Flexión pura	—	—	$\boldsymbol{M}$
	$\boldsymbol{\sigma}$ constante	$\boldsymbol{\tau}$	$\boldsymbol{\sigma}$ variable
			

Formulación analítica

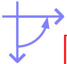


Problema de Maxwell: Son conocidas las fuerzas externas (acciones y reacciones) y **están en equilibrio**, es decir, que considerando todas ellas entre **A** y **B**:

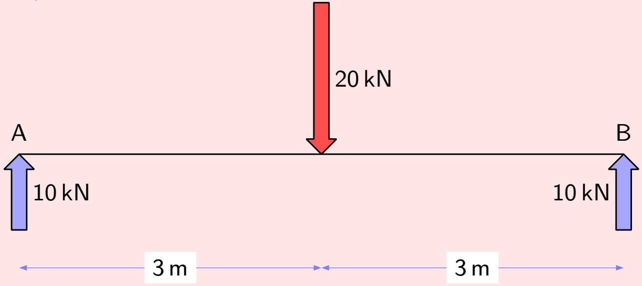
$$\sum X_j = 0 \qquad \sum Z_i = 0$$

$$\sum M_k - \sum Z_i \cdot x_i = 0$$

Formulación analítica



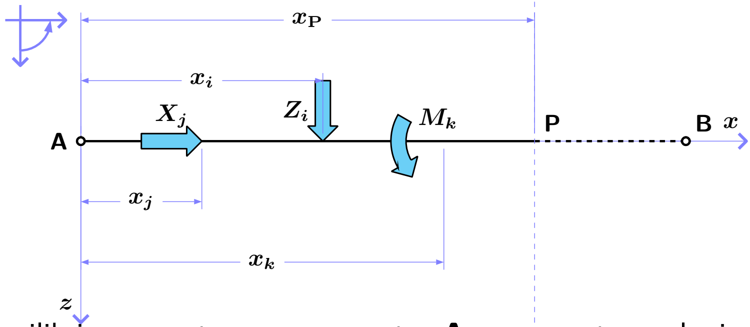
Ejemplo:



$$\sum \boldsymbol{X_j} : \mathbf{0} = \mathbf{0} \qquad \sum \boldsymbol{Z_i} : \mathbf{20}\,\mathrm{kN} - \mathbf{10}\,\mathrm{kN} - \mathbf{10}\,\mathrm{kN} = \mathbf{0}$$

$$\sum \boldsymbol{M_{\mathrm{A}}} : -\mathbf{20}\,\mathrm{kN} \times \mathbf{3}\,\mathrm{m} + \mathbf{10}\,\mathrm{kN} \times \mathbf{6}\,\mathrm{m} = \mathbf{0}$$

Formulación analítica



Equilibrio en un trozo: suma entre **A** y un punto cualquiera **P**. En general, las fuerzas externas del trozo estarán desequilibradas.

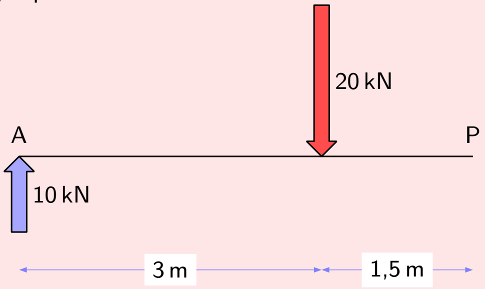
Formulación analítica

$x_{\mathbf{P}}$

A

Equilib … **P**. En
general … s.

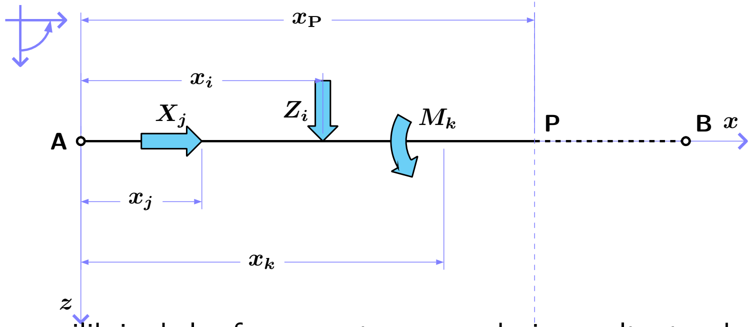
Ejemplo:



$$\sum X_j : 0 = 0 \qquad \sum Z_i : 20\,\text{kN} - 10\,\text{kN} = 10\,\text{kN} \neq 0$$

$$\sum M_{\mathbf{A}} : -20\,\text{kN} \times 3\,\text{m} = -60\,\text{mkN} \neq 0$$

