Aritmética vectorial para principiar con problemas multicriterio

Mariano Vázquez Espí

Madrid, 6 de marzo de 2024.

Glosario

adagio. Del lat. *adagium*. **1.** m. Sentencia breve y, la mayoría de las veces, moral.

axioma. Del lat. *axiŏma*. **1.** m. Proposición tan clara y evidente que se admite sin demostración. **2.** m. *Mat.* Cada uno de los principios indemostrables sobre los que, por medio de un razonamiento deductivo, se construye una teoría.

criterio. Del lat. tardío *criterĭum*. **2.** m. Juicio o discernimiento.

módulo. Del lat. *modŭlus*. **7.** m. *Geom.* Longitud del segmento que define un vector.

óptimo. Del lat. *optĭmus*. **1.** adj. Sumamente bueno, que no puede ser mejor.

proposición. Del lat. *propositio, -ŏnis*. **7.** f. *Mat.* Enunciación de una verdad demostrada o que se trata de demostrar. **8.** f. *Ret.* Parte del discurso, en que se anuncia o expone aquello de que se quiere convencer y persuadir a los oyentes [*sic*].

vector. Del lat. *vector, -ōris* 'el que transporta'.. **5.** m. *Fís.* Toda magnitud en la que, además de la cuantía, hay que considerar el punto de aplicación, la dirección y el sentido. `[Se refiere a vectores fijos, los corrientes (libres) están aplicados en el origen de coordenadas.]`

Vectores corrientes

En un espacio métrico euclídeo de D dimensiones, un vector es simplemente una D-tupla, $\vec{V} = \{x_1, x_2, \ldots, x_D\}$, en el que cada coordenada x_i puede medirse con la métrica del espacio.

Alternativamente, un vector puede representarse por un segmento con origen en el origen de coordenadas y término en el punto determinado por la D-tupla, es decir un segmento orientado sobre la recta que pasa por el origen y por el punto definido por la D-tupla.

`Axioma 1.` ***Dos vectores son idénticos si sus D-tuplas son iguales.***

Están bien definidas operaciones entre vectores como la suma, el producto escalar, el producto vectorial, etc.

Vectores corrientes

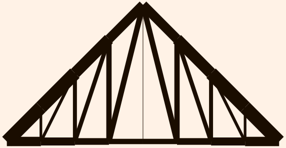
De estos vectores tiene sentido definir su módulo, es decir, la longitud del segmento, con la misma métrica que sus coordenadas y el espacio.

$$V = \sqrt{\sum_i x_i^2}$$

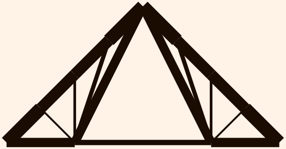
Cada sumando x_i^2 es un área en el espacio, pues x_i es una longitud. Y por la raíz cuadrada, el módulo V es de nuevo una longitud. (Generalización del teorema de PITÁGORAS en 2D.)

Hay infinitos vectores distintos con igual módulo: se diferencian por su **orientación** en el espacio.

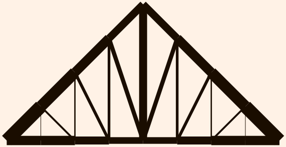
`Proposición` 2. ***Debido a ello, salvo en el caso unidimensional ($D = 1$) el conjunto de vectores no puede ordenarse con las relaciones binarias habituales como $\geq$ o $\leq$, ni siquiera recurriendo a su módulo.***



