Notas sobre el Teorema de Michell

Mariano Vázquez* y otras personas**

22 de junio de 2011

Siempre se ha sabido que el teorema de Michell es *sútil*. Aquí expongo las dudas que me han surgido tras algunos intentos de aplicación a geometrías poco parecidas a los ejemplos clásicos.

Índice

1. El teorema

Let the space within a given boundary, which encloses a number of different frames subjected in turn to the same set of applied forces, undergo an arbitrary deformation of which the frames partake and such that no linear element in the space suffers an extension or contraction numerically greater than $\varepsilon \cdot \delta\ell$, where $\delta\ell$ is the length of the element and ε a given small fraction.

In this deformation, let any bar of length ℓ of one of the frames, A, undergo the small change of length $\Delta\ell$, which is to be taken positive when it increases the existing strain in the bar due to the applied forces, negative in the contrary case. The increases in the elastic energy of the bar is $\Delta\ell \cdot f$, and for the whole frame

$$\sum \Delta\ell \cdot f = \delta W$$

by the principle of Virtual Work, where δW is the virtual work of the applied forces, and is independent of the form of the frame A. Thus

$$\delta W = \sum \Delta\ell \cdot f \leq \sum \operatorname{abs}(\Delta)\, \ell \operatorname{abs}(f) \leq \sum \varepsilon\ell \operatorname{abs}(f) \leq \varepsilon \sum \ell \operatorname{abs}(f)$$

*En el papel de Simplicio.

**En diversos papeles

or

$$\sum_A \ell \operatorname{abs}(f) \geq \frac{\delta W}{\varepsilon}$$

indicating by the suffixes that the inequality applies to the frame A.

If, however, a frame, M, can be found, such that all its parts have their strains increased equally and by as much as any elementary line in the deformed space, i.e. if $\Delta = \varepsilon$ in all parts, the signs of inequality may be replaced by that of equality, and

$$\sum_M \ell \operatorname{abs}(f) = \frac{\delta W}{\varepsilon} \leq \sum_A \ell \operatorname{abs}(f)$$

so that $\sum_M \ell \operatorname{abs}(f)$ is a minimum, and consequently from (3), V_M, the volumen of material in the frame M, is also a minimum.

A frame therefore attains the limit of economy of material possible in any frame-structure under the same applied forces, if the space occupied by it can be subjected to an appropiate small deformation, such that the strains in all the bars of the frame are increased by equal fractions of their lengths, not less than the fractional change of length of any element of the space.

If the space subjected to the deformations extends to infinity in all directions, the volume of the frame is a minimum relatively to all others, otherwise it will have been shown to be a minimum only relatively to those within the same assigned finite boundary.

The condition $\Delta = \varepsilon$ can evidently be satisfied when all the bars of a frame have stresses of the same sign. The test deformation to be applied is then a uniform dilatation or contraction [...]

[...]

A more general class of frames satisfying the condition $\Delta = \varepsilon$, consists of those whose bars, *both before and after* [subrayado mío] the appropiate deformation, form curves of orthogonal systems.

In such a system the test strain may be equal and of the same sign, or equal and opposite, in directions at right angles, without the strains in the bars being exceeded by those of any others lines in the field. In the first case the strain is evidently the same in all directions; in the second, if λ, $-\lambda$ are the strains in the principal directions, the strain in any direction at an angle θ to one of them is $\pm\lambda\cos 2\theta = \lambda$',

$$\Rightarrow \operatorname{abs}(\lambda') \leq \operatorname{abs}(\lambda)$$

[...]

2. ¿Discontinuidades en la deformación test?

¿Pueden admitirse discontinuidades en el campo de deformaciones definido por la deformación test? Michell no menciona nada al respecto pero no hay discontinuidades en ninguno de sus ejemplos, salvo en algún punto (aplicación de la carga en la viga). 2011.03.08

En mi opinión, la deformación test puede incluir cualquier tipo de discontinuidad siempre que se siga cumpliendo la condición fundamental: que ningún diferencial de longitud experimente una deformación mayor en valor absoluto que ε.