Formulación analítica

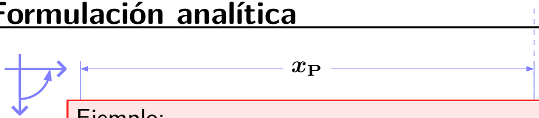


Desequilibrio de las fuerzas externas, es decir, resultantes de las fuerzas externas:

$$R_X(x_P) = \sum_{x_j \leq x_P} X_j \qquad R_Z(x_P) = \sum_{x_i \leq x_P} Z_i$$

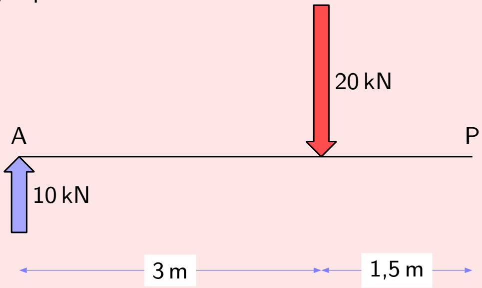
$$R_M(x_P) = \sum_{x_i \leq x_P} Z_i \cdot (x_P - x_i) + \sum_{x_k \leq x_P} M_k$$

Formulación analítica



A

Ejemplo:



$$R_X(\mathbf{P}) = \mathbf{0} \qquad R_Z(\mathbf{P}) = \mathbf{20}\,\mathsf{kN} - \mathbf{10}\,\mathsf{kN} = \mathbf{10}\,\mathsf{kN} \neq \mathbf{0}$$

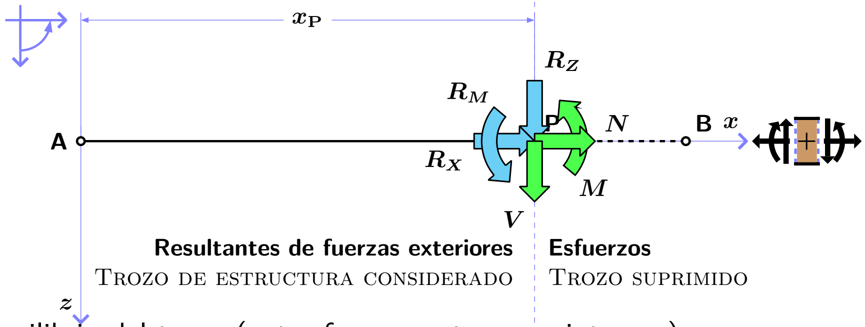
$$R_M(\mathbf{P}) = \mathbf{20}\,\mathsf{kN} \times \mathbf{1{,}5}\,\mathsf{m} - \mathbf{10}\,\mathsf{kN} \times \mathbf{4{,}5}\,\mathsf{m} = -\mathbf{15}\,\mathsf{mkN} \neq \mathbf{0}$$

z

Desequ… as fuer-
zas ext…

$$R_M(x_\mathbf{P}) = \sum_{x_i \leq x_\mathbf{P}} Z_i \cdot (x_\mathbf{P} - x_i) + \sum_{x_k \leq x_\mathbf{P}} M_k$$

