

Bridge Problem Solutions 20110424

Mariano Vázquez Espí

Barcelona, 24 de abril de 2011

En las páginas que siguen se ofrecen soluciones para el *bridge problem*. Las soluciones dependen de M , el número de intervalos usado para discretizar la carga uniforme.

Hay tres tipos de soluciones: a) las que van con una gráfica y el valor de la función objetivo ϕ ; b) las que además tienen un cuadro de texto con datos adicionales; y c) las que van sobre una malla de puntos y la función objetivo \mathbf{V} (igual a 10ϕ), obtenidas por JOSE IGNACIO HERNANDO mediante programación lineal.

En el segundo caso, se indica el valor mínimo que se obtendría con una transformación afín de las ordenadas de la geometría dibujada, aplicando simplemente el teorema λ (los datos incluyen la cantidad de estructura vertical, horizontal, en tracción, etc).

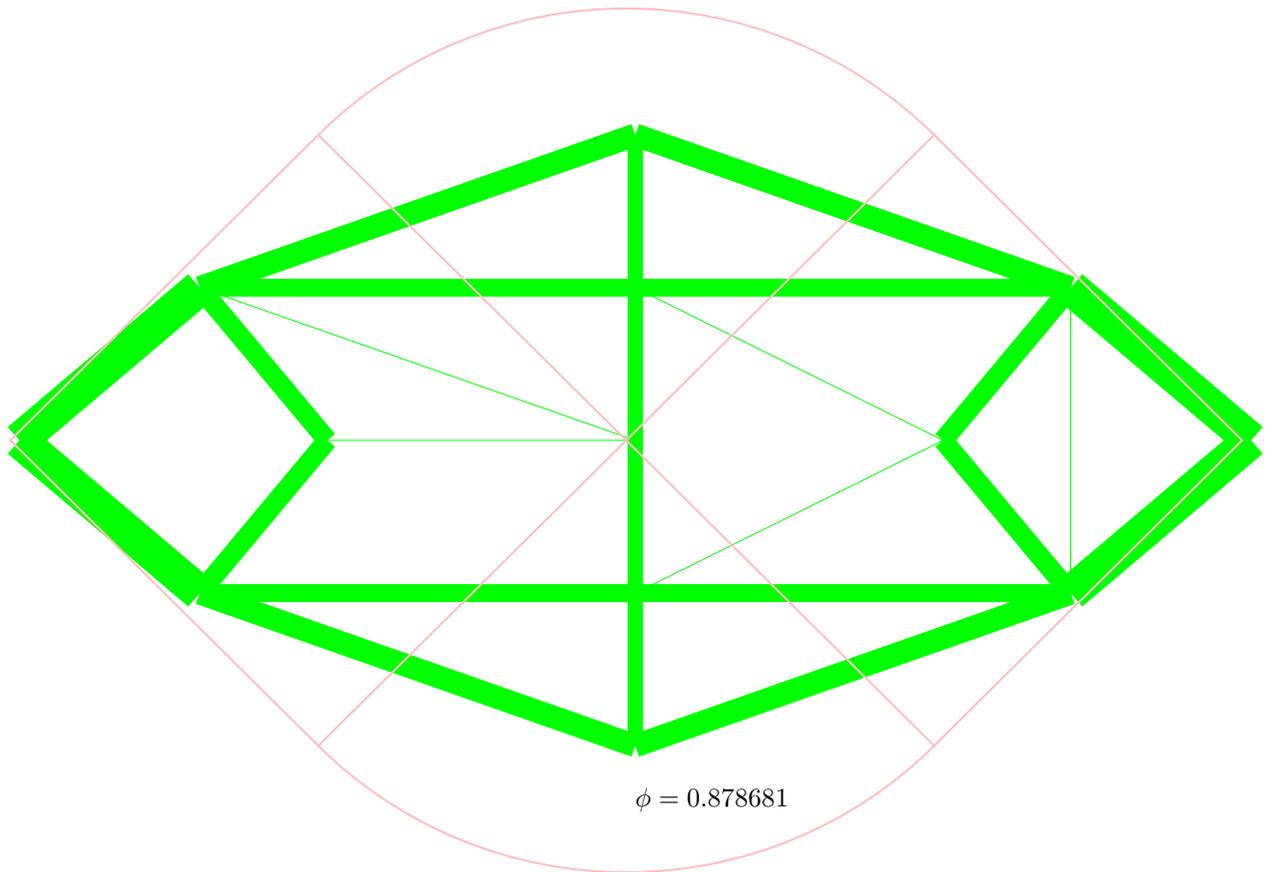
Índice

1. Catálogo de buenas soluciones	2
1.1. Soluciones M=4	2
1.2. Soluciones M=6	5
1.3. Soluciones M=7	6
1.4. Soluciones M=8	9
1.5. Soluciones M=12	12
1.6. Soluciones M=16	15
1.7. Soluciones M=17	23
1.8. Soluciones M=24	24
2. Esquemas	28
2.1. Un esquema recursivo con “Michell-1”	28
2.2. Elipses L	28
2.3. Parábolas L	28
2.4. Parábolas auto-ortogonales	29
2.5. Parábolas generalizadas y erf's	29
2.6. Arco de circunferencia y radios	30
3. Algunas conclusiones	30
3.1. Condiciones necesarias y suficientes	30
3.2. <i>bridge problem</i> : ¿infinitud de meta-estados?	31
3.3. Condiciones de comparabilidad de soluciones	31
3.4. Bibliografía cuya revisión parece necesaria	31
3.5. TODO	31

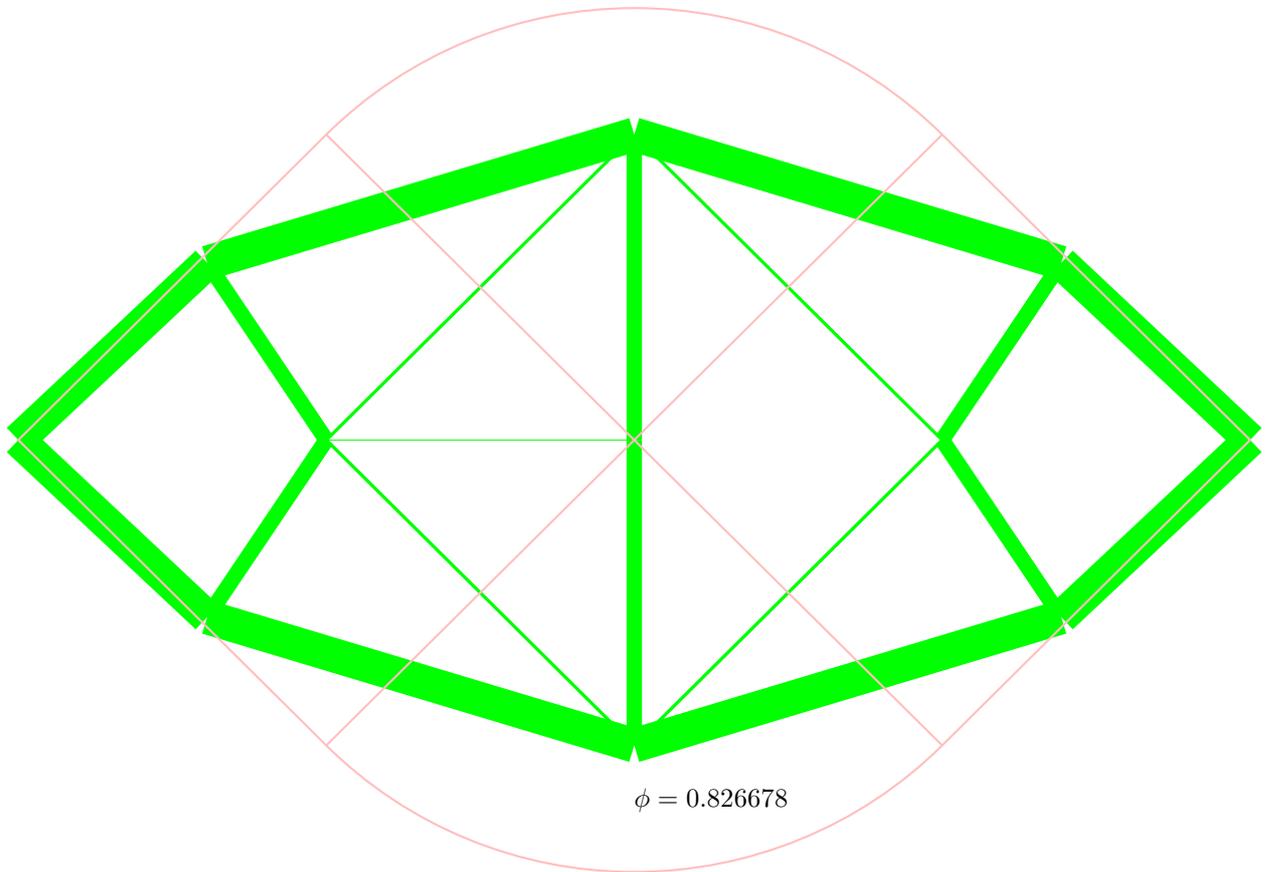
1. Catálogo de buenas soluciones

1.1. Soluciones M=4

solM4-878.sb.tex

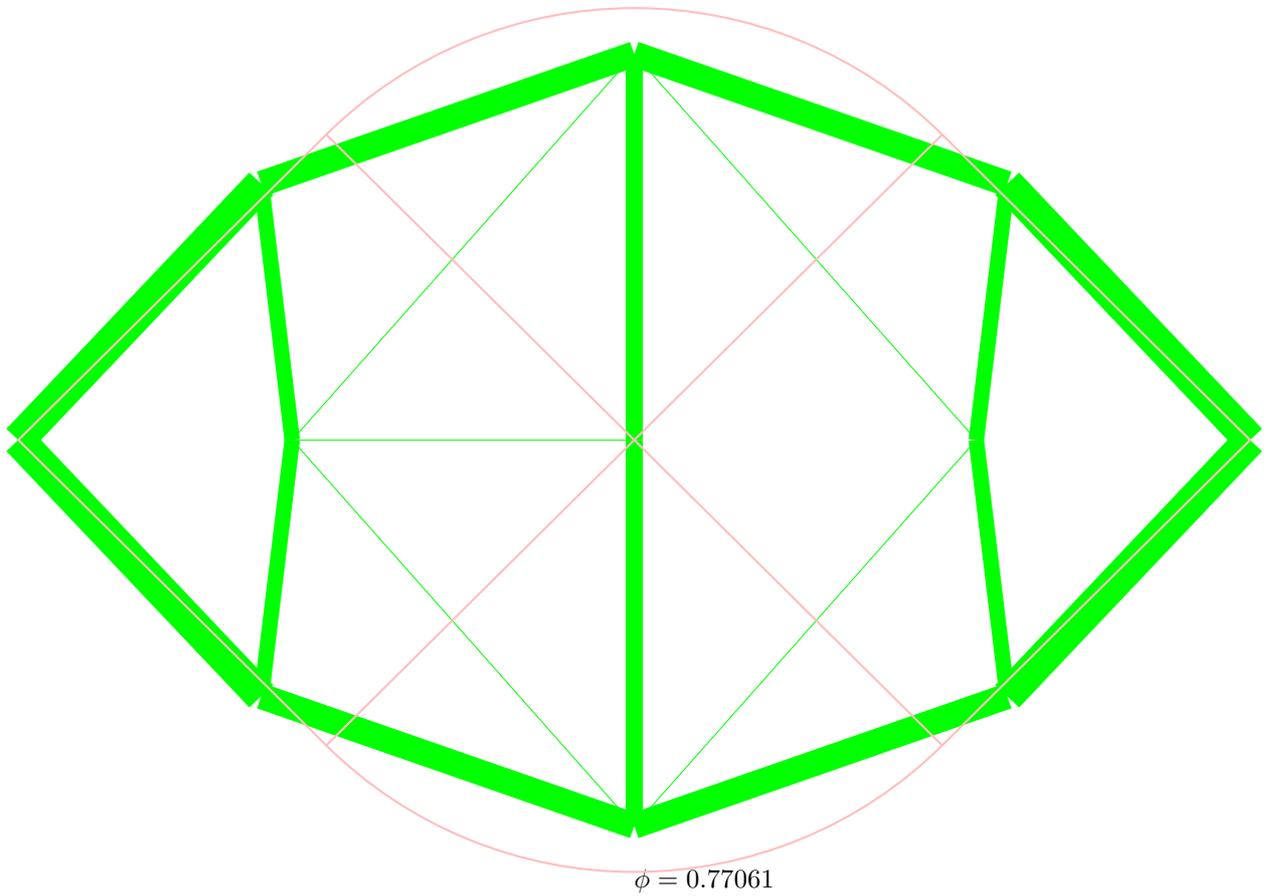


solM4-786.sb.tex



```
# qs: W=0.826678
# qs: Wt=0.413339
# qs: Wc=0.413339
# qs: Wh=0.540756
# qs: Wv=0.285922
# qs: factor esb=0.727148
# qs: factor y=1.37524
# qs: W mínima del esquema=0.78642
```

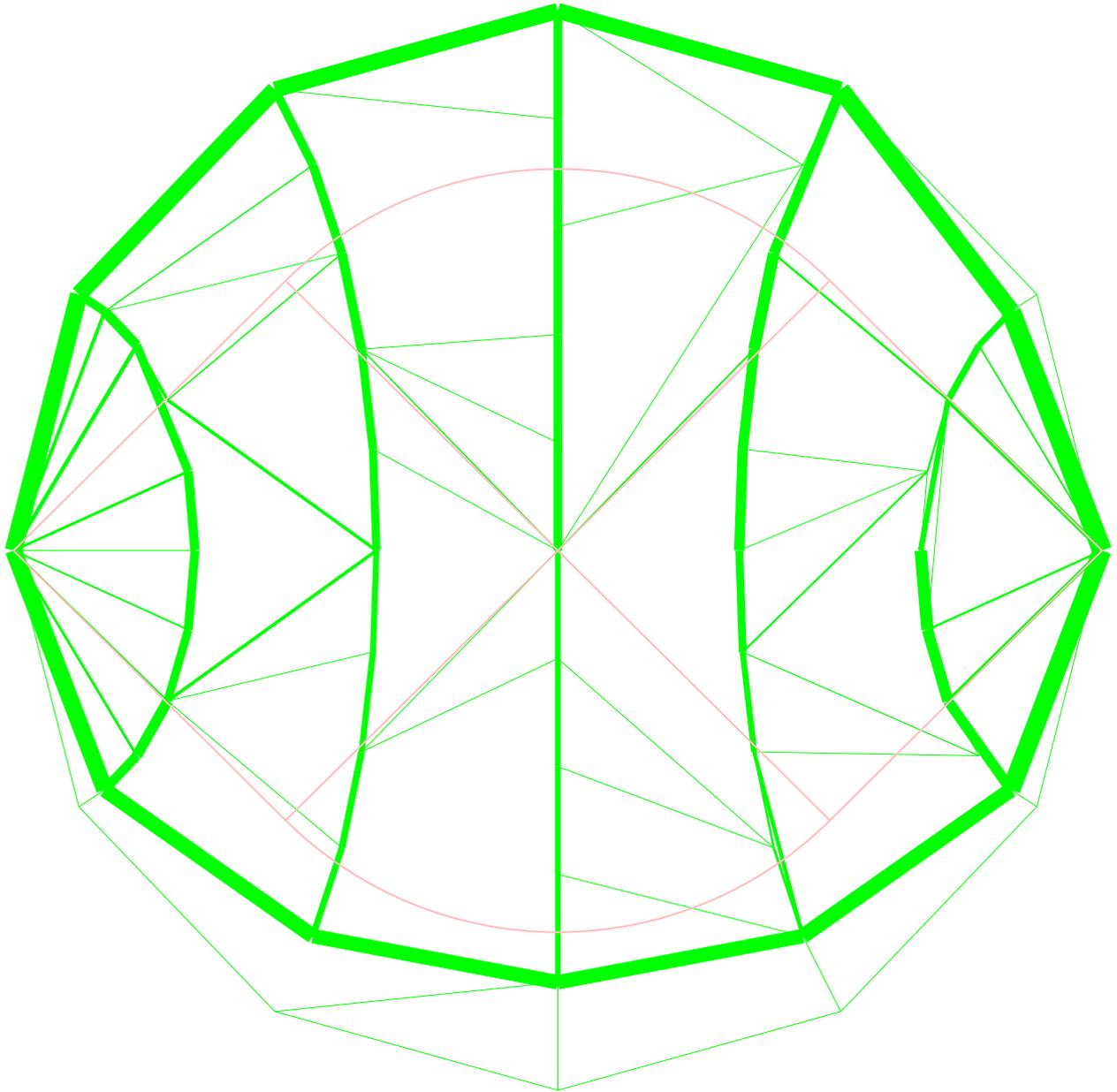
solM4-773.sb.tex



```
# qs: W=0.77061
# qs: Wt=0.385305
# qs: Wc=0.385305
# qs: Wh=0.385318
# qs: Wv=0.385293
# qs: factor esb=0.999967
# qs: factor y=1.00003
# qs: W mínima del esquema=0.77061
```