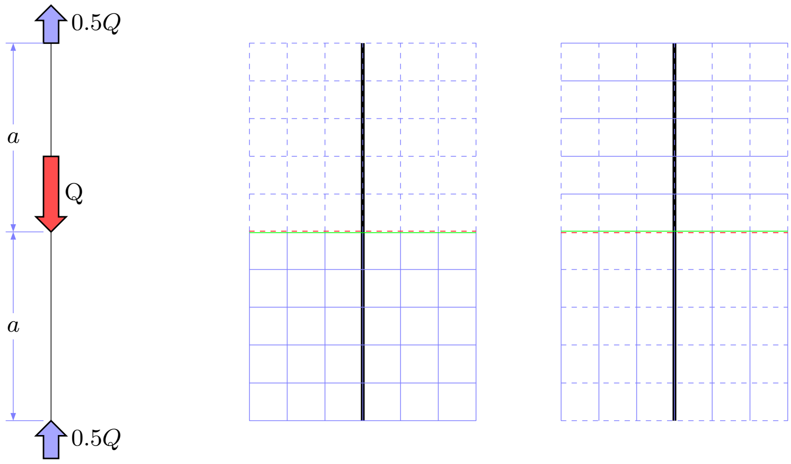

Figura 1: Un caso simple

De hecho, la deformación test necesaria para mostrar mediante el Teorema de Michell la optimidad de algunas estructuras sencillas parece exigir discontinuidades.

Véase por ejemplo la Figura 1. El número de Maxwell es 0. Como la estructura es una simple barra vertical, hay varias posibles deformaciones test, pues podemos variar a nuestro antojo la deformación principal en la dirección horizontal. En las dos representadas en la figura, a la altura de la acción Q se pasa de una deformación ε a $-\varepsilon$ sin continuidad. En ambos casos puede especificarse con completa exactitud que deformación debe tener una línea horizontal a la altura de Q —y su valor podría ser ε, $-\varepsilon$ ó 0 cumpliendo con la condición del teorema: "no linear element in the space suffers an extension or contraction numerically greater than $\varepsilon{\cdot}\delta\ell$". El ejemplo puede hacerse más evidente si en vez de cargas concentradas Q se usan cargas uniformes p sobre segmentos horizontales de longitud b.

Nótese que en este caso también es posible utilizar una deformación test sin *tanta* discontinuidad, aquella en que la deformación horizontal tiene el mismo valor por encima o por debajo de Q; sin embargo la discontinuidad en el valor de la deformación vertical es imprescindible.

O bien la estructura mostrada no es óptima, o bien se me escapa algún patrón de deformaciones, o bien se pueden usar discontinuidades aunque hay que tener cuidado con ellas.

***

La estructura mostrada es óptima sin duda. Pero si admitimos discontinuidades podemos llegar a contradicciones. 2011.03.15

Hay dos tipos de discontinuidades: Tipo I, la de una deformación en la dirección perpendicular a su propia dirección, es decir, que ε_x cambia bruscamente de signo entre dos puntos a distancia $\mathrm{d}y$; y Tipo II, la de una deformación en su propia dirección. El tipo II es el único en los ejemplos de Michell.

Si admitimos discontinuidades Tipo I (como las de la Figura 1 a la altura de Q) podríamos demostrar que una circunferencia y sus infinitos radios es un