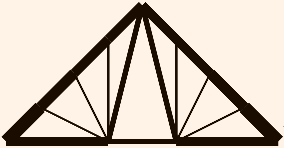
$\phi = 186$



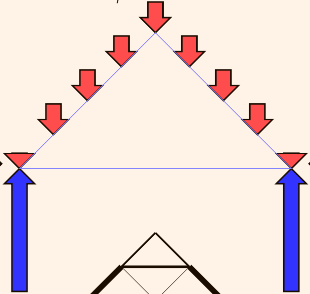
$\phi = 180$

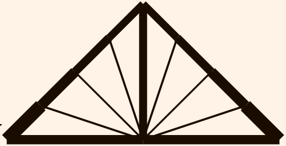


$\phi = 159$

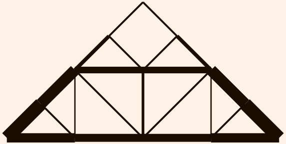


$\phi = 150$

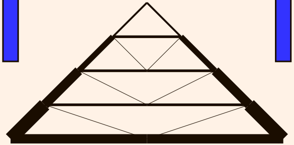




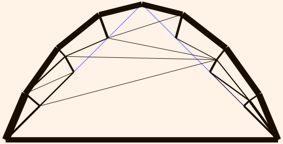
$\phi = 144$



$\phi = 120$



$\phi = 108$



$\phi = 81{,}8615$

Problemas multicriterio

Un problema multicriterio puede definirse informalmente como aquel que tiene diferentes soluciones aceptables, juzgadas simultáneamente por dos o más criterios. Están por todas partes:

- en **ingeniería y arquitectura** cuando diseñamos artefactos;
- en **biología**, por ejemplo, cuando se intenta explicar la diversidad de especies que comparten un mismo nicho ecológico;
- en **ciencia política** cuando se intenta explicar porqué en nuestra actuales partitocracias no existe ninguna mayoría satisfecha (MONTAÑES, 2000);
- en **economía monetaria**, cuando se diseña algún modo de distribución de rentas en las que todas y cada una de las personas obtiene un beneficio monetario cuando la sociedad en conjunto también lo obtiene (PARETO, 1849);
- en **deporte**, al decidir a qué modalidad atlética debe dedicarse una persona o, en deportes de equipo, en qué posición debe jugar;
- en **diseño urbano**, cuando se estudia la tipología de edificios y calles (RAMÓN, 1982);
- en la **ciencia de la guerra**, cuando los recursos son limitados y son varios los objetivos a alcanzar (SUN TZU (ca. VI a.C.; 1772!; 1910!)).
- etc.

Problemas multicriterio

La aceptabilidad de una solución $\vec{S}$ para un problema $\mathcal{P}$ se define como una U-tupla $(U \geq 1)$ de valores-umbral que deben ser superados por los correspondientes valores de $\vec{S}$ para que sea una solución aceptable.

Y para comparar una solución con otra se emplea una V-tupla $(V > 1)$ de valores o magnitudes que pueden medirse en cualesquiera solución aceptable mediante protocolos bien establecidos.

Un problema $\mathcal{P}$, queda definido por el conjunto de U funciones-umbral y sus valores umbral; y V funciones de valor que puedan medirse en cualquier solución $\vec{S}$ imaginable, siendo $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ el conjunto de tales soluciones.

Problemas multicriterio

En lo que sigue $\mathcal{Q}^+$ representa el conjunto de racionales positivos.

`Proposición` 3. ***Problema*** $\mathcal{P}$***:***
$$\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{u_1, \ldots, u_U\}, \{f_1, \ldots, f_U\}, \{g_1, \ldots, g_V\}\};$$
tal que f_i ***y*** $g_j : \mathcal{S} \to \mathcal{Q}^+$.

`Adagio` 4. ***Nótese que un problema no está definido en un espacio métrico, sino que cada función (umbral o de valor) está definida en su propio espacio métrico unidimensional.***

`Adagio` 5. ***No hay restricción alguna sobre las funciones*** f ***o*** g***, salvo que deben representar una magnitud física y, por tanto, tener un protocolo y una unidad de medida bien definidas. No sirven pseudomagnitudes como, por ejemplo, el valor monetario de cambio (precio en moneda) (*****Georgescu-Roegen*****, *1971*).***

Problemas multicriterio

`Proposición` 6. ***Solución $\vec{S}$:***

$$\vec{S} \equiv \{\{f_1(\vec{S}), \ldots, f_U(\vec{S})\}, \{g_1(\vec{S}), \ldots, g_V(\vec{S})\}\};$$

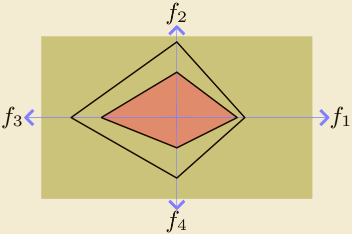
un vector corriente de $U + V$ componentes.

