El problema de Maxwell
Una formulación contemporánea

Mariano Vázquez

11 de septiembre de 2012

Índice

1. El problema estructural **1**
1.1. Direcciones principales de acción y reacción 3

2. El problema de Maxwell **4**

3. El problema de Maxwell óptimo **4**

A. Alguna fórmulas para matrices **4**
A.1. Descomposición en valores singulares 4

1. El problema estructural

Consideremos c parejas de puntos y direcciones en el plano, y un cierto número de magnitudes de fuerza $\mathbf{a}$ aplicadas en un subconjunto de esas parejas (fuerza como el vector que resulta de multiplicar la magnitud por la dirección aplicado en el punto). En el resto de las parejas disponibles deben aparecer magnitudes de fuerza $\mathbf{r}$ que equilibren la acción de $\mathbf{a}$.

Ejemplo:

Parejas (punto),(dirección) en coordenadas x, y:

$$\mathbf{c} = \left\{ \begin{array}{c} (0,0),(0,-1) \\ (0,0),(1,1) \\ (0,1),(0,1) \\ (0,-1),(0,1) \\ (0,0),(-1,0) \end{array} \right\}$$

$\mathbf{a}^{\mathrm{T}} = \{2F, F\}$ aplicadas en c_1 y c_2, respectivamente.
$\mathbf{r}^{\mathrm{T}} = \{r_1, r_2, r_3\}$ aplicadas en c_3, c_4 y c_5, respectivamente.
(He suprimido la figura porque la mejor manera de seguir el texto es haciendo el lector sus dibujos.)

Las tres ecuaciones de equilibrio global en el plano pueden escribirse como:

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{G}_A & \mathbf{G}_R \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{a} \\ \mathbf{r} \end{array} \right\} = \mathbf{0} \tag{1}$$

o bien

$$\mathbf{R} = \mathbf{G}_A \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{G}_R \cdot \mathbf{r} \tag{2}$$

en la que $\mathbf{R}$ simboliza las resultantes de $\mathbf{a}$ para las tres ecuaciones elegidas (equilibrio vertical, horizontal y de momentos, por ejemplo; pero, igualmente, equilibrio de momentos para tres parejas cuyos puntos no estén alineados, etc). Las dos matrices $\mathbf{G}$ son conocidas por la geometría de las c parejas de puntos y direcciones. También son conocidas las componentes de fuerza $\mathbf{a}$. Por supuesto debe ser $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ para que exista un problema que resolver.

Ejemplo:

Utilizando las ecuaciones canónicas de equilibrio (horizontal, vertical y de momentos respecto al origen de coordenadas):

$$\mathbf{G}_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad -\mathbf{G}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R} = F \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En este caso, la tercer ecuación se cumple siempre, para cualquier valor de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{r}$: es irrelevante.

Podemos realizar la descomposición en valores singulares (cf. §A.1) de $\mathbf{G}_R$, en la forma:

$$\mathbf{G}_R = \mathbf{U_R}_r \cdot \mathbf{\Sigma_R}_r \cdot \mathbf{V_R}_r{}^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

Las columnas de $\mathbf{U_R}_r$ son una base ortonormal del espacio de vectores $\mathbf{R}$ que pueden ser equilibrados globalmente dada la definición de $\mathbf{G}_R$. Por tanto, para que el problema sea resoluble las ecuaciones $\mathbf{R} = \mathbf{U_R}_r\mathbf{x}$ deben tener solución $\mathbf{x} \neq 0$. O dicho de otra forma, $\mathbf{R}$ tiene que poderse representar en la base $\mathbf{U_R}_r$. En otro caso, el problema está mal formulado y el equilibrio global no es posible con esa definición geométrica.

Ejemplo:

$$\mathbf{U_R}_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{U_R}_r{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{R} = F \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \neq \mathbf{0} \qquad \mathbf{R} = F \cdot \mathbf{U_R}_r \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

La matriz $\mathbf{\Sigma_R}_r$ es una matriz diagonal, con todos los terminos diagonales distintos de cero y, por tanto, invertible. Se trata de los valores singulares no nulos de la matriz $\mathbf{G}_R$. Su número de filas (o columnas) indica el número mínimo de componentes de $\mathbf{r}$ necesarias para el equilibrio global.

La matriz $\mathbf{V_R}_r$ es una base ortonormal de los vectores $\mathbf{r}$ cuya imagen $\mathbf{R}$ es no nula.

Ejemplo:

$$\mathbf{\Sigma_R}_r = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V_R}_r = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Solo son imprescindibles dos de las componentes de $\mathbf{r}$ para satisfacer el equilibrio de $\mathbf{a}$. ¿Cúales?