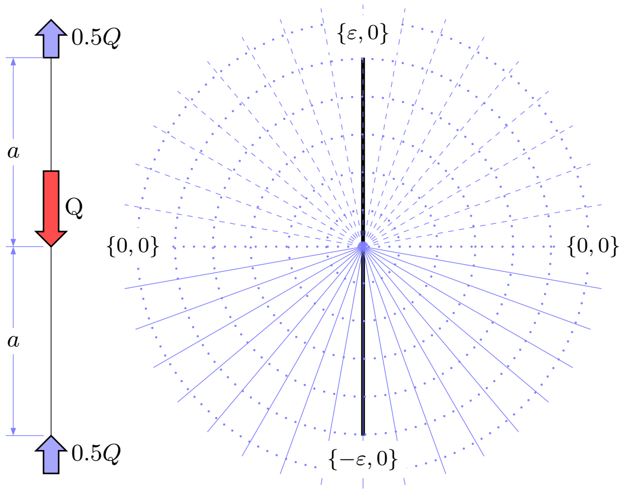

Figura 2: Un caso simple sin casi discontinuidades
La definición de la deformación es como sigue: $\varepsilon_r = \varepsilon \cdot f(\theta)$ siendo $f(\theta)$ cualquier función continua que cumpla con $f(n\pi) = 0$, $f(\pi/2 + 2n\pi) = 1$, $f(3\pi/2 + 2n\pi) = -1$. La deformación tangencial puede elegirse arbitrariamente siempre que $\text{abs}\,(\varepsilon_\theta) \leq \varepsilon$.

esquema óptimo en sentido absoluto para una carga puntual entre dos apoyos. Así que **nada** de discontinuidades Tipo I.

¿Podemos evitar las discontinuidades Tipo II también? Parece que en el caso de la Figura 1 podemos reducirla a un punto, véase la Figura 2. El único punto de discontinuidad para la deformación radial es el de aplicación de la propia carga Q. Por lo demás el ejemplo, si es correcto, muestra que las deformaciones principales no tienen forzosamente que tomar valores máximos en todas partes: la única condición inexcusable de la deformación test es que el valor absoluto de la deformación en cualquier punto del espacio y según cualquier dirección **no sea mayor** que una cantidad finita ε.

3. Sistemas ortogonales: ¿antes y después de la deformación?

Para mí no es en absoluto evidente que las curvas ortogonales tengan que serlo antes o después de la deformación. De hecho, en cualquiera de los ejemplos de Michell puede mostrarse sin dificultad que tras la deformación test las líneas *de la estructura* que eran ortogonales inicialmente dejan de serlo. Es decir, que si le interpretamos literalmente, son los propios ejemplos de Michell los que incumplen la condición que él ve como necesaria.

hasta 17-3-2011

Para ver esto basta con examinar la semicircunferencia con un abanico de radios, de cuyo centro cuelga el peso, que es óptima para un semiplano por arriba o debajo de la línea de carga. Los radios se alargan ε mientras que la circunferencia se acorta ε. Si el arco sigue siendo de circunferencia su radio habrá disminuido en εr mientras que los radios se habrán alargado εr: si radios y arco siguen unidos (compatibilidad), ni el arco ni los radios pueden serlo de la misma circunferencia y desde luego no serán ortogonales. Por tanto, tanto si estoy interpretando bien o no el texto de MICHELL, el ‘‘antes y después’’ de la deformación *no puede referirse* a las líneas *de la estructura*; sólo queda que se refieran a las ‘‘líneas del campo de deformaciones’’ si es que esto tiene algún sentido.

***

SAGREDO o SALVIATI: Creo que subsiste un error en [su razonamiento, queridísimo SIMPLICIO]. Pues en los [ejemplos] de MICHELL se cumple perfectamente la ortogonalidad antes y después de la deformación. En la circunferencia en abanico los radios crecen y la circunferencia se cierra de modo que abarca un ángulo menor que π, a la vez que aumenta de radio —o reduce la curvatura. Si e es la deformación unitaria, el ángulo resultante es $\pi\cdot(1-e)/(1+e)$ donde el primer factor depende de la reducción de la circunferencia y el segundo del aumento de los radios —y las familias de circunferencias y radios siguen siendo ortogonales—; tan sólo resultaría incompatibilidad si hubiese de extenderse al espacio completo. Cervera, 17-3-2011

***

Las curvas ortogonales suministran un conjunto de direcciones en las que especificar el tensor de deformaciones (*tres* parámetros) de forma que se trate precisamente de direcciones principales de deformación. Sin embargo, para que ese campo de deformación corresponda con un campo de desplazamientos real (*dos* únicas funciones, u, v) tiene que cumplirse alguna condición adicional, pues si bien podemos fijar los tres parámetros del tensor $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \alpha$ a nuestro antojo, no está asegurado que ese campo sea integrable y que podamos determinar las funciones u, v. Es decir, debe existir compatibilidad entre deformación y desplazamientos.