1.2. Soluciones M=6

solM6-807.sb.tex

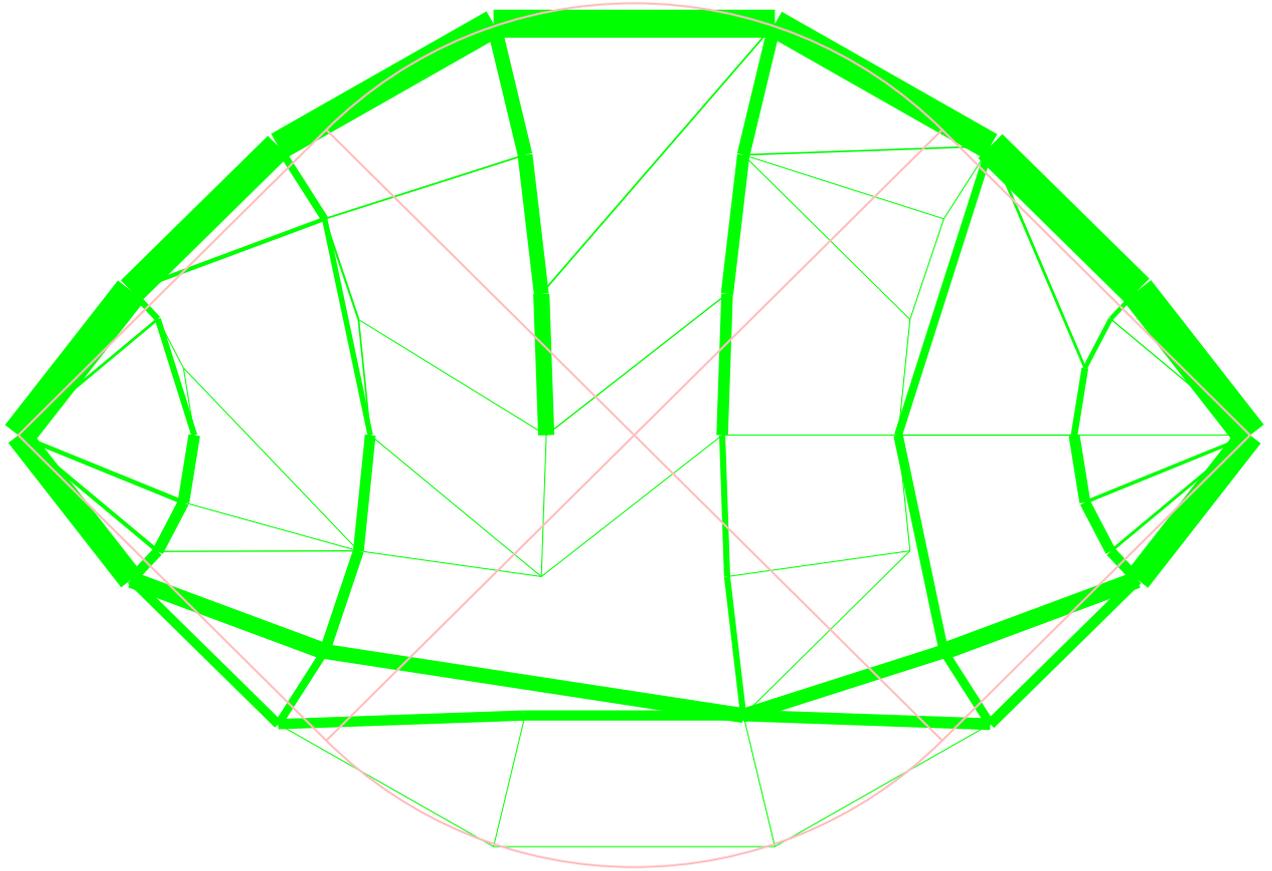


$$\phi = 0.835442$$

```
# qs: W=0.835442
# qs: Wt=0.417721
# qs: Wc=0.417721
# qs: Wh=0.311202
# qs: Wv=0.52424
# qs: factor esb=1.29791
# qs: factor y=0.770471
# qs: W mínima del esquema=0.807823
```

1.3. Soluciones M=7

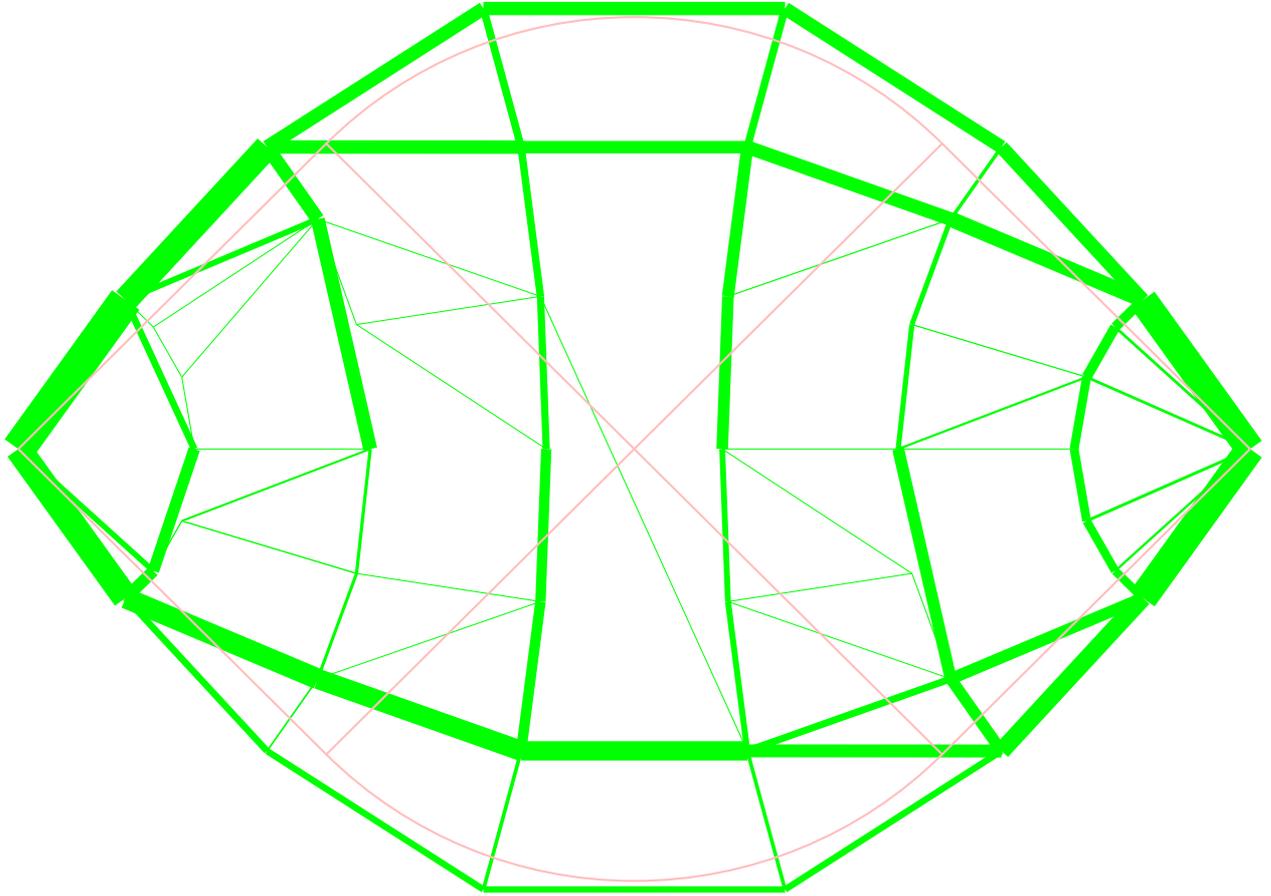
solM7-814.sb.tex



$$\phi = 0.817259$$

```
# qs: W=0.817259
# qs: Wt=0.40863
# qs: Wc=0.40863
# qs: Wh=0.439824
# qs: Wv=0.377435
# qs: factor esb=0.926363
# qs: factor y=1.07949
# qs: W mínima del esquema=0.814874
```

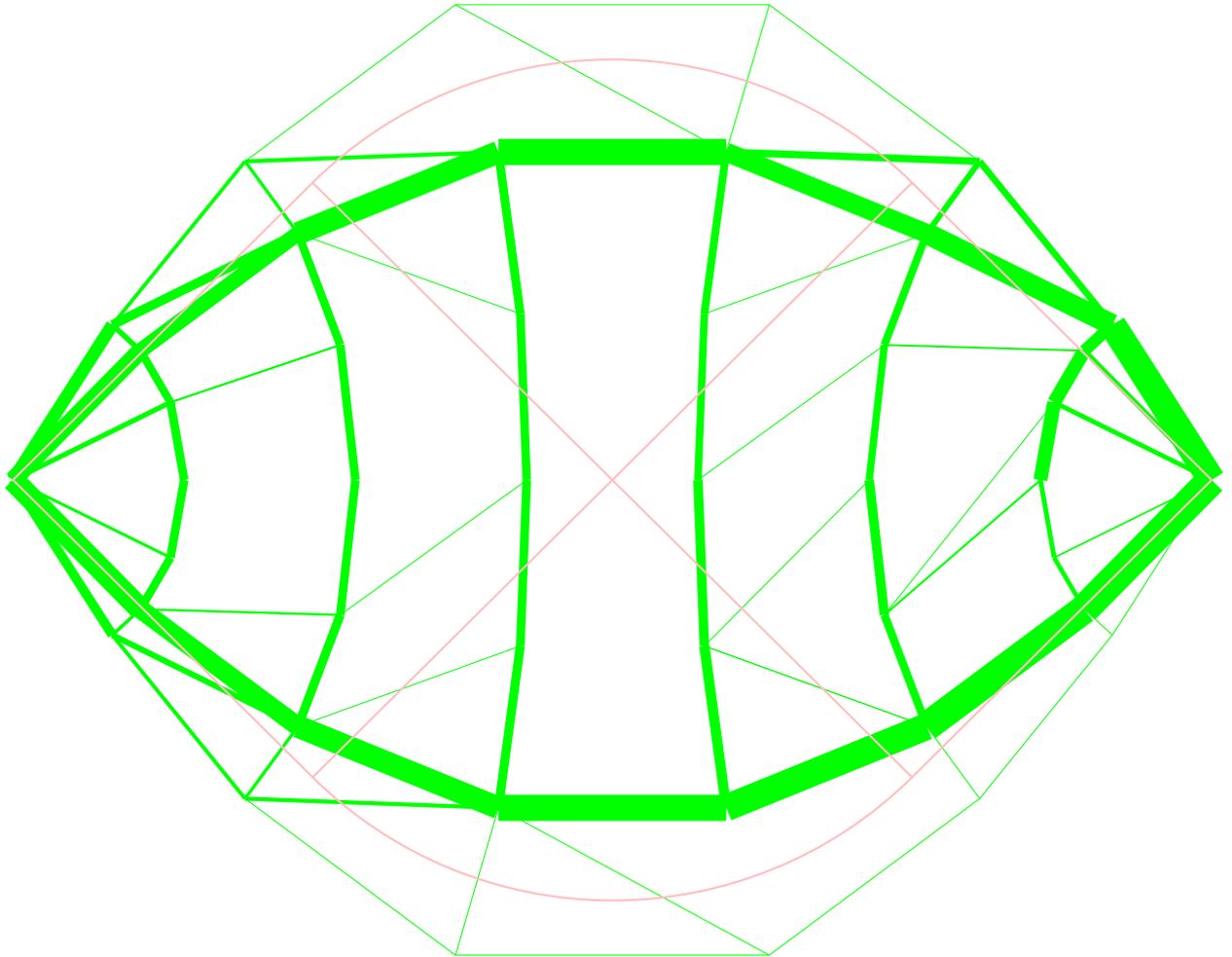
solM7-805.sb.tex



$$\phi = 0.807406$$

```
# qs: W=0.807406
# qs: Wt=0.403703
# qs: Wc=0.403703
# qs: Wh=0.429994
# qs: Wv=0.377413
# qs: factor esb=0.936865
# qs: factor y=1.06739
# qs: W mínima del esquema=0.805692
```