`Adagio` 7. ***Debido al `adagio` 4, aunque desde el punto de vista aritmético cada solución es equivalente a unas U-tupla y V-tupla de valores, equivalentes a su vez a vectores corrientes, no se pueden usar sus módulos para ningún propósito de medida: ¡no existe ni un espacio métrico U-dimensional, ni tampoco uno V-dimensional!***

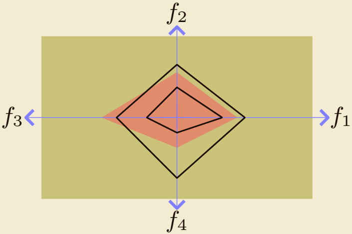
Problemas multicriterio

Axioma 8. ***Aceptabilidad:***

$$\vec{S} \textit{ es aceptable si } f_i(\vec{S}) \geq u_i,\ \forall i \in [1, \ldots, U]$$



Soluciones aceptables



Soluciones inaceptables

Por ejemplo, ante un problema estructural, cada solución debe cumplir con los requisitos de resistencia, rigidez y estabilidad para que sea aceptable. Además puede ser costosa o barata (en términos físicos), bonita o fea (en términos estéticos), etc.

Tales requisitos están bien definidos por los valores umbral del problema, y son cuantificables para cualquier estructura imaginable (aunque siempre se trata de modelos matemáticos aproximados).

¿Cómo elegir una solución $\vec{S}$ del conjunto $\mathcal{S}$?

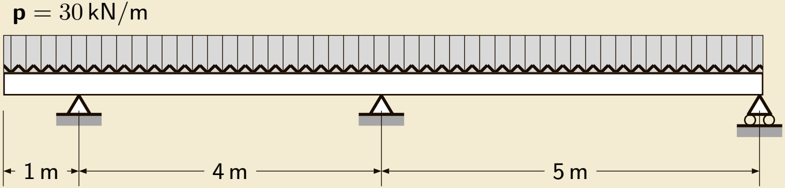
¿Cómo elegir una solución $\vec{S}$ del conjunto $\boldsymbol{\mathcal{S}}$?

1) Obviamente, las soluciones inaceptables se descartan, y nos queda el conjunto de soluciones aceptables, $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

2) Si solo queda una aceptable: esa misma.

3) Pero ¿si quedan varias en $\boldsymbol{\mathcal{A}}$?

Optimación estructural: un caso real



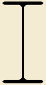
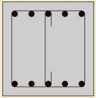
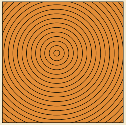
El problema de diseño consiste en determinar una sección para la viga tal que:

- sea segura (requisito de resistencia),
- no se deforme de forma apreciable (requisito de rigidez).

Cualquier solución que cumpla ambos requisitos es **aceptable**.

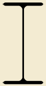
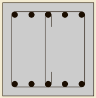
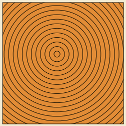
Si existen varias soluciones aceptables, hay un problema implícito adicional: **¿cómo elegir una entre ellas?** O, de otra forma, ¿cuál es nuestro **propósito**?

Optimación estructural: un caso real

Material	Solución	Coste monetario (pta)
Acero IPE270		24.000
Hormigón armado $310 \times 300\,\mathrm{mm}^2$ $10\varnothing 20$		12.600
Madera $400 \times 400\,\mathrm{mm}^2$		64.000

