Máximo rendimiento estructural en la flexión simple

. . . Mariano Vázquez

9 de abril de 2011

[falta resumen en castellano]
[falta resumen en inglés]
[falta palabras clave]

Índice

1. El problema

Se trata de sostener una carga uniforme p, distribuida a lo largo de la horizontal **AB**, problema que representa lo esencial de todos los problemas de flexión simple (puentes, vigas de edificios con acción gravitatoria muy predominante, etc), véase FIGURA 1 (arriba). Se trata de un *problema de Maxwell* en lo que toca a la carga útil (la acción útil y sus reacciones son conocidas de antemano), con un *número de Maxwell* nulo; en consecuencia, la solución óptima será simétrica respecto al eje **AB** (cf. CERVERA, ?).

Para $p = 0$ la mejor solución conocida es la combinación de un cable catenario con un arco de igual trazado. Aquí se investigan soluciones (probablemente óptimas) para un problema p, L, compuestas de un cable y un arco con trazado simétrico, conectados a la carga p a través de membranas comprimida y traccionada, véase la FIGURA 1 (abajo).

La condición de equilibrio es que a la largo de una longitud infinitesimal, el peso de la estructura y la carga útil sean equilibrados por la diferencia de las componentes verticales de los esfuerzos en el arco y el cable, a un lado y otro de la longitud. Dada la simetría, el peso por unidad de longitud horizontal de cable y arco con una área constante A (de acuerdo con nuestra hipótesis acerca de las estructuras de grueso constante, véase ANTUÑA *et* VÁZQUEZ, 2010:10) es:

$$p_{ac} = 2\boldsymbol{\rho}A \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} = 2\boldsymbol{\rho}A \cdot \sqrt{1 + y_x^2}$$

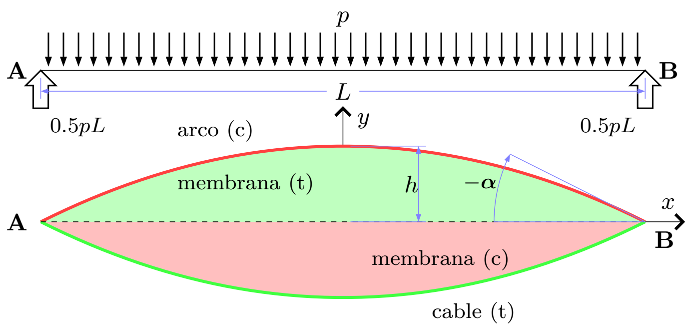

Figura 1: El problema básico de flexión simple

siendo $\boldsymbol{\rho}$ el peso específico del material estructural empleado.

La membrana de suspensión será un conjunto de cables verticales yustapuestos según la horizontal, es decir, como una membrana rasgada en vertical. Dimensionando cada cable con grueso constante, y siendo f la máxima tensión normal del material, el peso total a transmitir por la membrana hacia el cable (mediante su compresión) o hacia el arco (mediante su tracción), es igual a la mitad de la carga útil más su propio peso para una longitud y. Por tanto su espesor e debe ser:

$$\frac{p}{2} + \boldsymbol{\rho}\cdot e(x)\cdot y(x) = e(x)\cdot \mathsf{f} \quad \Rightarrow \quad e(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{\mathsf{f} - \boldsymbol{\rho} y(x)}$$

El peso total de las membranas por unidad de longitud será:

$$p_{mm} = p\cdot\frac{y}{\mathcal{A} - y}$$

en donde $\mathcal{A}$ es el alcance del material, $\mathsf{f} \div \boldsymbol{\rho}$. Nótese que esta condición impone un límite a la máxima altura del arco y el cable: $y(0) = h \leq \mathcal{A}$.