solM7-797.sb.tex



$$\phi = 0.803668$$

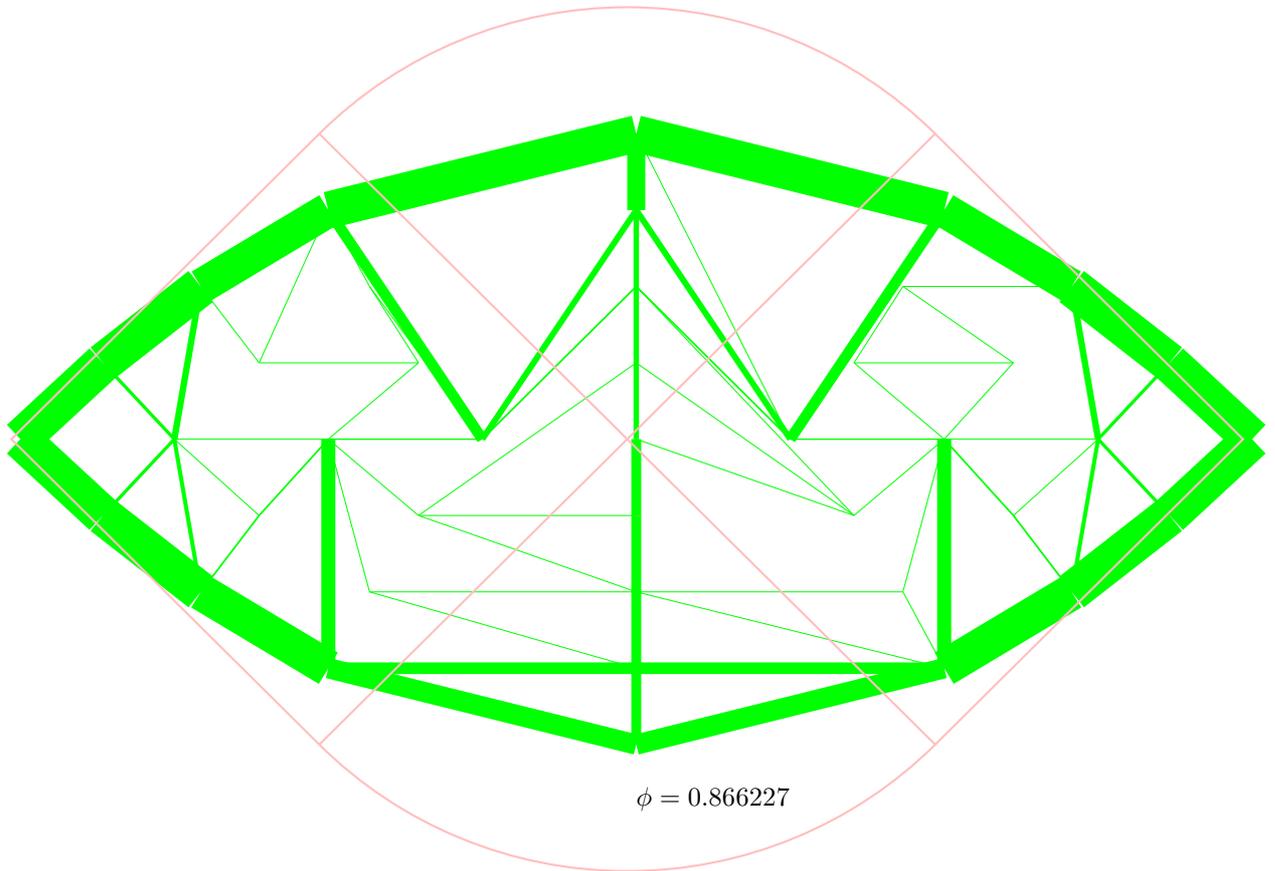
```

solucion: # qs: parabolos; N=44, E=85
# qs: (M=7 C=3 esb=1.221254 yfactor=1.0478)
# qs: W=0.803668
# qs: Wt=0.401834
# qs: Wc=0.401834
# qs: Wh=0.450674
# qs: Wv=0.352994
# qs: factor esb=0.885018
# qs: factor y=1.12992
# qs: W minima del esquema=0.79771

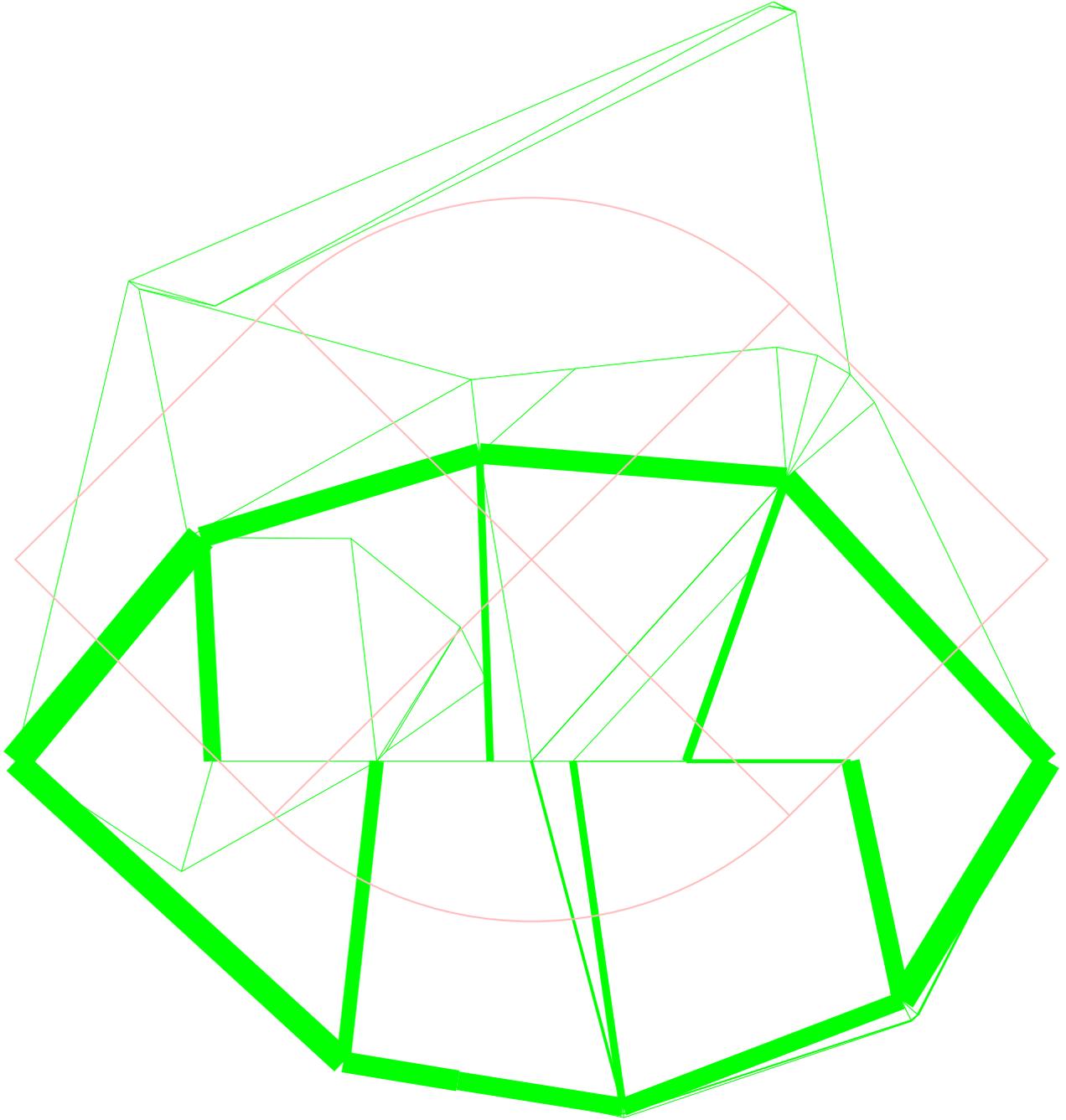
```

1.4. Soluciones M=8

solM8-866.sb.tex



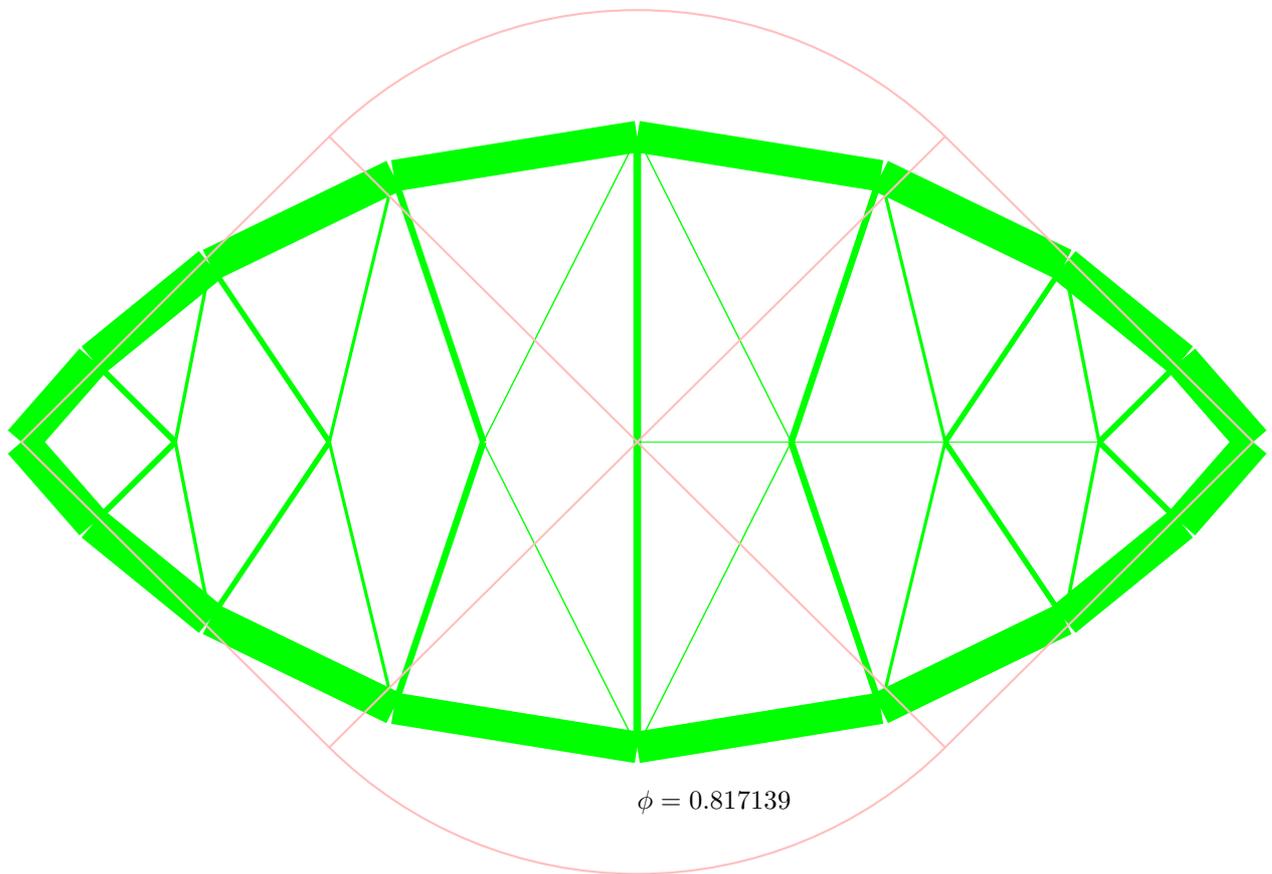
solM8-823.sb.tex



```
# qs: W=0.824484
# qs: Wt=0.412242
# qs: Wc=0.412242
# qs: Wh=0.389015
# qs: Wv=0.435469
# qs: factor esb=1.05802
# qs: factor y=0.945159
# qs: W mínima del esquema=0.823174
```

$$\phi = 0.824484$$

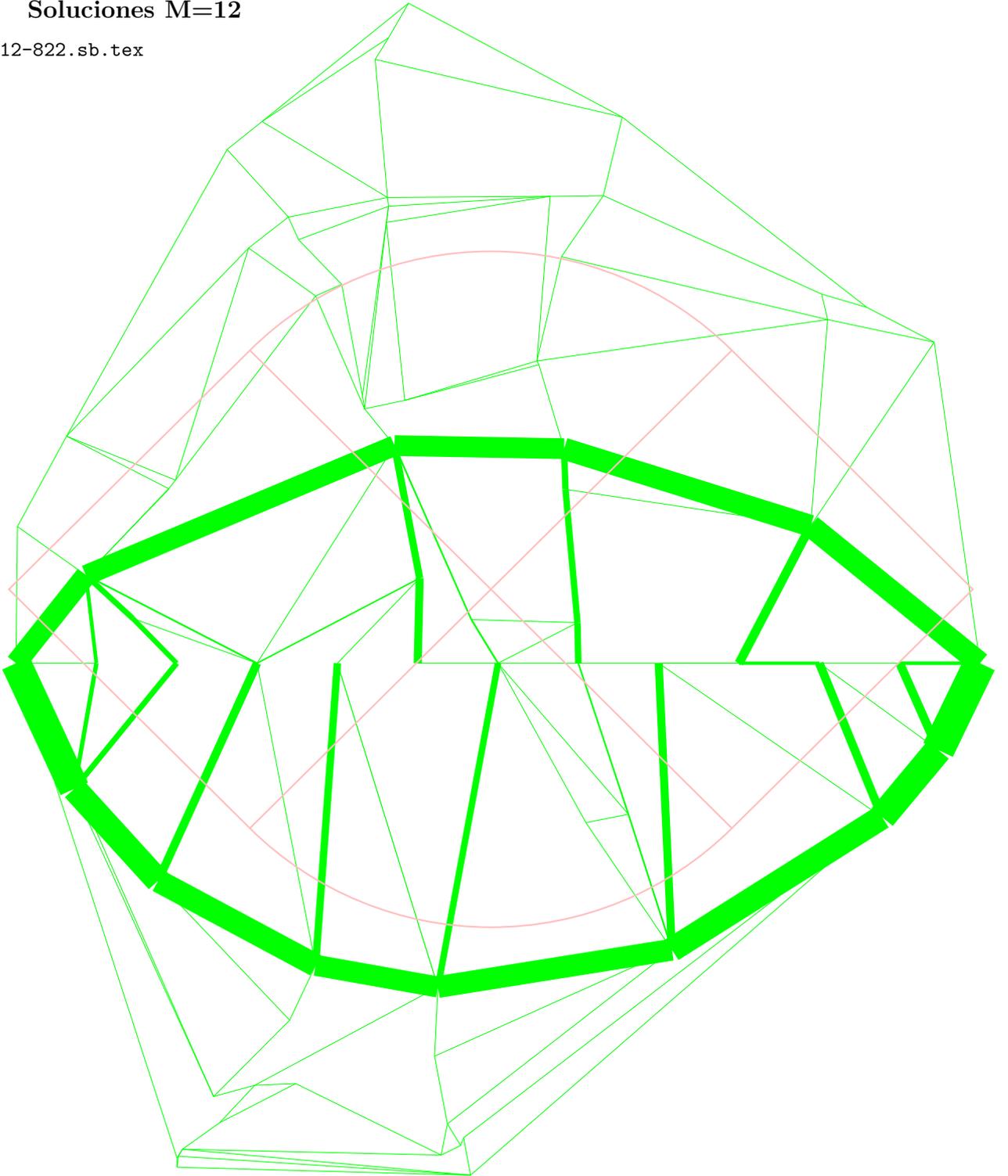
solM8-794.sb.tex



```
# qs: W=0.817139
# qs: Wt=0.40857
# qs: Wc=0.40857
# qs: Wh=0.504894
# qs: Wv=0.312246
# qs: factor esb=0.786408
# qs: factor y=1.2716
# qs: W mínima del esquema=0.794106
```