Si todas las componentes son necesarias, entonces sólo existe una única solución, que obtenemos como es habitual con:

$$\mathbf{r} = -\mathbf{G}_R{}^{-1}\mathbf{R} \tag{4}$$

El conjunto de componentes de fuerza $\mathbf{a}$ y $\mathbf{r}$ (así determinados) junto a la definición geométrica de las c parejas, definen un *único problema de Maxwell.*

Si, por el contrario, no todas las componentes de $\mathbf{r}$ son necesarias, existen infinitas soluciones para $\mathbf{r}$, que pueden expresarse como:

$$\mathbf{r} = -\mathbf{G}_R{}^{+} \cdot \mathbf{R} - \mathbf{V}_{\mathbf{R}\mathcal{N}} \cdot \mathbf{m} \tag{5}$$

en la que $\mathbf{G}_R{}^{+}$ es la *pseudo*inversa de $\mathbf{G}_R$, $\mathbf{V}_{\mathbf{R}\mathcal{N}}$ es una base ortonormal del núcleo de $\mathbf{G}_R$, correspondiente a sus valores singulares nulos, y $\mathbf{m}$ representa un vector de componentes arbitrarias. El número de componentes de $\mathbf{m}$ es igual al número de componentes prescindibles de $\mathbf{r}$ para el equilibrio global. Cada valor de $\mathbf{m}$ representa un problema de Maxwell distinto, definido como anteriormente. En este caso hay tantas veces *infinitos problemas de Maxwell* como componentes tenga $\mathbf{m}$. $\mathbf{G}_R{}^{+}$ es igual a:

$$\mathbf{G}_R{}^{+} = \mathbf{V}_{\mathbf{R}r} \cdot \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}r}{}^{-1} \cdot \mathbf{U}_{\mathbf{R}r}{}^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

Ejemplo:

Sólo son imprescindibles dos de las componentes de $\mathbf{r}$, por tanto hay una sola infinidad de problemas de Maxwell asociados al problema estructural.

$$\mathbf{G}_R{}^{+} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V}_{\mathbf{R}\mathcal{N}} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El valor de $\mathbf{V}_{\mathbf{R}\mathcal{N}}$ nos indica que r_3 es imprescindible (y está perfectamente determinada por $\mathbf{a}$), pero que podemos optar entre r_1 y r_2 (o cualquiera de sus combinaciones lineales).

$$\mathbf{r} = F \cdot \left\{ \begin{array}{c} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{array} \right\} \quad + \quad m \cdot \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{array} \right\}$$

1.1. Direcciones principales de acción y reacción

De (2) y de (3) podemos escribir:

$$\mathbf{U}_{\mathbf{R}r}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{R} = -\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}r} \cdot \mathbf{V}_{\mathbf{R}r}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{r} \tag{7}$$

lo que nos permite definir acciones y reacciones en 'direcciones principales' como:

$$\mathbf{d}_A = \mathbf{U}_{\mathbf{R}r}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{R} \qquad \mathbf{d}_R = -\mathbf{V}_{\mathbf{R}r}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{r} \tag{8}$$

En esas direcciones, resulta que:

$$\mathbf{d}_A = \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}r} \cdot \mathbf{d}_R \qquad \mathbf{d}_R = \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{R}r}{}^{-1} \cdot \mathbf{d}_A \tag{9}$$

En esencia se trata de la determinación de la resultante y la equilibrante en estática gráfica.

Ejemplo:

Si $\mathbf{a}^{\mathrm{T}} = \{a_1, a_2\}$:

$$\mathbf{R} = \left\{ \begin{array}{c} a_2 \\ a_1 - a_2 \\ 0 \end{array} \right\} \qquad \mathbf{d}_A = \left\{ \begin{array}{c} a_2 \\ a_1 - a_2 \end{array} \right\} \qquad \mathbf{d}_R = \left\{ \begin{array}{c} r_3 \\ \sqrt{2}(r_1 + r_2)/2 \end{array} \right\} \tag{10}$$

2. El problema de Maxwell

[...]

3. El problema de Maxwell óptimo

[...]

A. Alguna fórmulas para matrices

Una matriz $\mathbf{A}$ establece una aplicación lineal f entre dos espacios vectoriales, X y B, en la forma $\mathbf{b} = f(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ con $\mathbf{b} \in B$ y $\mathbf{x} \in X$. Para todo $\mathbf{x} \in X$ existe un $\mathbf{b}$, pero en general puede no existir $\mathbf{x} \in X$ para algún $\mathbf{b} \in B$.

El núcleo (*null-space*) $\mathcal{N}$ de la aplicación es el conjunto de vectores $\mathbf{x}$ que tienen como imagen el vector nulo de B, y puede tener dimensión mayor que cero. Por otra parte, el subespacio de B que resulta de aplicar $\mathbf{A}$ a la totalidad de X se denomina imagen (*range*) de $\mathbf{A}$ o del espacio X. La dimensión del núcleo es la diferencia entre la dimensión de X y la dimensión de su imagen $f(X)$. A esta última se la denomina en inglés *rank* de $\mathbf{A}$ y es, por tanto, la diferencia entre la dimensión de la imagen de $\mathbf{A}$ y la dimensión de su núcleo.