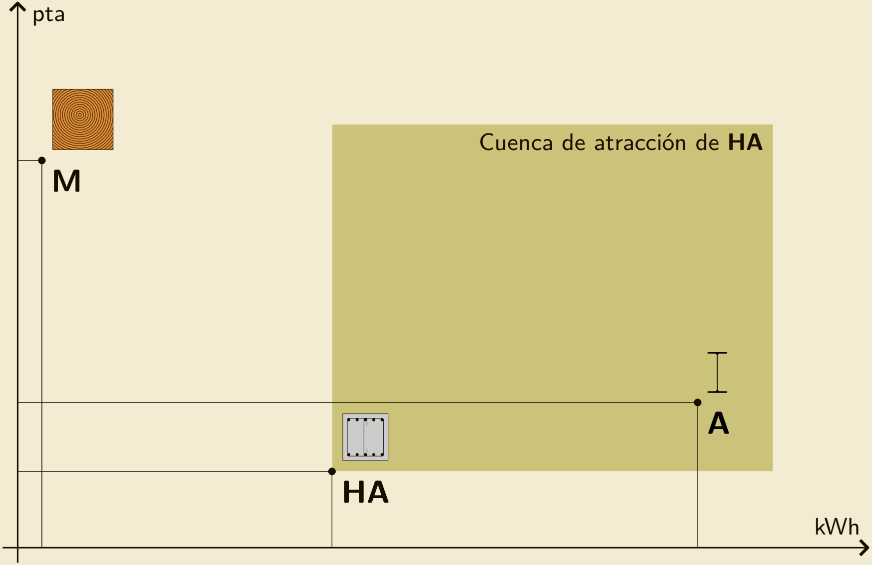
Precios y métodos de fabricación de 1985.

Optimación estructural: un caso real

Material	Solución	Consumo de energía fósil (kWh)
Acero IPE270		3.600
Hormigón armado $310 \times 300\,\mathrm{mm}^2$ $10\varnothing 20$		1.664
Madera $400 \times 400\,\mathrm{mm}^2$		128

Métodos de fabricación de 1985. Madera de renuevo. Acero y hormigón sin reciclaje.

Optimación estructural: un caso real



¿Cómo elegir una solución $\vec{S}$ del conjunto $\mathcal{S}$?

El índice de desarrollo humano (IDH) de NNUU es otro buen ejemplo, con una historia interesante.

En 1990, NNUU diseño el IDH para introducir cierta multidimensionalidad, intentando superar la falacia de la renta monetaria como <u>único</u> índice de bienestar. El nuevo índice incorporaba dos nuevas medidas, sobre la educación y la esperanza de vida (salud). Y para clasificar a los países, el IDH_{1990} de cada país se calculaba como la media aritmética de los tres subíndices...

Un país S es "mejor" que otro T si IDH$(S) >$ IDH(T).

(La V-tupla ha quedado reducida a una única función $g \equiv$ IDH.)

(La aceptabilidad se define aquí por la certificación de que los tres índices suministrados por cada país están "bien" medidos. Si no es posible esa certificación, el país se descarta y no entra en la lista. De hecho, ningún año, todos los países de NNUU han entrado en la lista.)

¿Cómo elegir una solución $\vec{S}$ del conjunto $\mathcal{S}$?

[...]

C—Pero podríamos sumarlas y obtener la media ¿no?

M— ¡No! No puedes sumar dos naranjas con tres kilómetros. Podrías dividirlas o multiplicarlas, pero no puedes sumarlas...

C— ¿Y por qué no, mamá?

M— Porque..., porque..., ¡porque no podríamos! No me extraña que no te guste la aritmética si no te enseñan estas cosas en la escuela... ¿Qué demonios te enseñan entonces? ¿Para qué creerán tus maestros que sirve la aritmética?

C— Vaaaaaaale. ¿Y para qué sirve, mamá?

M— La aritmética es un conjunto de trucos para pensar con claridad, y la única gracia que tiene es la claridad. Y lo primero que hay que hacer para ser claro es no mezclar ideas que son realmente diferentes unas de otras. La idea de dos naranjas es realmente diferente de la idea de dos kilómetros.Y si las sumas, lo único que obtendrás es una bruma en tu cabeza.

[...]

Versión libre de un Metálogo de Gregory Bateson (1953)

¿Cómo elegir una solución $\vec{S}$ del conjunto $\mathcal{S}$?

En 2010, tras Bateson (¡1953!) y críticas posteriores, NNUU dio otro tímido paso hacia la claridad, y sustituyó la media aritmética por la media geométrica de los tres subíndices.

La multiplicación de los tres subíndices resulta en un volumen en un espacio aparentemente euclídeo, debido a que los tres subíndices se normalizan para pertenecer al conjunto $[0, 1]$: un volumen adimensional.

Pero como realmente no hay espacio métrico 3D (`adagio 4`), la bruma no acaba de irse...