El peso total por unidad de longitud, $q = p + p_{ac} + p_{mm}$, valdrá:

$$q = p + p\cdot\frac{y}{\mathcal{A} - y} + 2\boldsymbol{\rho} A \cdot \sqrt{1 + y_x^2} = p\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A} - y} + 2\boldsymbol{\rho} A \cdot \sqrt{1 + y_x^2}$$

Denominando D a la razón $p \div 2\boldsymbol{\rho} A$:

$$q = \frac{p + 2\boldsymbol{\rho} A}{D + 1}\left(D\cdot\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A} - y} + \sqrt{1 + y_x^2}\right)$$

Denominando H a la componente horizontal de la tracción en el cable o de compresión en el arco —constante a lo largo de la longitud—, la ecuación de equilibrio es:

$$q\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}\left(2H \cdot y_x\right)$$

que, sustituyendo los resultados anteriores, se transforma en:

$$2\boldsymbol{\rho} A \cdot \sqrt{1 + y_x^2} + p\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A} - y} = -2H \cdot y_{xx}$$

En la clave, $H = \sigma_0 A$ si σ_0 es la tensión en ese punto; y la ecuación es independiente del área siempre que la proporción entre p y A se mantenga:

$$\sqrt{1+y_x^2} + D\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}-y} = -\frac{\sigma_0}{\boldsymbol{\rho}} \cdot y_{xx}$$

Finalmente, denominando E a la razón $\sigma_0 \div \mathsf{f}$:

$$y_{xx} = -\frac{1}{E}\left(\frac{D}{\mathcal{A}-y} + \frac{1}{\mathcal{A}}\sqrt{1+y_x^2}\right) \tag{1}$$

Para aprovechar al máximo el material y obtener la mejor solución para cada curva, la tensión en el apoyo debe ser la máxima [seguro, seguro!?]:

$$E = \frac{\sigma_0}{\mathsf{f}} \leq \frac{\sigma_0}{\sigma(L/2)} = \frac{1}{\sqrt{1+y_x(L/2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\boldsymbol{\alpha}}} \tag{2}$$

en la que $\boldsymbol{\alpha}$ es el ángulo de arranque del arco o del cable en el apoyo. Nótese que puesto que H es constante y según se incrementa x hay más carga que equilibrar, y_x debe ser monótona entre 0 y $L/2$ al igual que la componente vertical del esfuerzo en cada cordón; $2Hy_x(x)$ debe ser igual exactamente a la carga vertical total de la porción entre 0 y x. Puesto que el área es constante, $Hy_x(x)/A$ es la tensión, y en el caso límite en el que y_x fuera proporcional a la carga q, resultaría constante.

La razón E indica el grado de aprovechamiento del material en el arco y el cable: $E = 1$ implica que se trata de cordones a tensión constante (algo imposible en la práctica), $E = 0$ indica que en la clave no hay tensión (también imposible).

La solución debe cumplir además con:

$$y < \mathcal{A}; \qquad y(\pm L \div 2) = 0 \qquad y_x(0) = 0 \tag{3}$$

Cada problema viene determinado por $\{p, L\}$ y las soluciones, si existe alguna, por $\{y, D, E\}$. La razón D tiene una cierta relación con la eficiencia de la solución: $D = 0$ indica que la estructura no soporta carga útil; $D \to \infty$, que el peso propio del arco y el cable es despreciable frente a p.

2. Coste de la solución

Para cada solución y, el peso total del cable y el arco es:

$$P_{ac} = 4\boldsymbol{\rho}A\int_0^{L/2}\sqrt{1+y_x^2}\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{\rho}A\mathcal{P} \tag{4}$$

siendo $\mathcal{P}$ el perímetro de la estructura.

El peso total de las membranas será:

$$P_{mm} = 2p\int_0^{L/2}\frac{y}{\mathcal{A}-y}\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

Sumando el total de la carga útil, $pL = 2DL\cdot\boldsymbol{\rho}\mathcal{A}$, resulta:

$$P_T = \boldsymbol{\rho}A\left\{2D\cdot(L + 2\int_0^{L/2}\frac{y}{\mathcal{A}-y}\,\mathrm{d}x) + P\right\} = \boldsymbol{\rho}A\cdot R(y, L, D) \tag{6}$$

en la que se define un *longitud* de carga $R(y, L, D)$ dependiente de la solución, suma de tres longitudes: el perímetro P, una longitud proporcional al peso de las membranas, M, y otra proporcional a la carga útil, Q. [Mejor factor de proporcionalidad sería $p+2\rho A$ para evitar puntos singulares, etc.] El rendimiento de cualquier solución capaz de resolver un problema p, L es:

$$r = \frac{pL}{P_T} = \frac{2DL}{R(y, L, D)}$$

y su coste:

$$C = \frac{1}{r} = 1 + \frac{2}{L} \int_0^{L/2} \frac{y}{\mathcal{A} - y}\, \mathrm{d}x + \frac{P}{2DL} \tag{7}$$