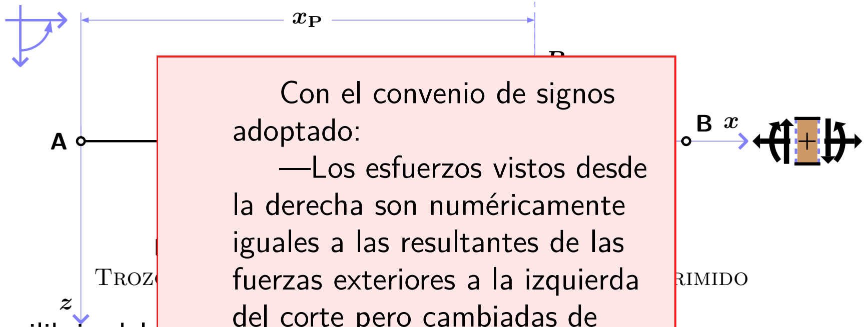
Formulación analítica



Equilibrio del trozo (entre fuerzas externas e internas):

$$\begin{cases} R_X(x_\mathrm{P}) + N(x_\mathrm{P}) = 0 \\ R_Z(x_\mathrm{P}) + V(x_\mathrm{P}) = 0 \\ R_M(x_\mathrm{P}) + M(x_\mathrm{P}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(x_\mathrm{P}) = -R_X(x_\mathrm{P}) \\ V(x_\mathrm{P}) = -R_Z(x_\mathrm{P}) \\ M(x_\mathrm{P}) = -R_M(x_\mathrm{P}) \end{cases}$$

Formulación analítica



Con el convenio de signos adoptado:

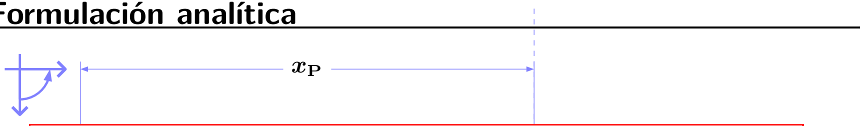
—Los esfuerzos vistos desde la derecha son numéricamente iguales a las resultantes de las fuerzas exteriores a la izquierda del corte pero cambiadas de signo.

—O, lo que es lo mismo, a las resultantes de las fuerzas exteriores a la derecha.

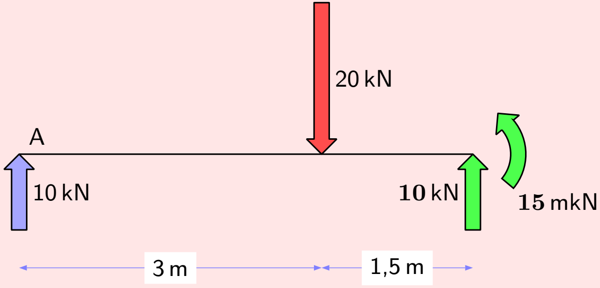
Equilibrio del …):

$$\begin{cases} R_X(x_{\mathrm{P}}) \ldots R_X(x_{\mathrm{P}}) \\ R_Z(x_{\mathrm{P}}) \ldots R_Z(x_{\mathrm{P}}) \\ R_M(x_{\mathrm{P}} \ldots -R_M(x_{\mathrm{P}}) \end{cases}$$

Formulación analítica

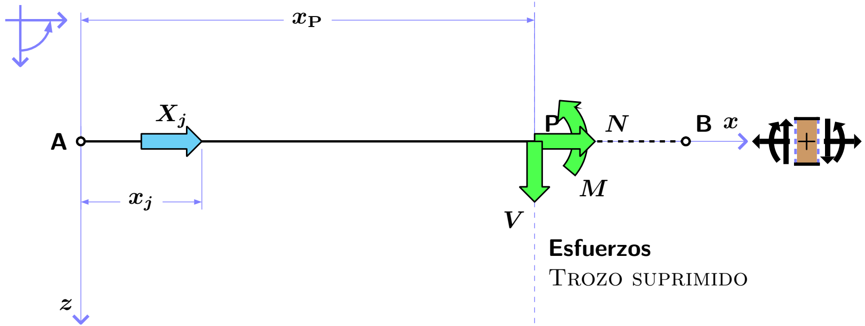


Ejemplo:



$$N = 0 \qquad V = -10\,\text{kN} \qquad M = 15\,\text{mkN}$$

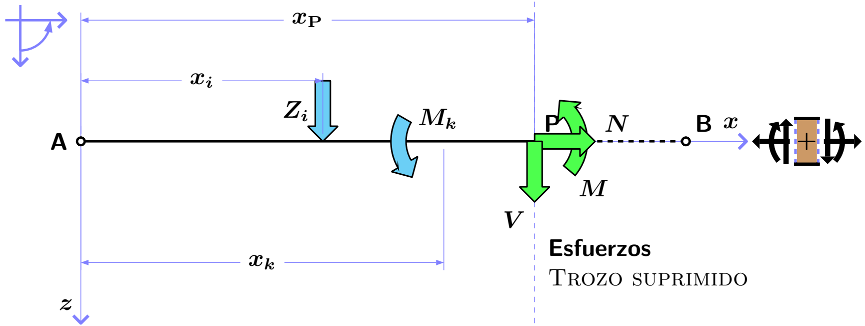
Formulación analítica



Ecuación para el diagrama de esfuerzos normales:

$$N(x_\mathrm{P}) = -\sum_{x_j \leq x_\mathrm{P}} X_j$$

Formulación analítica

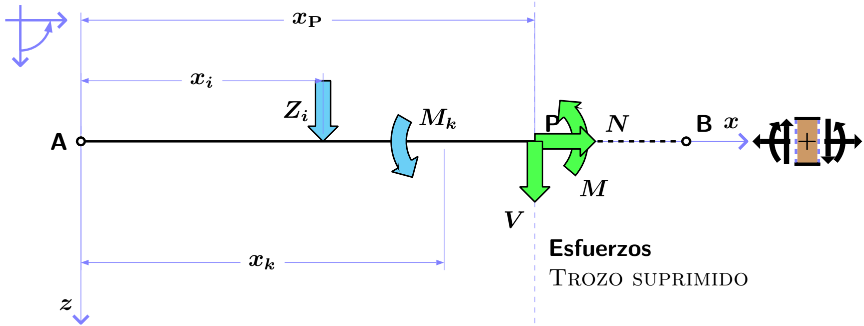


Ecuaciones para los diagramas de la flexión simple:

$$V(x_\mathrm{P}) = -\sum_{x_i \le x_\mathrm{P}} Z_i$$

$$M(x_\mathrm{P}) = -\sum_{x_i \le x_\mathrm{P}} Z_i \cdot (x_\mathrm{P} - x_i) - \sum_{x_k \le x_\mathrm{P}} M_k$$

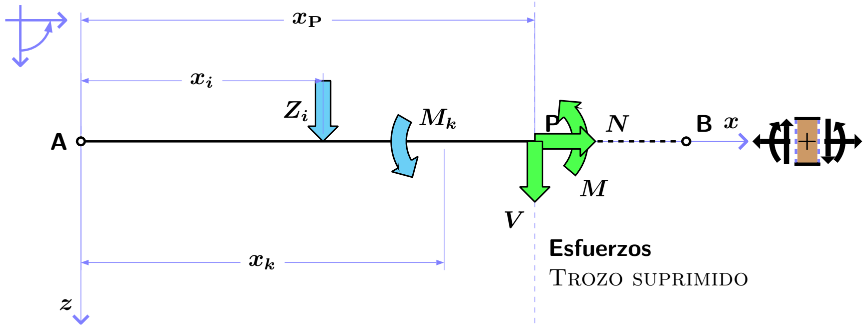
Formulación analítica



$$V(x_{\mathrm{P}}) = -\sum_{x_i \leq x_{\mathrm{P}}} Z_i$$

$$\frac{\partial M(x_{\mathrm{P}})}{\partial x_{\mathrm{P}}} = -\sum_{x_i \leq x_{\mathrm{P}}} Z_i = V(x_{\mathrm{P}})$$