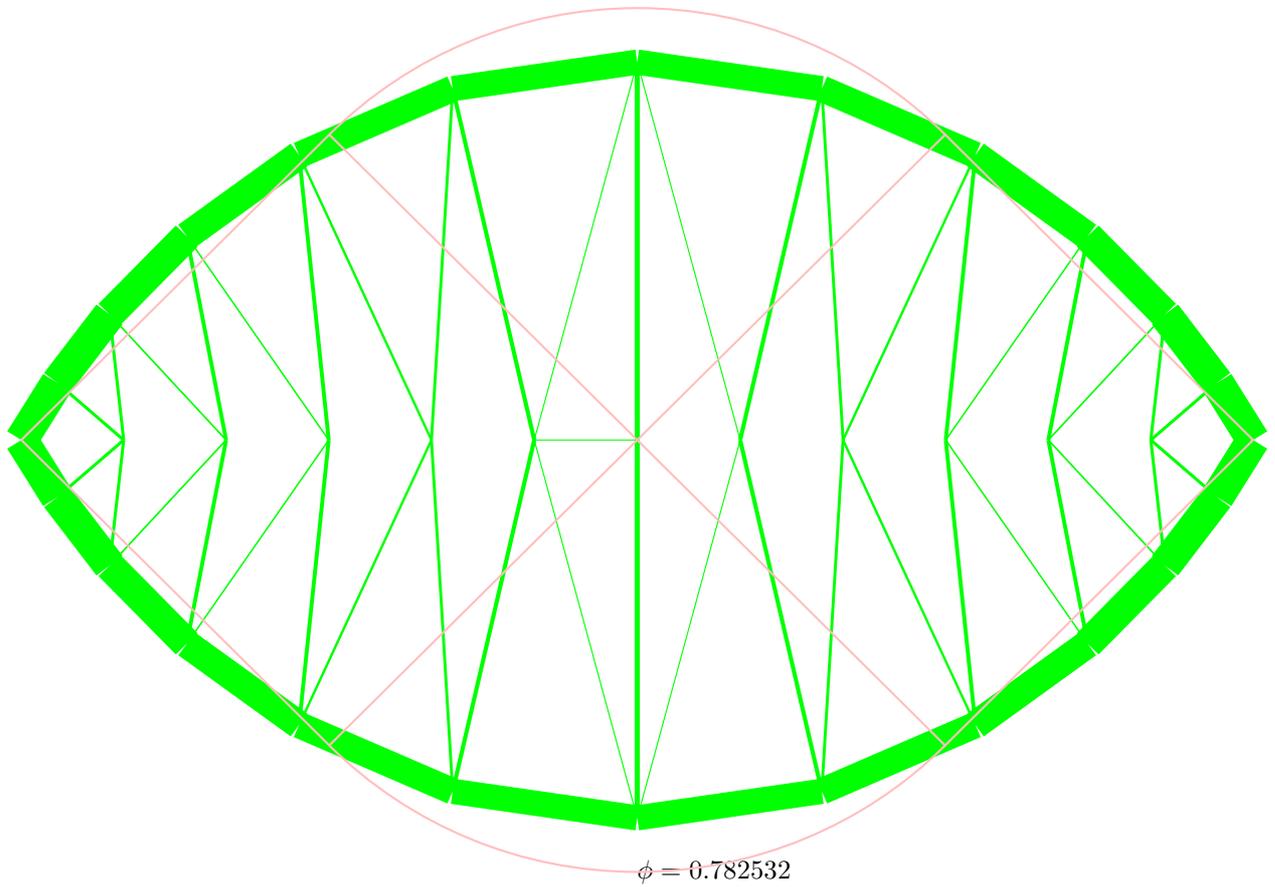
1.5. Soluciones $M=12$

solM12-822.sb.tex



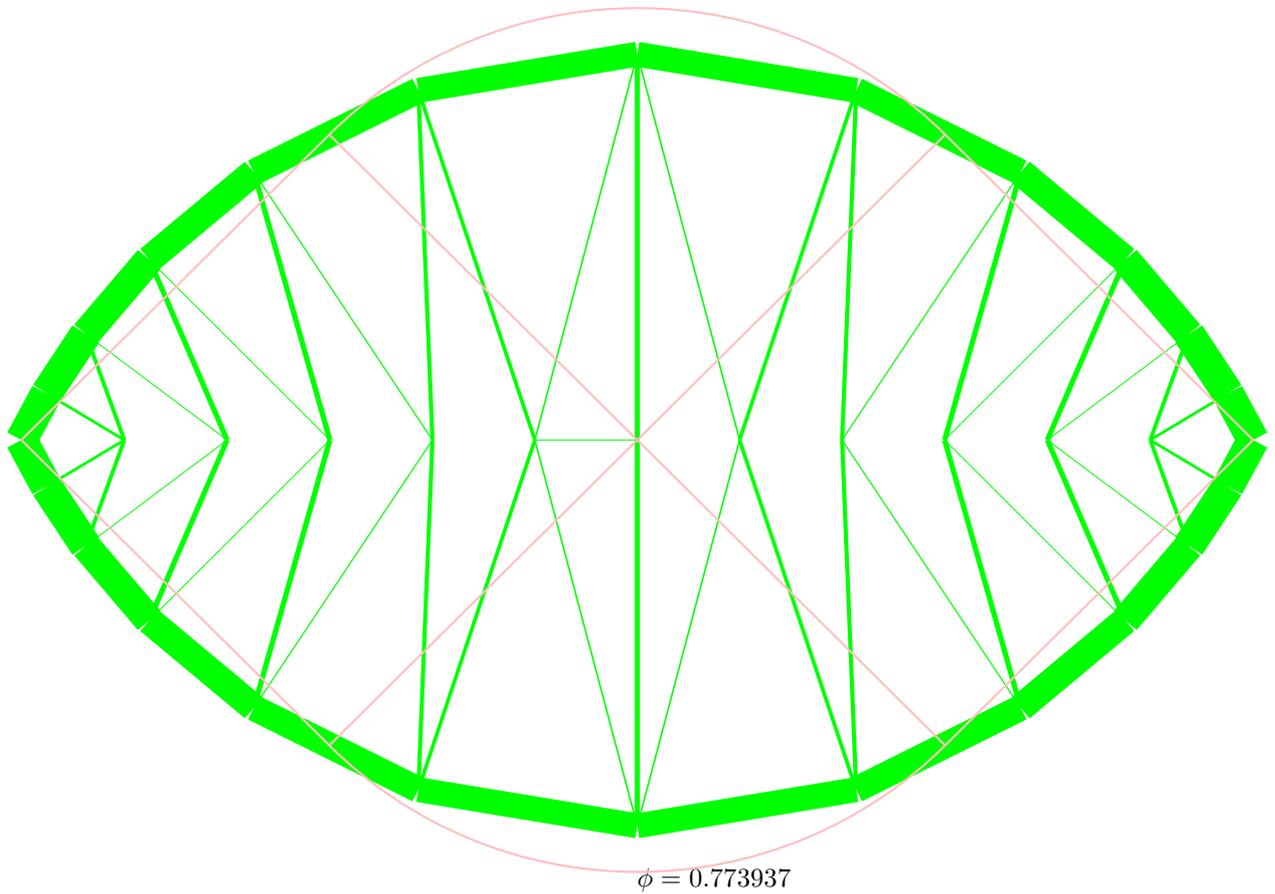
$$\phi = 0.822709$$

solM12-782.sb.tex



```
# qs: W=0.782532
# qs: Wt=0.391266
# qs: Wc=0.391266
# qs: Wh=0.395662
# qs: Wv=0.386871
# qs: factor esb=0.988828
# qs: factor y=1.0113
# qs: W mínima del esquema=0.782483
```

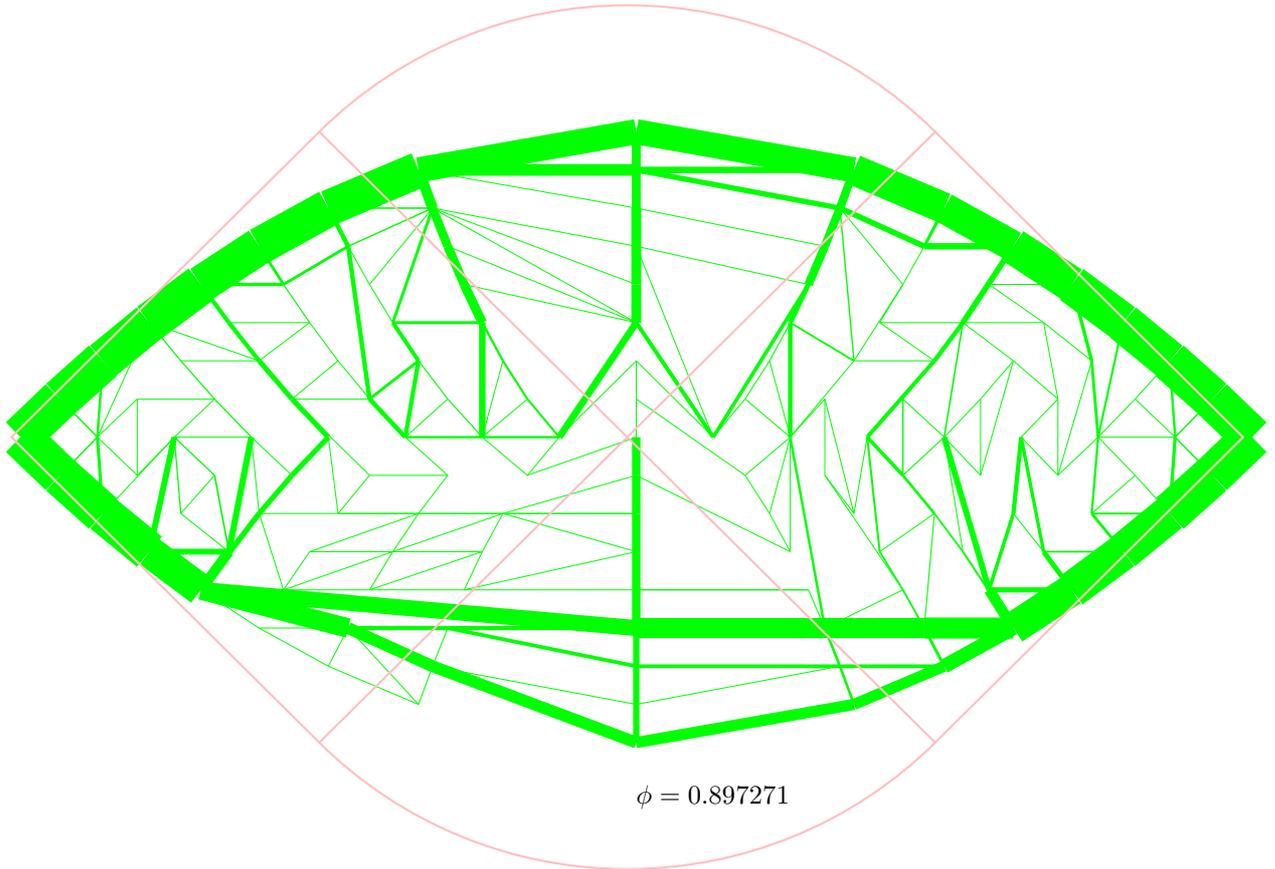
solM12-773.sb.tex



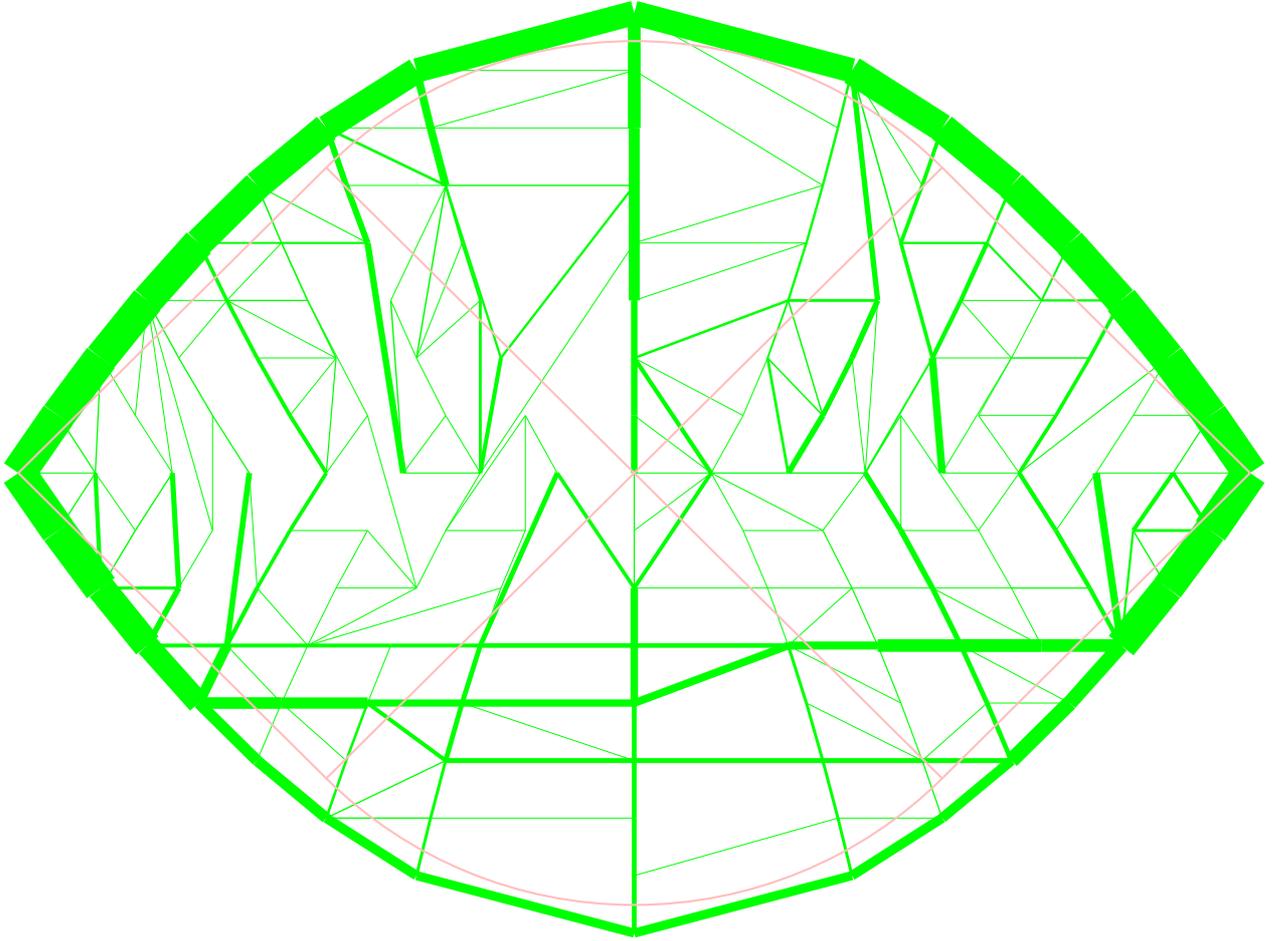
```
# qs: W=0.773937
# qs: Wt=0.386969
# qs: Wc=0.386969
# qs: Wh=0.386958
# qs: Wv=0.38698
# qs: factor esb=1.00003
# qs: factor y=0.999972
# qs: W mínima del esquema=0.773937
```