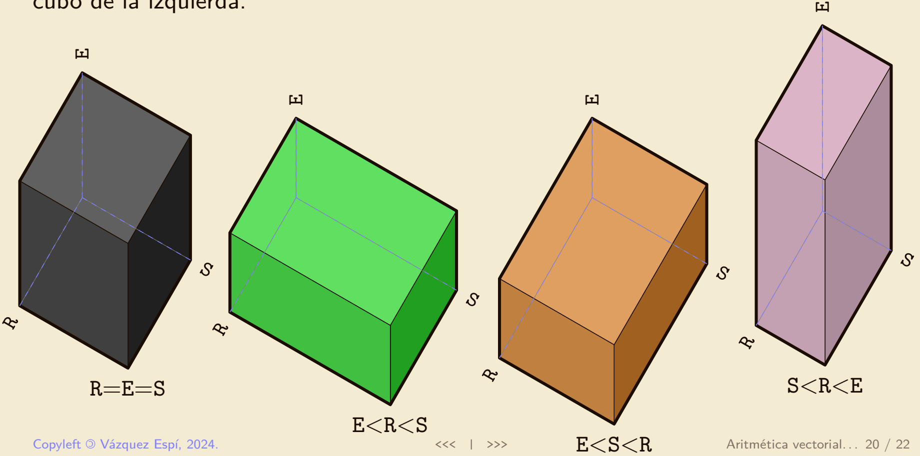
La media geométrica es el lado de un cubo con el mismo volumen que el original: dos países con igual volumen, pero con subíndices totalmente distintos por lo demás, tendrían el mismo IDH.

(La regla de selección es como en el caso anterior, puesto que se siguen comparando escalares en un espacio métrico unidimensional...)

¿Cómo elegir una solución $\vec{S}$ del conjunto $\mathcal{S}$?

El problema sigue: una renta monetaria media muy grande ¿puede compensar? que la gente se esté muriendo joven: el IDH$_{2010}$ ni lo nota ni lo refleja.

Los tres "países" de la derecha tienen el mismo $\mathtt{IDH}_{2010}$, $4{,}72$, aunque sus índices en salud (S), educación (E), y renta (R) son diferentes. El volumen es el mismo que el cubo de la izquierda.



¿Cómo elegir una solución $\vec{S}$ del conjunto $\mathcal{S}$?

La idea de BATESON, de multiplicar o dividir, tiene su origen en la *tecné* de la Grecia clásica. Piensen en un balancín, o en una báscula romana (de brazos desiguales): la palanca clásica. La multiplicación es:

$$\text{trabajo} = \text{peso} \times \text{distancia}$$

y si dividimos por el tiempo:

$$\text{potencia} = \frac{\text{trabajo}}{\text{tiempo}}$$

es decir que multiplicando y/o dividiendo, obtenemos otra magnitud física medible. **Y por supuesto no hay necesidad de ninguna media geométrica, pues cada nueva magnitud tiene su propia métrica.**

¿Cómo elegir una solución $\vec{S}$ del conjunto $\mathcal{S}$?

El problema de decisión suscitado en un problema multicriterio con varias soluciones aceptables ya había sido resuelto por PARETO (¡1894!)—hay quien apunta más atrás, a SMITH o JEVONS.

Considerando que las funciones de valor g son costes y que lo mejor en cada dimensión es el menor coste, basta con definir la relación binaria $\vec{S}$ "domina a" $\vec{T}$ entre un par de soluciones $\vec{S}$ y $\vec{T}$, $(\vec{S} \prec \vec{T})$, como:

Proposición 9.

$$\boldsymbol{\vec{S} \prec \vec{T} \textit{ si } g_i(\vec{S}) \leq g_i(\vec{T})\, \forall i \in [1, \ldots, V] \textit{ y } \exists j \ \textit{ tal que } \ g_j(\vec{S}) < g_j(\vec{T}).}$$

La relación "domina a" es sinónima de"preferible a", "mejor que", etc.

¿Cómo elegir una solución $\vec{S}$ del conjunto $\mathcal{S}$?

Esta relación define implícitamente una relación de equivalencia ("no peor que") que divide el conjunto $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ en clases de equivalencia, cuya definición más breve es la recursiva, a saber, dados $\mathcal{P}$, $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{A}}$:

Proposición 10.