Y la solución óptima para cada problema resulta de resolver:

$$\min_{(D,E)} C(D, E)$$

Nótese que y y P *dependen* de D y E.

3. Dos casos extremos

El tamaño insuperable viene dado por una solución sin carga útil y sin membranas: arco y cable adoptan la forma de una catenaria, cuyas características son conocidas (Antuña *et* Vázquez, 2010:5–6):

$$y = E\mathcal{A} \cdot \left\{ \cosh\left(\frac{x}{E\mathcal{A}}\right) - 1 \right\}$$

en la que E, igual a 0,55243, es solución de:

$$\operatorname{acosh}\left(\frac{1}{E}\right) \sqrt{1 - E^2} = 1$$

Cuando el tamaño tiende a cero, el peso propio de los cordones se vuelve despreciable, de manera que la única carga es la útil y el peso de las membranas. [Esperaba que la solución fuera en este caso un arco y un cable con forma parabólica (el diagrama de esfuerzos flectores de una carga uniforme). Para determinar cual de todas las parábolas posibles es la óptima, puede analizarse la de menor volumen estructural, lo que permite hablar de coste (o de rendimiento) aunque ese volumen estructural no se tenga en cuenta en la carga total. Sin embargo, el límite de las soluciones para $L \neq 0$ no apunta a una parábola conocida.]

Para tamaños intermedios entre cero y el insuperable hay que resolver la ecuación diferencial antedicha y determinar el valor de (D, E) que conduce a un menor coste. Véase el Cuadro 1.

Cuadro 1: Soluciones óptimas para arco, cable y membranas

$L/\mathcal{A}$	D	E	C	$\boldsymbol{\alpha}\,(^{o})$	λ	P/L	M/L	Q/L	R/L	$\frac{W/L}{\rho A}$
1.3255	0	0,55	∞	56.5	1,48	2,52	0	0	2,52	1,84
$1.30^?$	0.0158	0.55	81.3	56.3	1.48	2.52	0.01	0.03	2.56	
1.00	0.289	0.61	5.49	52.5	1.62	2.44	0.16	0.58	3.18	
0.50	1.65	0.66	1.82	48.8	1.78	2.37	0.35	3.30	6.02	
0.20	5.96	0.68	1.23	47.3	1.85	2.34	0.45	11.92	14.71	
0.10	13.2	0.68	1.11	47.0	1.87	2.33	0.48	26.43	29.25	
$\frac{1}{1000}$	1.450	0.69	1	46.6	1.89	2.33	0.51	2905.47	2908.31	
$\frac{1}{10000}$	14.500	0.69	1	46.6	1.89	2.33	0.51	29070.31	29073.15	
0	∞	$0,63^\dagger$	1	$50,77^\ddagger$	$1,63^\star$	$2,30^\dagger$	$\sqrt{2}/3$	$\infty^\ddagger$	∞	0^*

?: errores de convergencia E ó D; †: $\to\sqrt{2/5}$; ‡: $\to\tan^{-1}\sqrt{3/2}$; ⋆: $\to 2\sqrt{2/3}$; revisado hasta aquí †: $\to\sqrt{2}+\mathrm{asinh}1$; ‡: $\to\sqrt{2}\mathcal{A}\div 2L$; ∗: $W/(pL)=L$

C y demás integrales, a falta de interpolar decentemente y a partir de los valores nodales de y, y_x, y_{xx}.
A falta de asegurar que se determina el mínimo global de C.
El caso $L=0$ conviene revisarlo una segunda vez.