1.6. Soluciones M=16

solM16-897.sb.tex

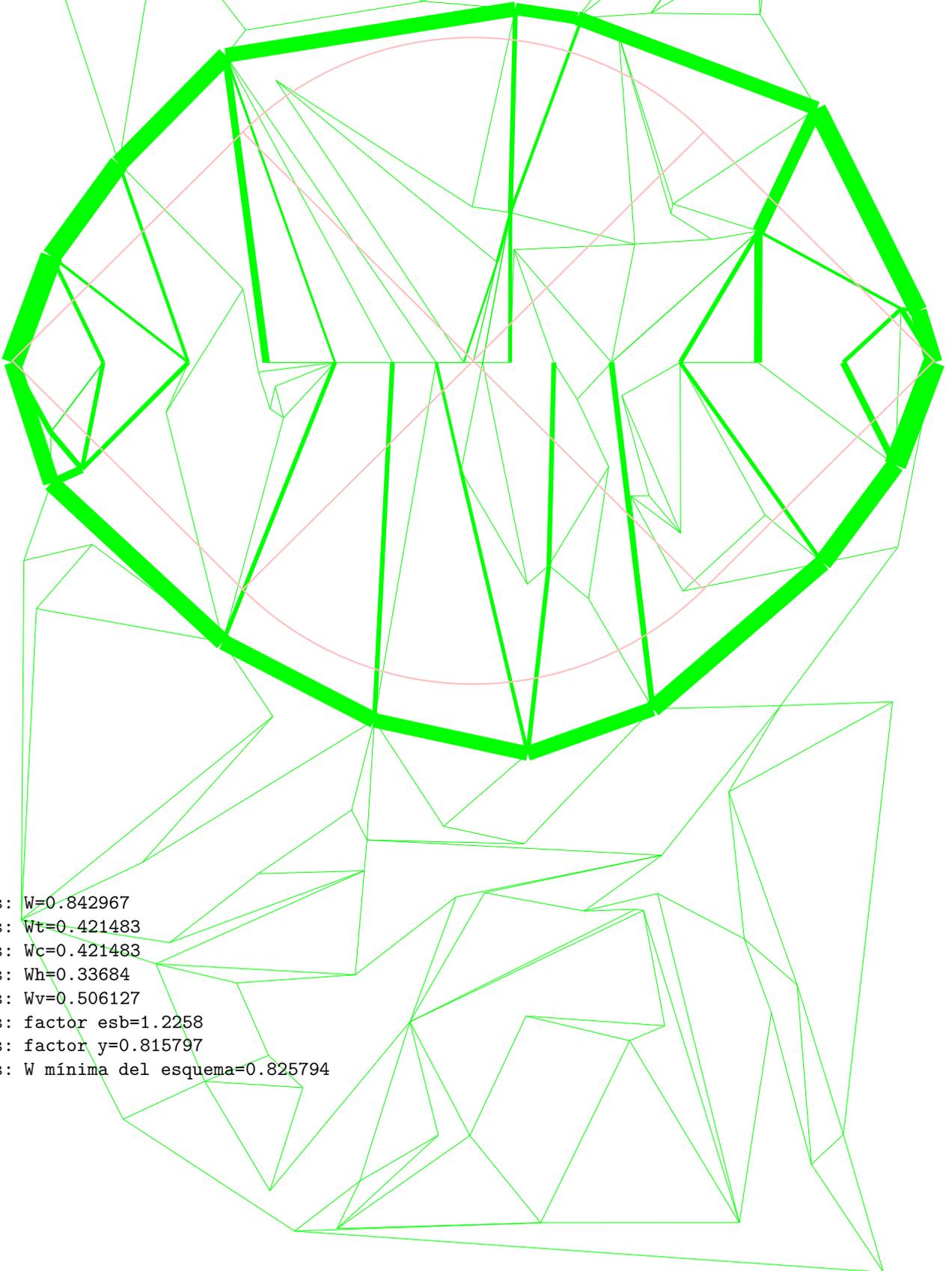


solM16-876.sb.tex



$$\phi = 0.876202$$

solM16-825.sb.tex

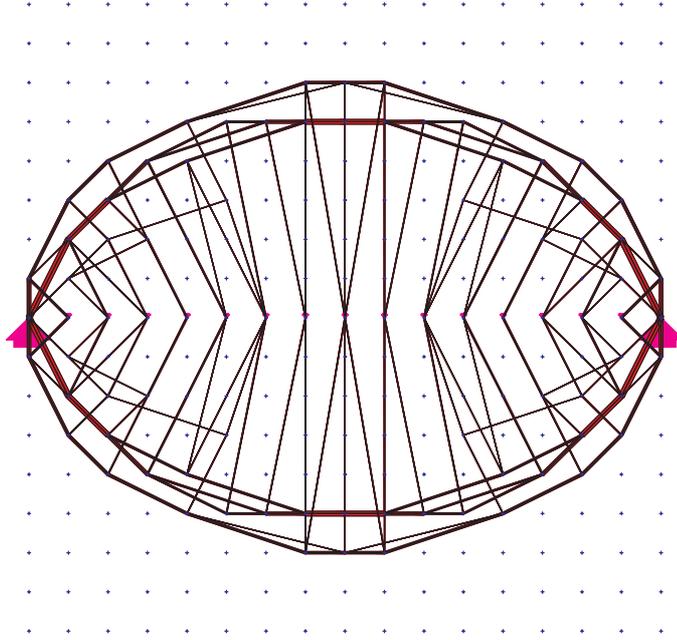


```
# qs: W=0.842967
# qs: Wt=0.421483
# qs: Wc=0.421483
# qs: Wh=0.33684
# qs: Wv=0.506127
# qs: factor esb=1.2258
# qs: factor y=0.815797
# qs: W mínima del esquema=0.825794
```

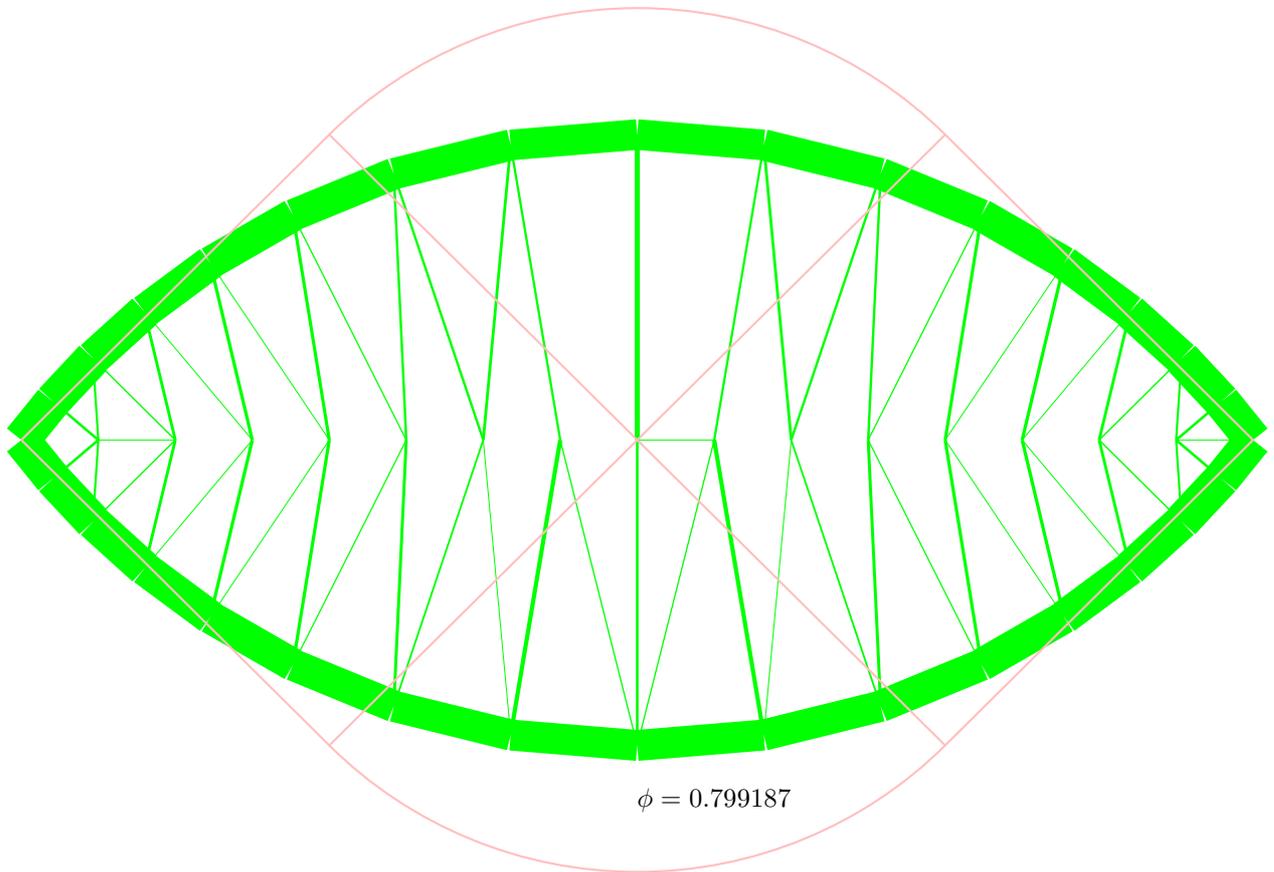
$$\phi = 0.842967$$

solM16-782.lp.tex

$$V=7.8240061$$

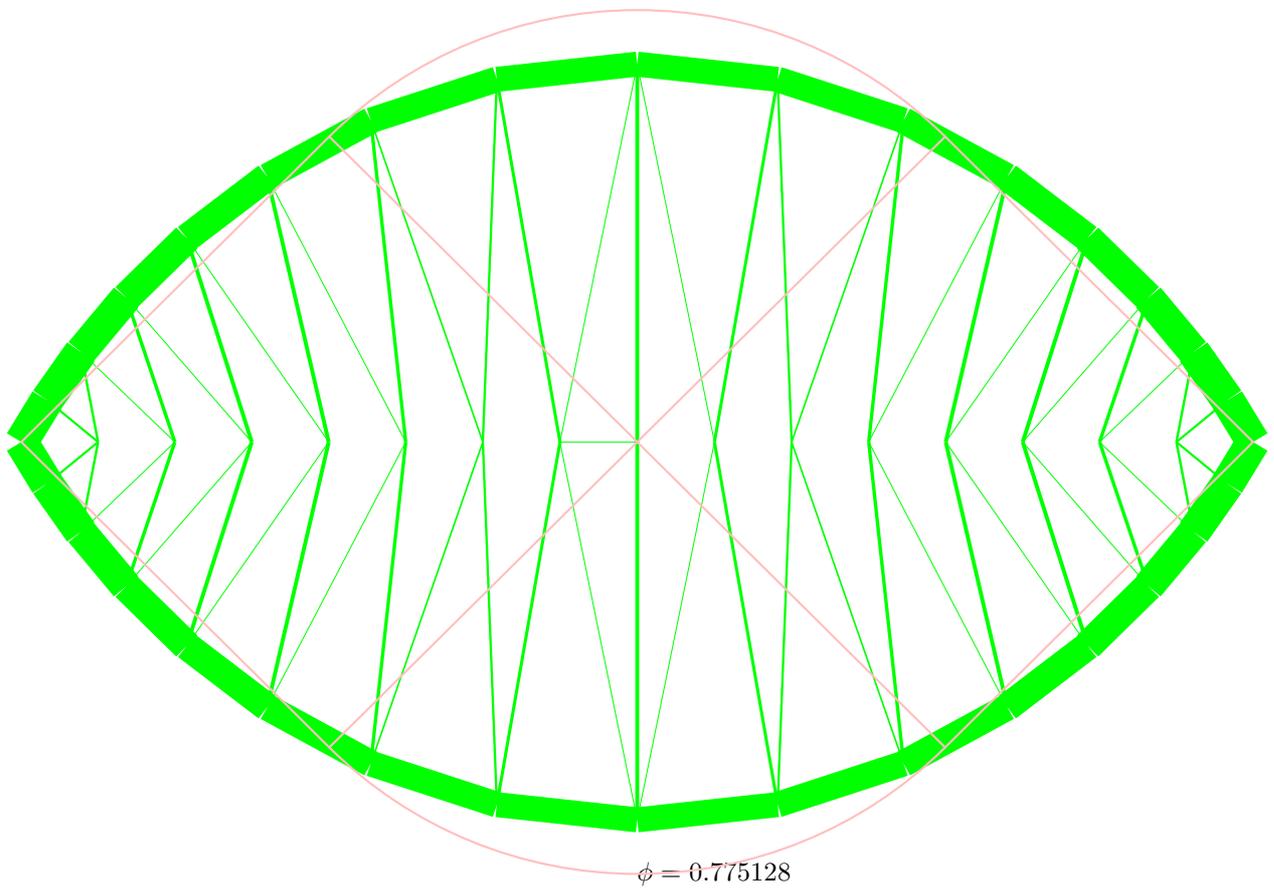


solM16-781.sb.tex



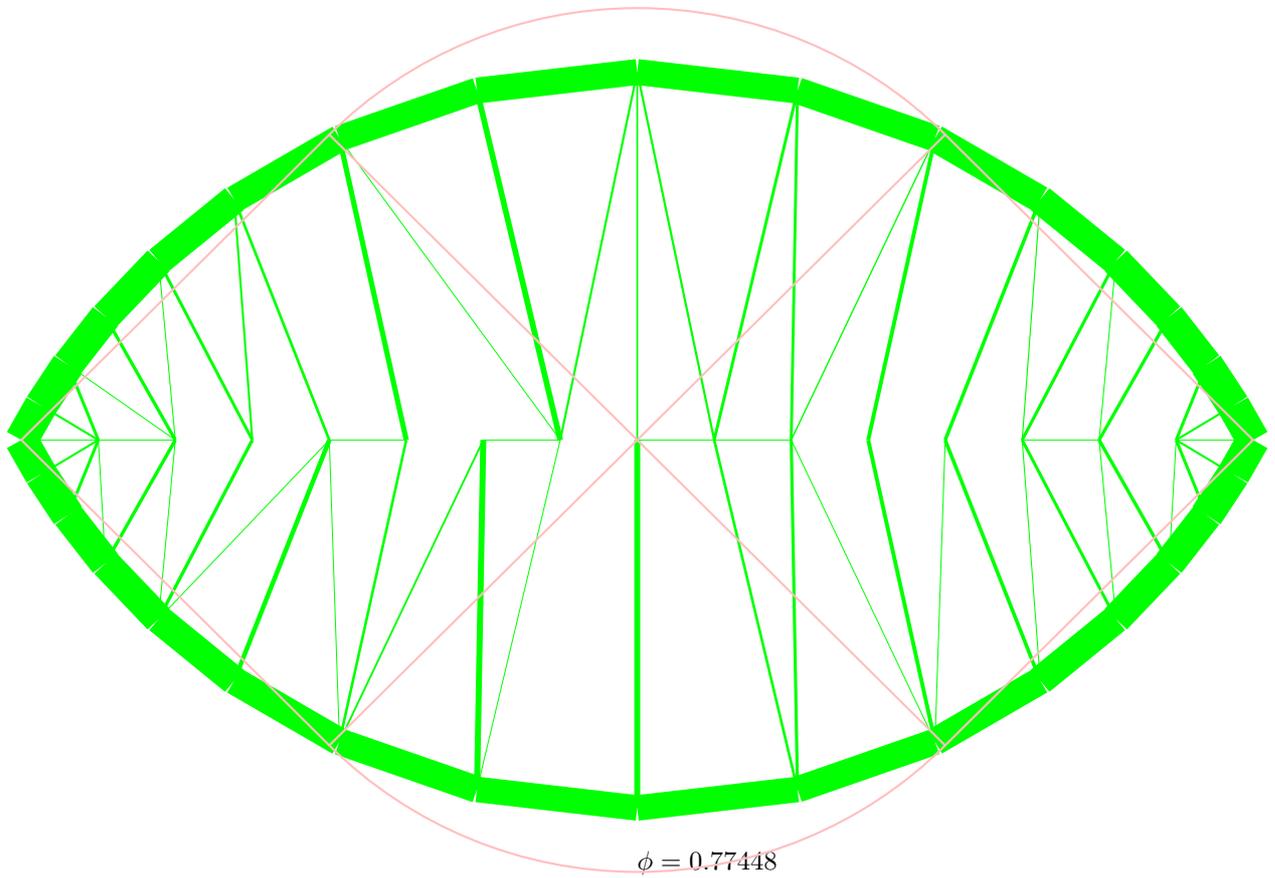
```
# qs: W=0.799187
# qs: Wt=0.399594
# qs: Wc=0.399594
# qs: Wh=0.482398
# qs: Wv=0.31679
# qs: factor esb=0.810369
# qs: factor y=1.23401
# qs: W minima del esquema=0.78184
```