Formulación analítica

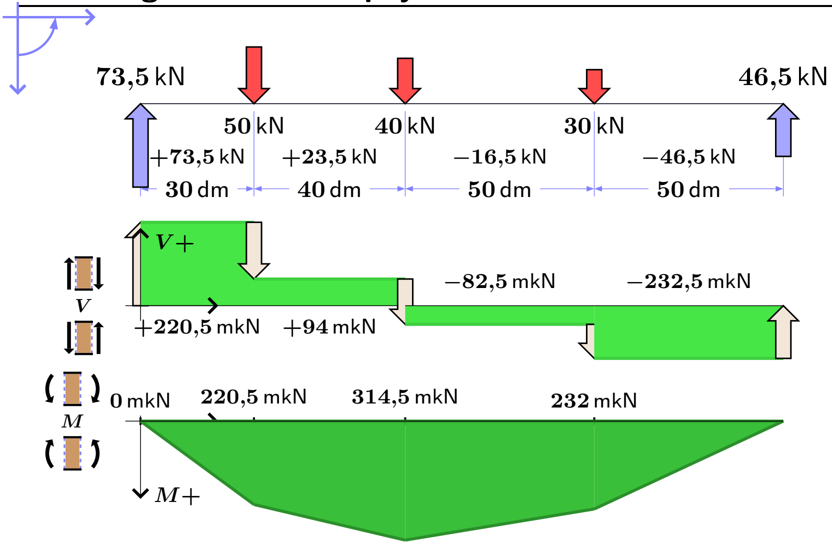


$$M(x) = H \cdot z(x) \qquad \frac{\partial M(x)}{\partial x} = V(x) = H \cdot z'(x)$$

$$M(x_c) = -\int_0^{x_c} p_z (x_c - x)\, \mathrm{d}x \qquad V(x_c) = -\int_0^{x_c} p_z\, \mathrm{d}x$$

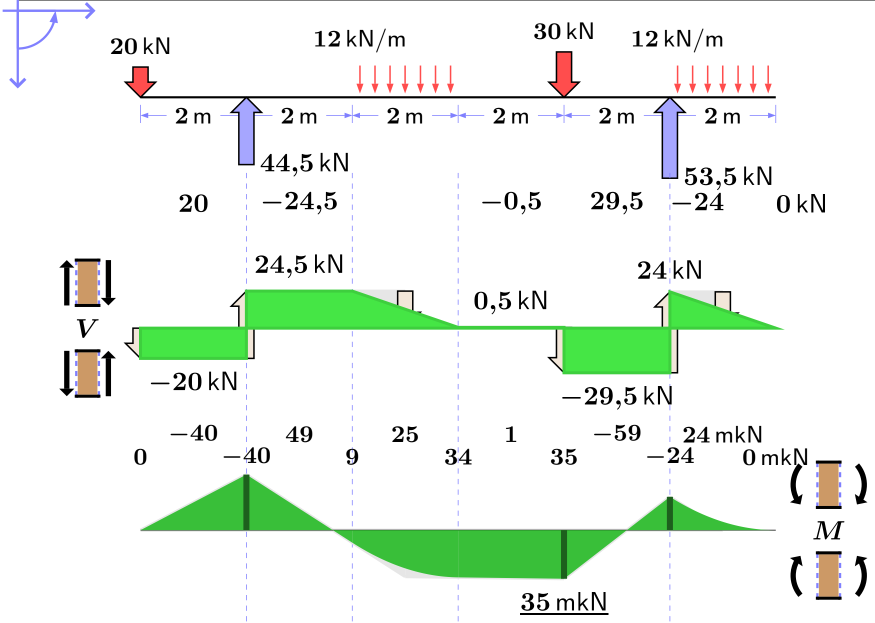
$$\frac{\partial^2 M(x_c)}{\partial x_c^2} = \frac{\partial V(x_c)}{\partial x_c} = -p_z$$

Tres cargas entre dos apoyos



$$M(12\,\mathrm{m}) = M(7) + \int_7^{12} V\,\mathrm{d}x = 314{,}5\,\mathrm{mkN} - 82{,}5\,\mathrm{mkN}$$

Dos voladizos



Diagramas de esfuerzos
(Funiculares como diagramas)

Mariano Vázquez Espí

GIAU+S (UPM)
Grupo de Investigación en Arquitectura, Urbanismo y Sostenibilidad
Universidad Politécnica de Madrid
`http://habitat.aq.upm.es/gi`

Edición del 31 de marzo de 2016
compuesto con *free software*:
GNULinux/LaTeX/`dvips`/`ps2pdf`