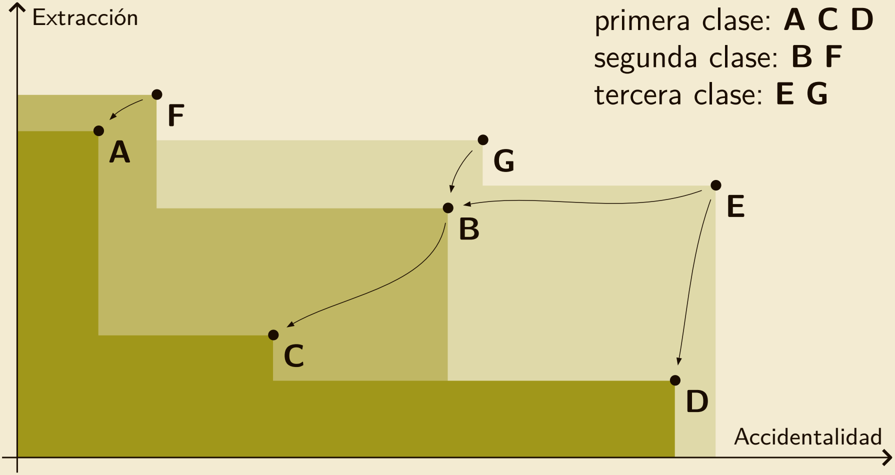
1. $\mathcal{A}_1 \leftarrow \mathcal{A}, i \leftarrow 1.$
2. ***la clase óptima de $\mathcal{A}_i$ está formada por todos los elementos $\vec{S} \in \mathcal{A}_i$ para los que no existe un $\vec{T} \in \mathcal{A}_i$ tal que $T \prec S$; sea $\mathcal{C}_i$ tal clase, entonces:***
   a) ***si $\mathcal{C}_i = \mathcal{A}_i$, los conjuntos $\{\mathcal{C}_1 \equiv \mathcal{C}_{\text{opt}}, \ldots, \mathcal{C}_i\}$ son las clases de equivalencia. .... Fin.***
   b) ***en otro caso, $\mathcal{A}_{i+1} \leftarrow \mathcal{A}_i - \mathcal{C}_i,\ i \leftarrow i+1,$ ..... Seguir en 2.***

La clase óptima $\mathcal{C}_{\text{opt}}$ se denomina "óptimos de Pareto", "soluciones no-peores", etc. La constituyen los elementos de $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ aceptables y de "primera clase".

Minas: un ejemplo clásico de optimación

Procedimiento		Costes	
	extracción	accidentes	ambiental
A	14	72	47
B	74	55	70
C	44	27	45
D	113	17	50
E	120	60	60
F	24	80	38
G	80	70	80

Minas: un ejemplo clásico de optimación



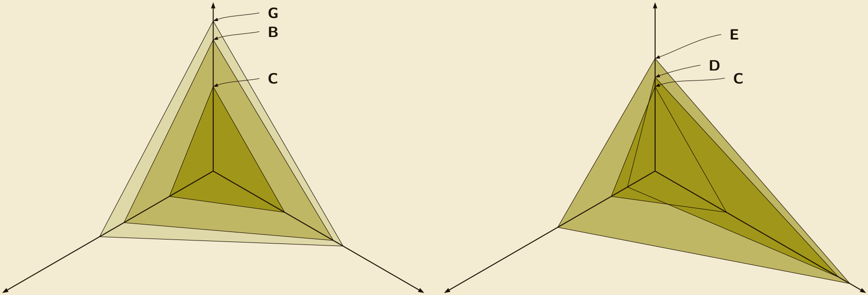
primera clase: **A C D**
segunda clase: **B F**
tercera clase: **E G**

Minas: un ejemplo clásico de optimación

Representación de ‘contornos’ de costes

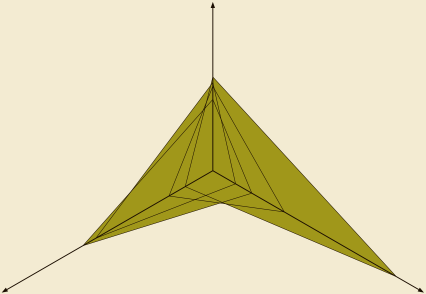
G peor que **B**; **B** peor que **C**.