solM16-775.sb.tex



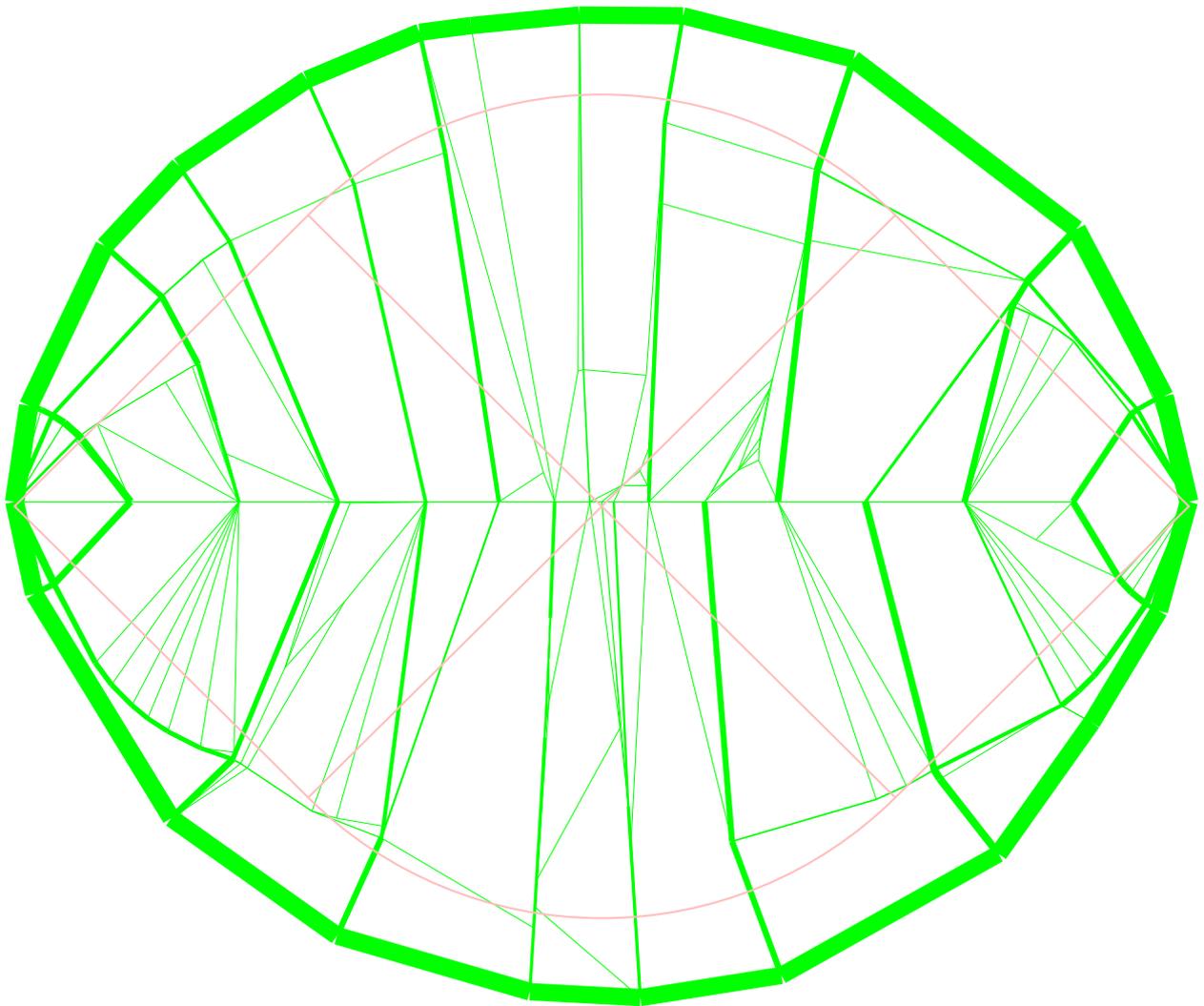
```
# qs: W=0.775128
# qs: Wt=0.387564
# qs: Wc=0.387564
# qs: Wh=0.387554
# qs: Wv=0.387574
# qs: factor esb=1.00003
# qs: factor y=0.999974
# qs: W mínima del esquema=0.775128
```

solM16-774.sb.tex



```
# qs: W=0.77448
# qs: Wt=0.38724
# qs: Wc=0.38724
# qs: Wh=0.400195
# qs: Wv=0.374285
# qs: factor esb=0.967087
# qs: factor y=1.03403
# qs: W mínima del esquema=0.774046
```

solM16-772.sb.tex

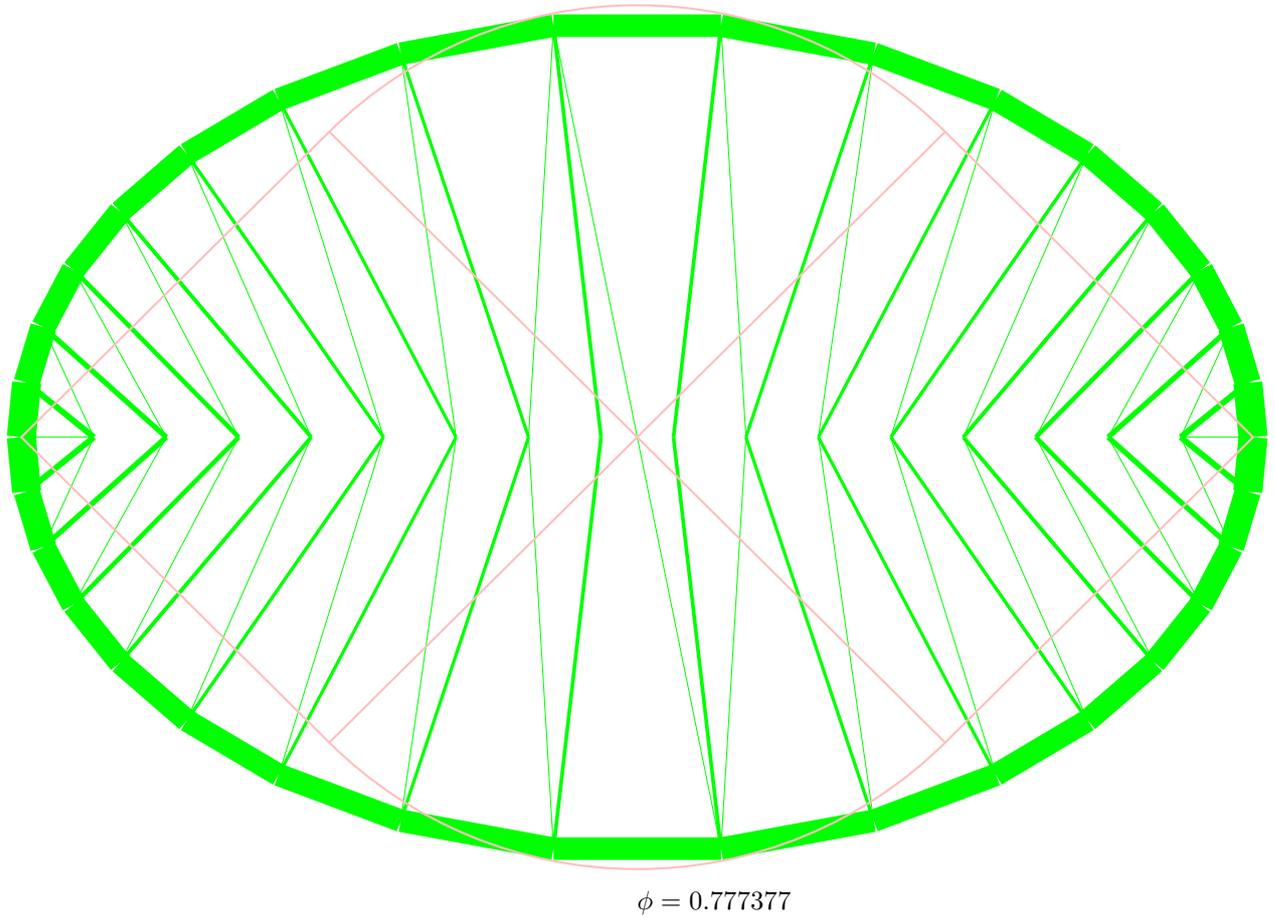


$$\phi = 0.789432$$

```
# qs: W=0.789432
# qs: Wt=0.394716
# qs: Wc=0.394716
# qs: Wh=0.3131
# qs: Wv=0.476332
# qs: factor esb=1.23343
# qs: factor y=0.810749
# qs: W mínima del esquema=0.772372
```

1.7. Soluciones M=17

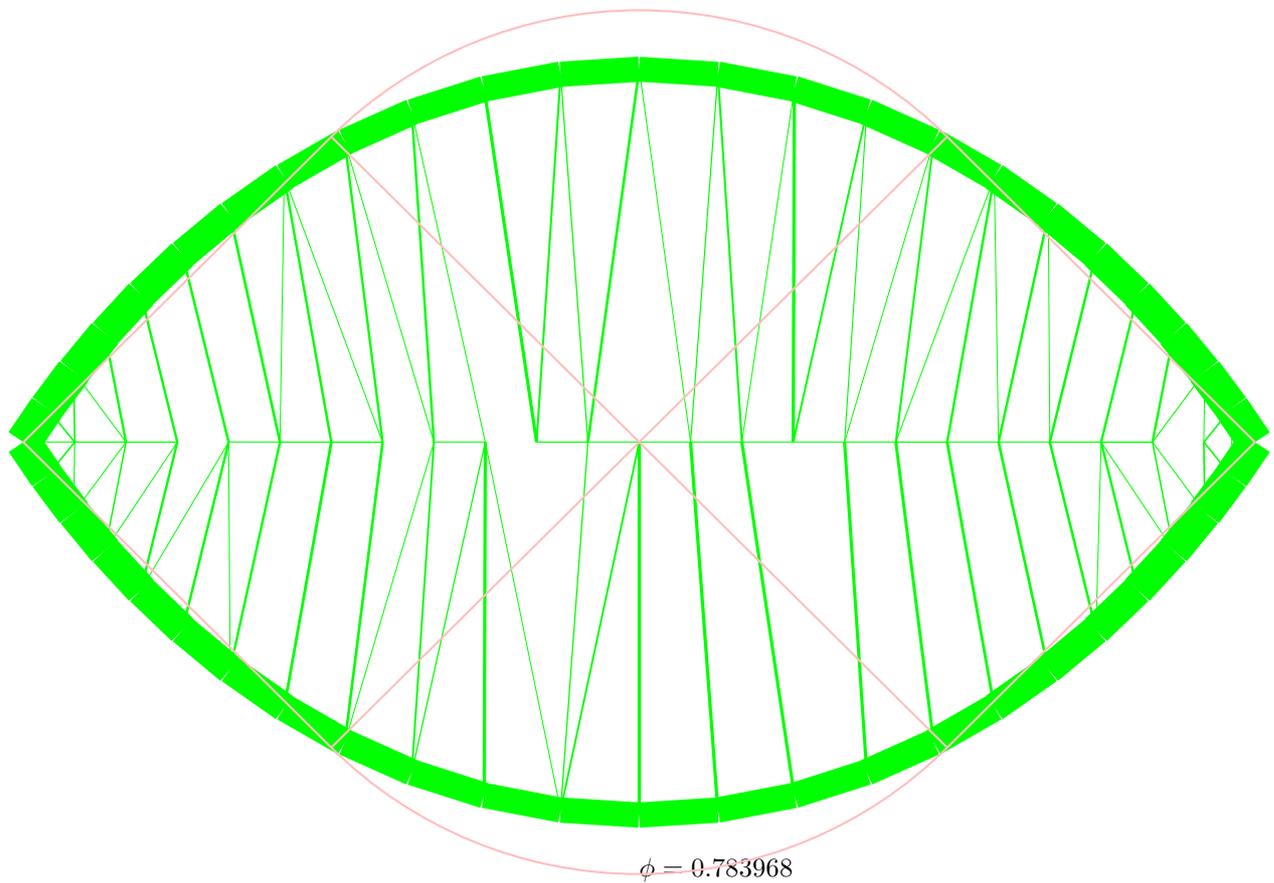
solM17-777.sb.tex



```
# qs: W=0.777377
# qs: Wt=0.388689
# qs: Wc=0.388688
# qs: Wh=0.388687
# qs: Wv=0.38869
# qs: factor esb=1
# qs: factor y=0.999996
# qs: W mínima del esquema=0.777377
```