A.1. Descomposición en valores singulares

Cualquier matriz $\mathbf{A}$ admite la siguiente descomposición:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

en la que:

- las columnas de $\mathbf{U}$ son una base ortonormal de B,
- las columnas de $\mathbf{V}$ son una base ortonormal de X, y
- $\mathbf{\Sigma}$ es una matriz rectangular diagonal, cuyos términos $\sigma_{i,i}$ se denominan valores singulares de $\mathbf{A}$.

Puesto que $\mathbf{\Sigma}$ sólo tiene términos no nulos en su diagonal y ésta no puede tener más que el mínimo de las dimensiones de B y de X, la anterior descomposición es equivalente a la denomina *thin SVD*:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_f \cdot \mathbf{\Sigma}_f \cdot \mathbf{V}^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

en la que:

- las columnas de $\mathbf{U}_f$ generan la imagen de X, $f(X)$,
- $\mathbf{\Sigma}_f$ es una matriz diagonal cuadrada, que sigue conteniendo todos los valores singulares de $\mathbf{A}$.

Si la dimensión del núcleo de f no es nula, en $\mathbf{\Sigma}_f$ existirán términos diagonales nulos, lo que permite escribir una forma compacta de las anteriores, *compact SVD*:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_r \cdot \mathbf{\Sigma}_r \cdot {\mathbf{V}_r}^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

en la que:

- las columnas de $\mathbf{U}_r$ son una base ortonormal de la imagen de X, $f(X)$
- las columnas de $\mathbf{V}_r$ son una base ortonormal de $X - \mathcal{N}$, y
- $\mathbf{\Sigma}_r$ es una matriz diagonal que contiene los valores singulares no nulos de $\mathbf{A}$.

Con la descomposición original (11) puede calcularse la matriz *pseudo*inversa (*Moore-Penrose pseudoinverse*) como:

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma}^+ \cdot \mathbf{U}_r{}^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

en la que $\mathbf{\Sigma}^+$ es la *pseudo*matriz de $\mathbf{\Sigma}$, obtenida calculando el inverso de los términos diagonales no nulos y trasponiendo el resultado. (Del mismo modo pueden emplearse las otras dos descomposiciones.) $\mathbf{A}^+$ es única y satisface los siguientes cuatro axiomas:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} &= \mathbf{A} && (15)\\ \mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ &= \mathbf{A}^+ && (16)\\ \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^+\right)^{\mathrm{T}} &= \mathbf{A}\mathbf{A}^+ && (17)\\ \left(\mathbf{A}^+\mathbf{A}\right)^{\mathrm{T}} &= \mathbf{A}^+\mathbf{A} && (18) \end{aligned}$$

En general, sin embargo, $\mathbf{A}^+\mathbf{A} \neq \mathbf{1}$. Por supuesto que si $\mathbf{A}$ tiene inversa $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^+$.

La matriz $\mathbf{V}$ es de la forma $[\mathbf{V}_r\ \mathbf{V}_{\mathcal{N}}]$ en donde las columans de $\mathbf{V}_{\mathcal{N}}$ son una base ortonormal del núcleo de $\mathbf{A}$. Con esta notación la solución de $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$, si existe, puede escribirse como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}_{\mathcal{N}} \cdot \mathbf{c} \tag{19}$$

en la que $\mathbf{c}$ es un vector arbitrario con tantas componentes como dimensiones tiene el núcleo de $\mathbf{A}$.

Si $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene más de una solución, tiene infinitas soluciones que pueden escribirse en la forma:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{b} + \mathbf{V}_{\mathcal{N}} \cdot \mathbf{c} \tag{20}$$

siendo $\mathbf{c}$ un vector arbitrario. Sin embargo, la expresión canónica (y válida tambien para el caso de una única solución) es:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{b} + \left(\mathbf{1} - \mathbf{A}^+\mathbf{A}\right) \cdot \mathbf{d} \tag{21}$$

siendo $\mathbf{d}$ un vector arbitrario. Los valores nulos de $\mathbf{c}$ o $\mathbf{d}$ estan asociados a la menor “longitud” de $\mathbf{x}$, en un sentido que puede precisarse formalmente.

Si la dimensión del núcleo de $\mathbf{A}$ es nula (el núcleo solo contiene el elemento nulo de X), $\mathbf{U}_f = \mathbf{U}_r$ y $\mathbf{\Sigma}_f = \mathbf{\Sigma}_r$. Si además $\mathbf{A}$ es cuadrada, la imagen de X coincide con B y las matrices $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ y $\mathbf{\Sigma}$ de las tres descomposiciones coinciden.