¿Es ésta última condición equivalente a la postulada por MICHELL? Parece que así es. Según voy ojeando literatura, tal parece que en los sesenta del XX hubo un esfuerzo por resolver analíticamente la obtención del patrón de Michell. Si he entendido algo, la ecuación de compatibilidad para ese patrón debe cumplir en coordenadas curvilíneas a, b:

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial a\partial b} = 0$$

que, salvando las distancias de notación parece ser lo mismo que propone Michell, aunque eso sí sacándoselo un poco de la manga (curioso caso para la historia de la ciencia...) y con una exposición que a mí me sigue pareciendo oscura (claro que yo no sé inglés por otra parte):

> The condition that a two-dimensional orthogonal system shall remain orthogonal after equal and opposite extensions of its two series of curves, is that the inclination between any two adjacent curves of the same series is constant throughout their length. [...]
>
> $$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}b} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}a} = 0$$
>
> [en mi misma notación, of course].

Tal parece que lo que describe MICHELL es un caso particular de la ecuación de compatibilidad anterior.

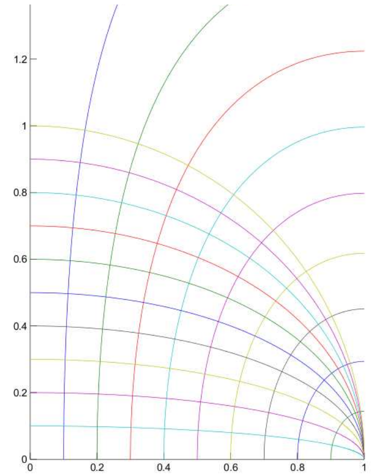

Figura 3: Carga uniforme: curvas que no sirven
La carga es uniforme entre $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, puntos en los que están los apoyos. Solo se dibuja un cuadrante del patrón test. Las elipses tienen por ecuación $y^2 = b^2 \cdot (1 - x^2)$ con $b \in [0, 1]$ y centro en $(0, 0)$; la familia ortogonal viene dada por $y^2 = \ln(x/a)^2 + (a^2 - x^2)$ que pasan por $(a, 0)$, por lo que $a \in [-1, 1]$. Por fuera de la circunferencia el patrón se completa con un abánico de radios (que prolongan las curvas ortogonales) y circunferencias concéntricas (en continuidad con las elipses). La deformación según las elipses y sus curvas ortogonales es discontinua. En los puntos de apoyo más que discontinuidad hay *indeterminación*, las deformaciones principales deberían ser $\pm\varepsilon$, algo imposible. Además son puntos de discontinuidad los del diámetro horizontal: la deformación en la dirección de las elipses pasa de $-\varepsilon$ a ε; y en la de las curvas ortogonales, de ε a $-\varepsilon$. Además no se cumple la ecuación de compatibilidad en coordenadas curvilíneas. Curvas consideradas por Vázquez Brothers en 2011.

4. ¿Existe siempre una solución de Michell?

Es decir, para cualquier problema de Maxwell, ¿está asegurado que a) existe una deformación test que cumpla con todas las condiciones; y b) existe un esquema que resuelve el problema y es estricto para esa deformacion test?

Dado que tras más de un siglo la solución para la carga uniforme no ha aparecido, la pregunta anterior tiene sentido. No sería la primera vez: es lo que en jerga de la teoría de algoritmos se llama *frustación*: se sabe qué condiciones debería cumplir un optimo *local (en el sentido diferencial)*, pero en algunos casos es imposible cumplirla: por supuesto existirá un óptimo que *no* cumple esa condición, aunque lo más frecuente es que exista una pluralidad (los denominados *metaestados* en termodinámica, todos ellos equivalentes pero distinguibles, es el caso de los vidrios de espines).

22-6-2011: antes ponía "absoluto", ¡esa es la clave¡

5. Ejemplos

Patrones de deformación que no cumplen con el teorema: Figura 3