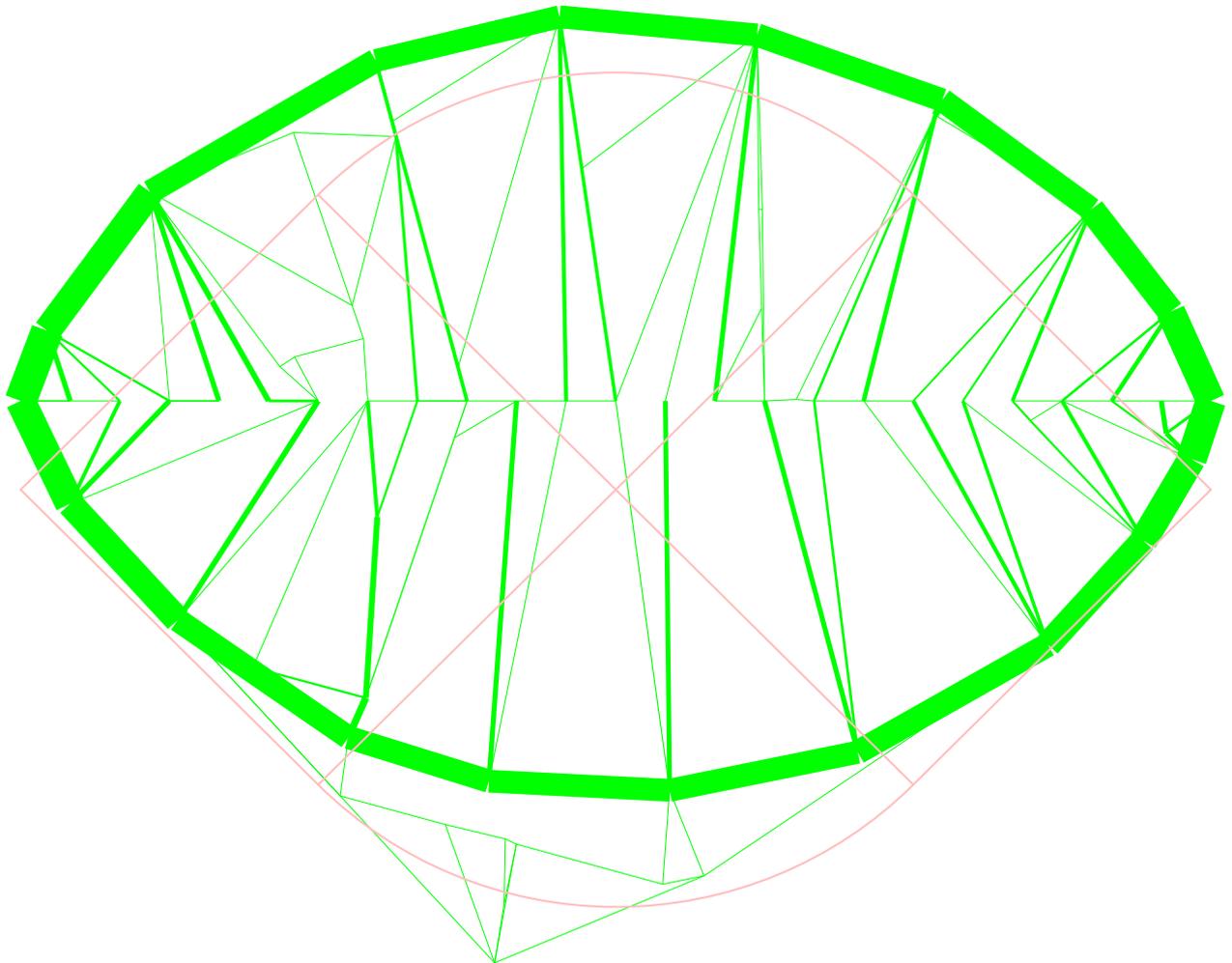
1.8. Soluciones M=24

solM24-783.sb.tex



```
# qs: circunferencias y sus radios; N=71, E=139
# qs: (M=24 C=5 esb=2.17 yfactor=1.32482)
# qs: recocado estándar
# qs: W=0.783968
# qs: Wt=0.391984
# qs: Wc=0.391984
# qs: Wh=0.393622
# qs: Wv=0.390346
# qs: factor esb=0.995829
# qs: factor y=1.00419
# qs: W mínima del esquema=0.783961
```

solM24-777.sb.tex



$$\phi = 0.777637$$

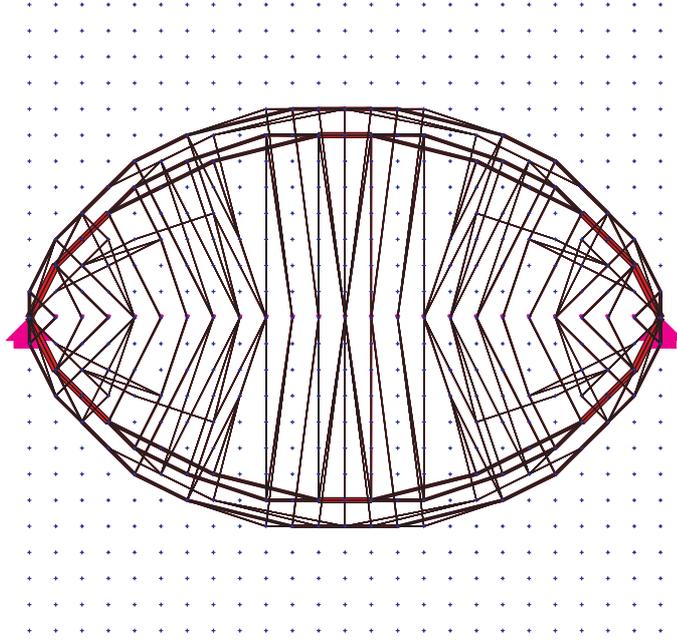
```

# qs: circunferencias y sus radios; N=71, E=139
# qs: (M=24 C=5 esb=2.17 yfactor=1.32482)
Fr/Fi=.01; theta = .95; alfa = 80; # qs: recocado
generador = { 0, -1, 10, -1 }; ilg= .01; # qs: gen gb
# qs: W=0.777637
# qs: Wt=0.388819
# qs: Wc=0.388819
# qs: Wh=0.378779
# qs: Wv=0.398858
# qs: factor esb=1.02616
# qs: factor y=0.974504
# qs: W minima del esquema=0.777378

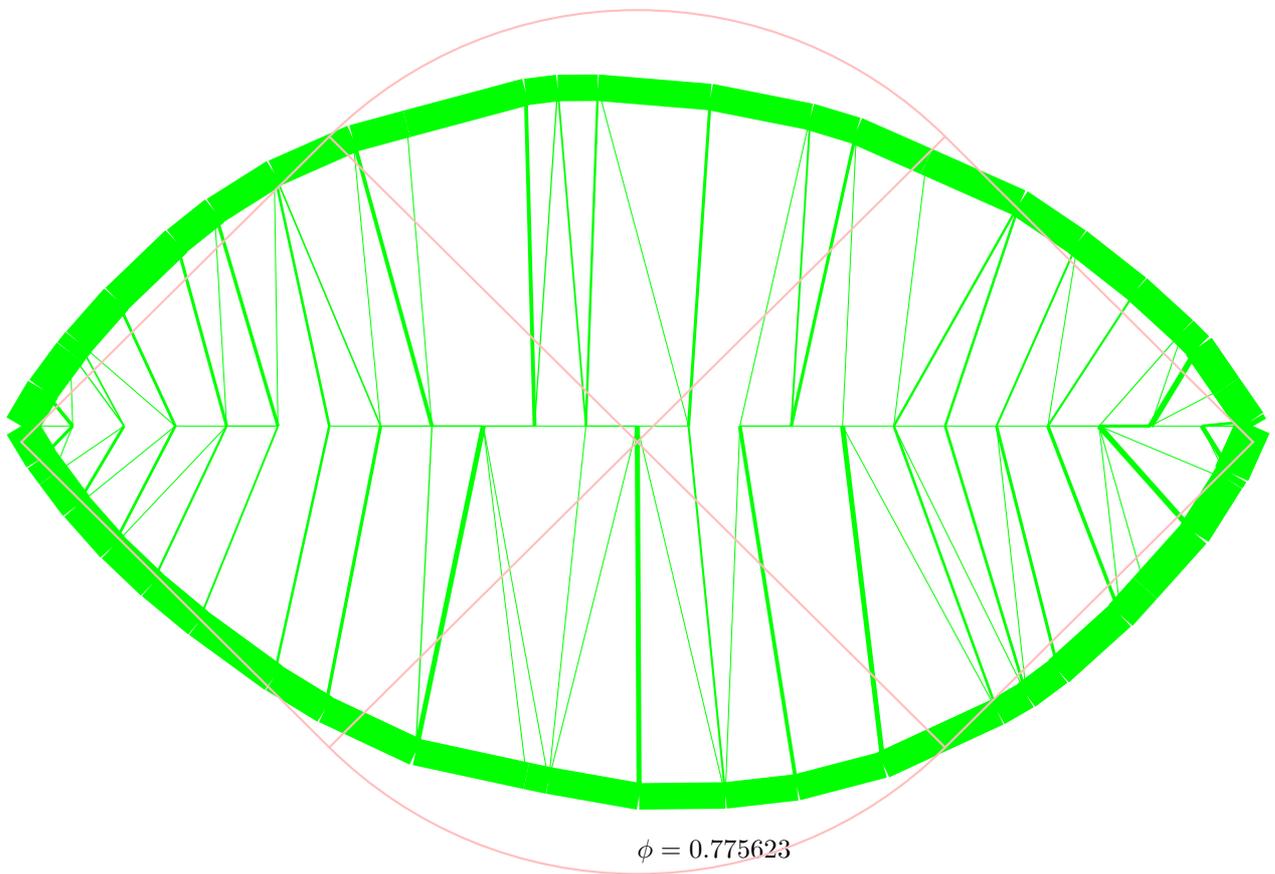
```

solM24-775.lp.tex

$$V=7.7595907$$

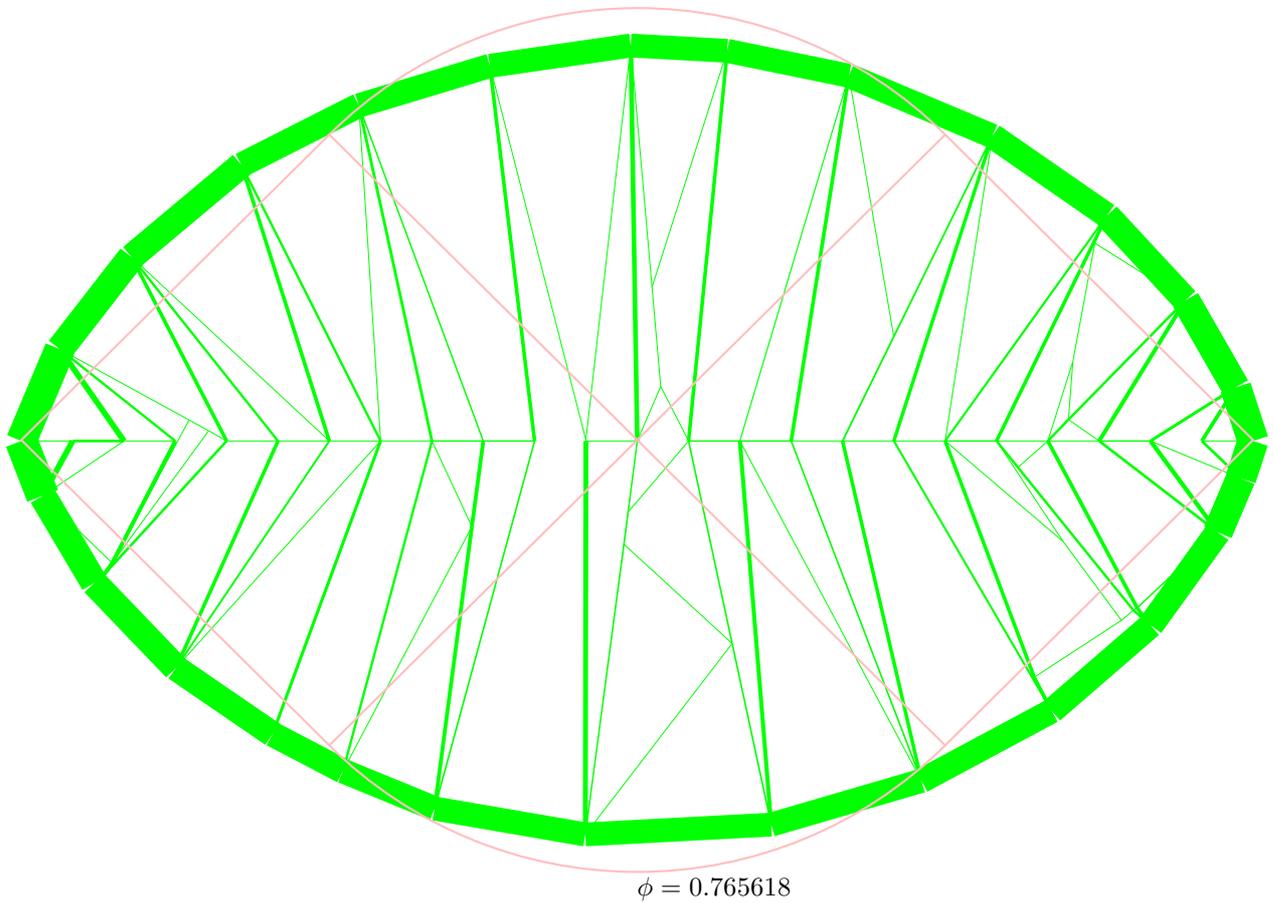


solM24-773.sb.tex



```
# qs: recocado lentísimo
# qs: gen g
# qs: W=0.775623
# qs: Wt=0.387812
# qs: Wc=0.387812
# qs: Wh=0.415024
# qs: Wv=0.3606
# qs: factor esb=0.932129
# qs: factor y=1.07281
# qs: W mínima del esquema=0.773712
```

solM24-765.sb.tex

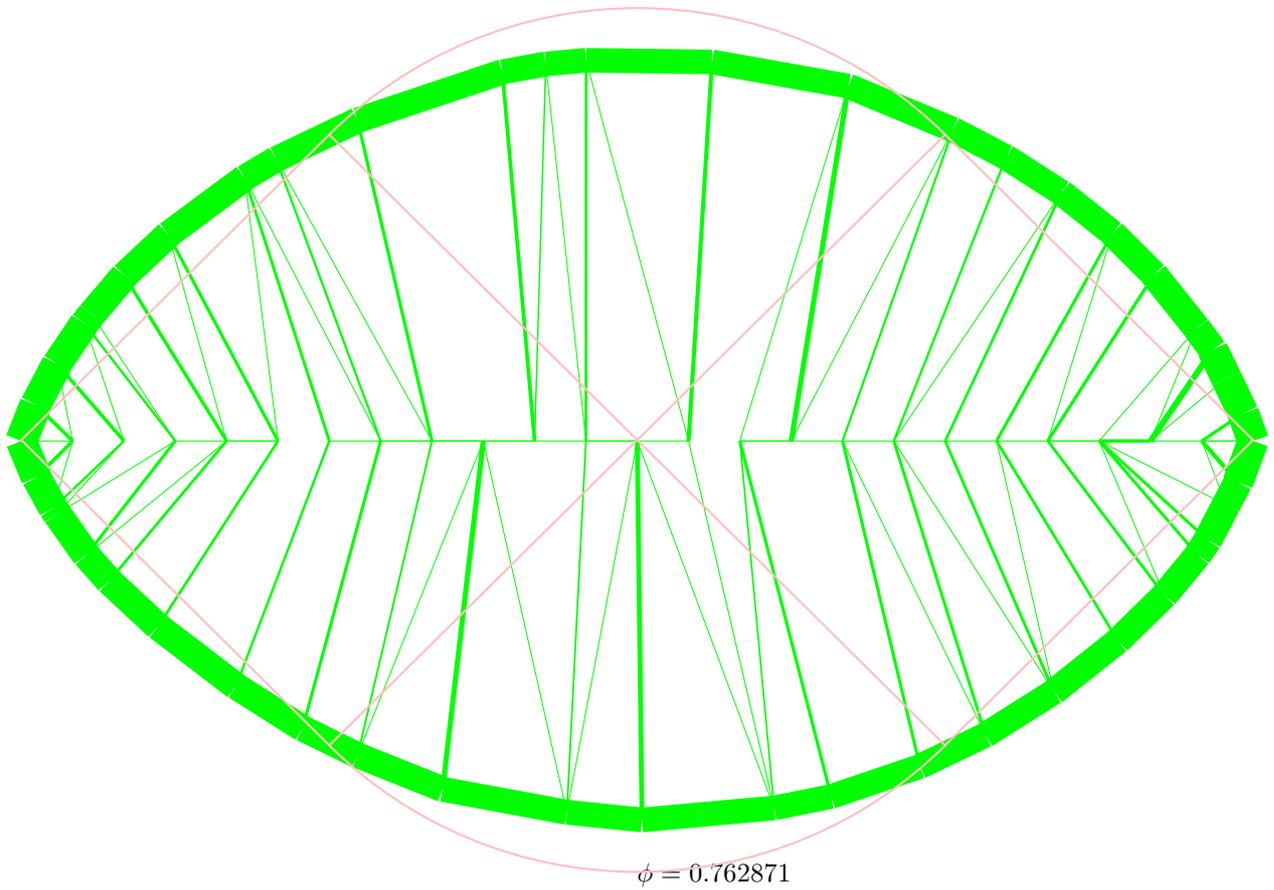


```

# qs: circunferencias y sus radios; N=71, E=139
# qs: (M=24 C=5 esb=2.17 yfactor=1.32482)
Fr/Fi=.001; theta = .95; alfa = 80; # qs: recocido
generador = { 0, -2, 10, -1 }; ilg= .01; # qs: gen gb
# qs: W=0.765618
# qs: Wt=0.382809
# qs: Wc=0.382809
# qs: Wh=0.378367
# qs: Wv=0.387251
# qs: factor esb=1.01167
# qs: factor y=0.988462
# qs: W minima del esquema=0.765567