E peor que **C** y **D**.

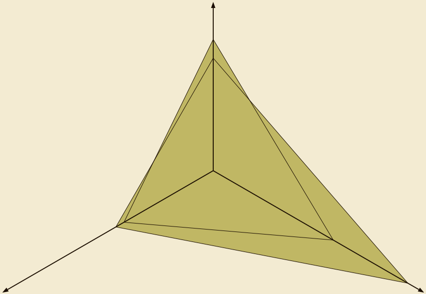


Minas: un ejemplo clásico de optimación

Primera clase: **A C D F**.



Segunda clase: **B E**.



Algunas notas de importancia

Proposición 11. ***La clase óptima $\mathcal{C}_{\mathrm{opt}}$ no puede estar vacía.***

Proposición 12. ***Si el número de elementos de $\mathcal{C}_{\mathrm{opt}}$ es mayor que uno, la elección de una solución tiene que hacerse subjetivamente, y cualquiera que sea la elección no se trata de un óptimo único.***

Proposición 13. ***Solo si existe una solución aceptable $\vec{S}_{\mathrm{opt}}$ tal que su V-tupla es $\{0, \ldots, 0\}$ se puede asegurar que existirá un óptimo único.***

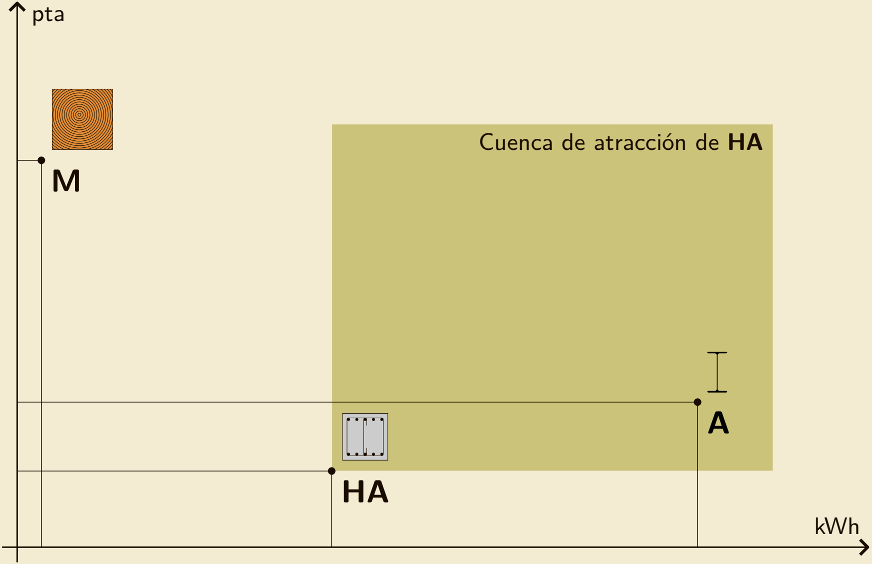
Adagio 14. ***Cuando las funciones g representan costes físicos, el segundo principio de la termodinámica sugiere que, para problemas multicriterio que modelan un fenómeno físico, es improbable que exista un único óptimo.***

Algunas notas de importancia

`Proposición 15.` ***Las soluciones 'no-peores' constituyen un conjunto autorreferenciado: todas ellas son 'no-peores' entre sí, lo que sólo puede comprobarse cuando se conocen todas.***

`Proposición 16.` ***Una solución 'peor' pero aceptable sólo se reconoce cuando se encuentra una —o varias— mejor que ella.***