```

solM24-762.sb.tex

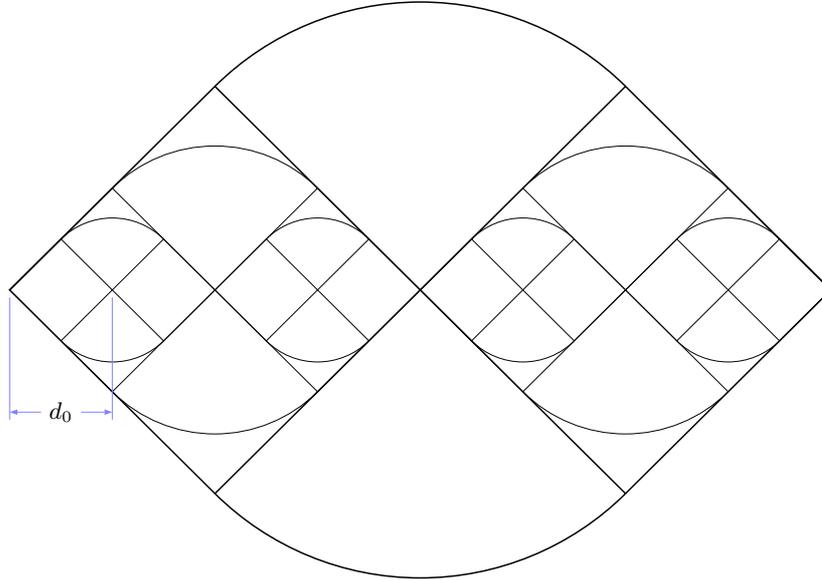


```
# qs: recocado lentísimo
# qs: gen g
# qs: W=0.762871
# qs: Wt=0.381436
# qs: Wc=0.381436
# qs: Wh=0.390359
# qs: Wv=0.372512
# qs: factor esb=0.976873
# qs: factor y=1.02367
# qs: W mínima del esquema=0.762663
```

2. Esquemas

Ninguno de los siguientes esquemas cumple con el teorema de Michell. (Obviamente, de lo contrario este documento no existiría. . .). Pero, salvo el *divertimento* recursivo con Michell-1, todos son haces ortogonales que pueden extenderse a todo el espacio (si se admite una línea de fortísima discontinuidad a lo largo del eje x , en alguno de ellos).

2.1. Un esquema recursivo con “Michell-1”



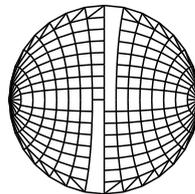
M	4	8	16	∞
$W \div 1.29pL^2$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	1
$W \div 1.29pL(L - d_0)$	1	1	1	1

En este ejemplo se ve como, para valores pequeños de M , la distancia d_0 es grande, lo que contribuye a reducir en apariencia la cantidad de estructura. Pero, en realidad, tan sólo una carga $p(L - d_0)$ es equilibrada por la estructura. Cuando $M \rightarrow \infty$ la cosa vuelve a su ser. . .

2.2. Elipses L

El haz principal son elipses que pasan por los puntos de apoyo, y el ortogonal curvas logarítmicas. (Curvas VÁZQUEZ & VÁZQUEZ, V&V, por brevedad). V. p.23, por ejemplo.

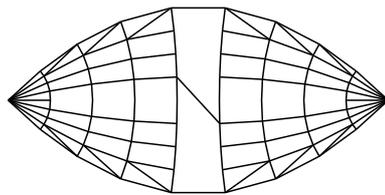
$$y = b\sqrt{1 - x^2} \quad y = \sqrt{\log(x/a)^2 + (a^2 - x^2)}$$



2.3. Parábolas L

El haz principal son parábolas que pasan por los puntos de apoyo, y el ortogonal curvas logarítmicas. V. pp. 6-7, por ejemplo.

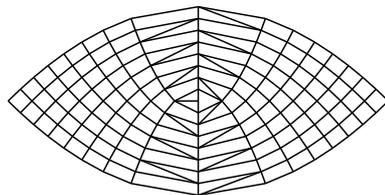
$$y = h(1 - x^2) \quad y = \sqrt{\log(x/x_0) + \frac{1}{2}(x_0^2 - x^2)}$$



2.4. Parábolas auto-ortogonales

Ambos haces son el mismo, parábolas “concéntricas” de esbeltez 2. V. pp.15, 16, por ejemplo.

$$y = y_0 \left(1 - \frac{x^2}{4y_0^2}\right) \quad y = x \cdot \sinh \left(\frac{\text{abs}(x) \log \text{abs}(x/x_0)}{x}\right)$$



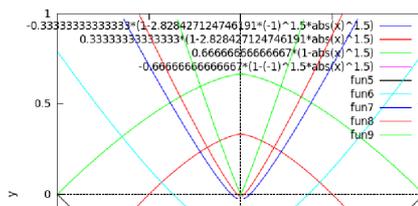
La segunda expresión es igual a la primera si $y_0 = -x_0/2$, al menos numéricamente. Entonces:

$$y = \frac{\alpha_0}{2} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right) \quad y = -\frac{\beta_0}{2} \left(1 - \frac{x^2}{\beta^2}\right)$$

¿Cabe generalizar este haz para que pueda adaptarse a cualquier esbeltez? Sí.¹

2.5. Parábolas generalizadas y erf's

$$x f_{xx} = f_x(1 - \lambda) \quad -x g_x g_{xx} = (1 - \lambda)$$



Las parábolas en $x \geq 0, y_0 \geq 0$:

$$f(x, y_0, \lambda) = y_0 \left[1 - \left(\frac{x}{\lambda y_0}\right)^\lambda\right] \quad f_x(\lambda y_0, y_0, \lambda) = -1$$

Las curvas ortogonales a las parabolos en $y \geq 0, \lambda > 1$:

$$g^0(x, b, \lambda) = \sqrt{2}\sqrt{\lambda-1} \left[x\sqrt{\log(x)+b} - \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \exp(-b) \operatorname{erfi} \left(\sqrt{\log(x)+b}\right) \right]$$

El punto de corte con el eje x , $(x_0, 0)$, debe ajustarse de manera que allí $g_x = 1$:

$$g_x^0(x_0, b, \lambda) = 1 \quad \rightarrow \quad x_0 = \exp \left(-b + \frac{1}{2(\lambda-1)}\right)$$

¹Esta pregunta me la hice a la vista de una investigación paralela de JESÚS ORTIZ sobre haces generados con potenciales complejos, en la que la función “error”, $\operatorname{erf}(z)$, tenía un papel importante.

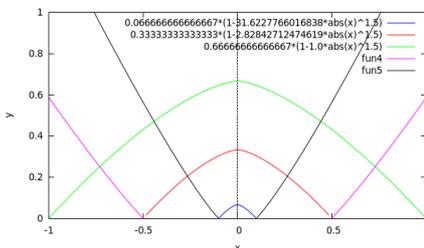
$$g^1(x, b, \lambda) = -g^0(x_0, b, \lambda) + g^0(x, b, \lambda)$$

Finalmente, la relación entre x_0 y b se deduce de $g^1(x_0, b, \lambda) = 0$:²

$$\sqrt{\log(x) + b} \cdot \sqrt{2\sqrt{\lambda - 1}} = 1$$

y el haz ortogonal es:

$$g(x, x_0, \lambda) = g^1\left(x, \frac{1}{2(\lambda - 1)} - \log(x_0), \lambda\right)$$

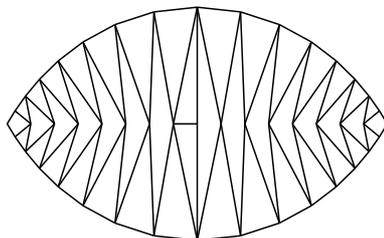


Falta probarlas y buscar la esbeltez óptima de la familia. (¡Tardará!)³

2.6. Arco de circunferencia y radios

El haz principal son dos familias de circunferencias concéntricas: los centros están por encima y por debajo del punto medio del eje horizontal (hay bastantes puentes con un trazado parecido). El haz ortogonal son las dos familias de radios. Para la estructura sólo se usan los dos arcos de circunferencias que abarcan a L ; y los radios que convengan según M . V. pp.19, 20, 21, por ejemplo.

$$(y + y_0)^2 + x^2 = R^2 \quad y = y_0\left(\frac{x}{x_0} - 1\right)$$



Se trata del trazado con el que es más fácil llegar a records para cada M —hasta ahora sólo es superado por trazados ‘caóticos’ y LP.

3. Algunas conclusiones

3.1. Condiciones necesarias y suficientes

ROZVANY (2011) afirma “For Michell trusses, the above conditions are necessary and sufficient for optimality. These problems being ‘self-adjoint’, the adjoint strains and real strains are linearly proportional.” Pero de la demostración original de MICHELL yo sólo soy capaz de ver que es una condición suficiente, pero no que sea una condición necesaria.⁴

El teorema λ , por el contrario, es una condición necesaria para el *bridge problem*, aunque no suficiente. Es decir, cualquier solución óptima para ese problema debe tener igual cantidad de estructura horizontal que vertical, pero esa igualdad no asegura la optimalidad.

²Me cabe duda de si la solución que ofrezco es una *inmejorable* aproximación o la solución exacta: pero la complejidad algebraica resultante excede mi capacidad de sufrimiento. . .

³El parecido con secciones óptimas de cúpulas de revolución es manifiesto: véase mi tesis doctoral. . .

⁴Esta cuestión es importante por varios motivos. Por ejemplo, la reformulación del problema de Michell como un problema de programación lineal confía en que áquel sea equivalente al de *compliance* (mínima energía de deformación), y tal equivalencia descansa a su vez en que el teorema de Michell sea a la vez necesario y suficiente. Si no es el caso, LP puede suministrar, para algunos problemas, trazados que no cumplen con las ecuaciones de equilibrio, como es el caso (creo yo) de los ejemplos de Jose Ignacio sobre el *bridge problem*.

3.2. *bridge problem*: ¿infinitud de meta-estados?

Lo curioso del *bridge problem* es esto: todas las mallas ortogonales que he probado hasta ahora no cumplen con el teorema λ , luego no son óptimas. Más aún, todas pueden transformarse en una malla no-ortogonal que, ajustada y/o recocida, permite alcanzar valores por debajo de una cota significativa del mínimo para el problema, que a día de hoy podemos fijar en $0,8pL^2$.

Por ello mi impresión sigue siendo ésta: el *bridge problem* —como el *spin-glasses problem* que dio lugar al *simulated annealing*— es un problema *frustado*: aunque existe una condición de optimalidad suficiente para la clase de problemas a las que pertenece, “algo” en su formulación frustra que esa condición pueda cumplirse...⁵

Parece existir una casi-invariante relación entre el trazado “Michell-1” y los infinitos meta-estados para *bridge problem*: en una serie de casos la esbeltez óptima de la malla afín no-ortogonal está determinada por la ordenada en el cuarto de la luz. Ese invariante se difumina en el caso de mallas ‘caóticas’ o cuando la malla fuerza a que el ángulo en el arranque sea 180° (curvas V&V). Esto niega (o matiza) una intuición de JAIME CERVERA.

3.3. Condiciones de comparabilidad de soluciones

Al transformar pL en $\sum Q$ hay una cantidad de estructura que se ignora: aquella necesaria para esa transformación (flexión entre los puntos de aplicación de las Q). Por consiguiente, sólo deben compararse soluciones para la misma geometría de las Q .⁶

3.4. Bibliografía cuya revisión parece necesaria

- Barta J (1957) On the minimum weight of certain redundant structures. Acta Tech Acad Sci Hung 18:67-76 (No hay PDF: pedir)
- Dorn WS, Gomory RE, Greenberg M (1964) Automatic design of optimal structures. J Méc 3:25-52 (No hay PDF: pedir)
- Lévy M (1873) La statique graphique et ses applications aux constructions (curiosidad)
- Varios de P. Pedersen (1969–)
- Prager W, Rozvany GIN (1977a) Optimization of the structural geometry. In: Bednarek AR, Cesari L (eds) Dynamical systems (proc int conf, Gainesville, Florida). Academic, New York, pp 265-293 (No hay PDF: pedir)
- Prager W, Rozvany GIN (1977b) Optimal layout of grillages. J Struct Mech 5:1-18 (No hay PDF: pedir)
- Prager W, Shield RT (1967) A general theory of optimal plastic design. J Appl Mech 34:184-186 (No hay PDF: pedir)
- Sved G (1954) The minimum weight of certain redundant structures. Aust J Appl Sci 5:1-8 (No hay PDF: pedir)

3.5. TODO

Hay tanto por hacer...! Desde luego los colegas que tengan necesidad de ‘hacer curriculum’ no se pueden quejar: en mi opinión hay decenas de artículos recientes que contienen cuestiones que merecería la pena discurtirse (cuando no errores groseros) de manera que la publicación de discussions —que es como obtuve yo mi sexenio— parece asegurada. De más nivel, hay multitud de temas a investigar, desarrollar, revisar,...

⁵Dado un esquema ortogonal, uno puede comenzar con $\lambda = 1$, obtener resultados y calcular una nueva esbeltez con el teorema λ . Esta esbeltez es para ese mismo esquema, mediante una transformación de sus ordenadas, lo que destruye la ortogonalidad. Se obtiene así una solución no-ortogonal pero óptima para ese esquema.

Una exploración distinta es calcular la esbeltez del esquema óptimo de esa familia. Como ya no tenemos regla, vamos variando la esbeltez esperando que las cantidades de estructura horizontal y vertical coincidan para una esbeltez que señala el esquema óptimo de la familia. En general nunca se llega a esa situación: sí hay un esquema óptimo con menor cantidad de estructura que el resto, pero no cumple el teorema λ . Esto es cierto salvo para el esquema parábolas L . Aquí ambas esbelteces (la óptima del esquema y la del esquema óptimo) coinciden en algunos casos y se trata, por tanto, de un esquema ortogonal: desafortunadamente, son soluciones significativamente superadas por otras no-ortogonales... (Esto quizás merecería una investigación más detallada...).

⁶En el catálogo, algunas soluciones son “jugadoras de ventaja”, pues se alteró la geometría de las Q de un modo sutil —apenas perceptible. La equivalencia estática se mantiene, pero no la del coste.