Optimación estructural: un caso real



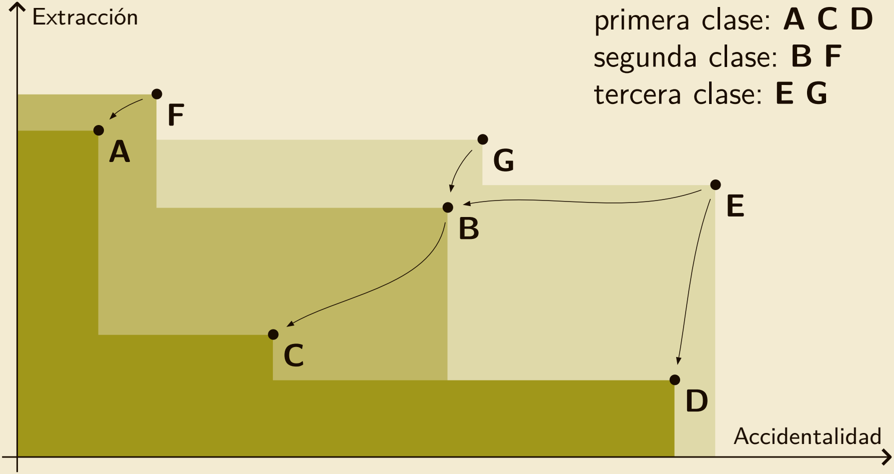
Algunas notas de importancia

La incertidumbre (o subjetividad) está presente por varias causas:

1. La incertidumbre asociada a los modelos empleados para cuantificar los distintos costes y funciones umbral (también opera en la optimación escalar o unidimensional).

2. La incertidumbre asociada a los V costes y dimensiones considerados (sistema de valores): ¿son los apropiados para nuestro acoplamiento estructural con el entorno? ¿representan todo lo *importante*? ¿se han descartado incorrectamente alternativas? (La optimación *unidimensionalmente* monetaria descarta *todas las alternativas* valiosas en *otras dimensiones*.)

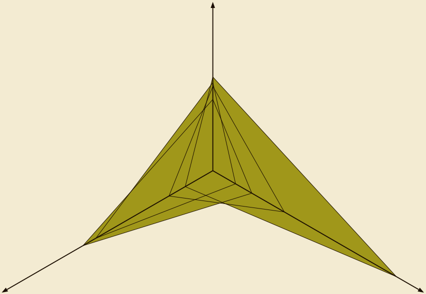
Minas: un ejemplo clásico de optimación



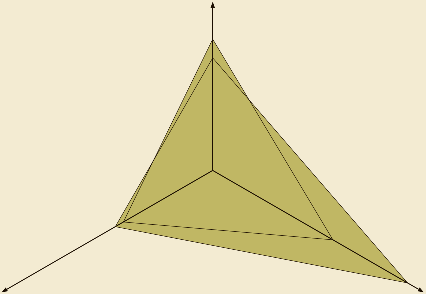
primera clase: **A C D**
segunda clase: **B F**
tercera clase: **E G**

Minas: un ejemplo clásico de optimación

Primera clase: **A C D F**.



Segunda clase: **B E**.



Algunas notas de importancia

3. La incertidumbre asociada a la búsqueda de soluciones es irreducible: nunca hay seguridad completa de haber explorado todas las alternativas.

   Puesto que el conjunto $\mathcal{C}_{\text{opt}}$ de soluciones no-peores es autorreferenciado (se define así mismo —se auto-organiza) nunca puede tenerse la certeza de haberlo encontrado.

   De ahí el valor de la imaginación (arte), o de la mutación biológica (exploración al 'azar'), etc. De ahí la tragedia de la desaparición forzada de especies, culturas, idiomas,...

4. `Adagio 17.` ***Incluso sin incertidumbre (un situación teórica), la elección entre las soluciones 'no-peores' no puede hacerse objetivamente. Se trata, en general, de una decisión que sólo puede ser tomada por sujetos.***

   Esto es así, en general, incluso si no existieran las incertidumbres anteriores...

Una pregunta para acabar

Después de todo, ¿por qué la clasificación multicriterio es impopular fuera de ciertas disciplinas de la física?

Por todas partes vemos métodos alternativos —como el agrupamiento (*clustering*)—, homogeneización y jerarquía de criterios, etc.

En todos ellos se opera como si en el espacio de V dimensiones hubiera un métrica que permite medir distancias: una falacia.

También tienen en común la primera respuesta de `Google`:

> "Se trata de una metodología [*sic*] de soporte a la toma de decisiones. Permite trasladar las diferentes características de los objetos a evaluar a una serie de parámetros homogéneos y cuantificables, que faciliten la **objetivización** [*sic*] de la elección."

Ahí está la clave: **objetivación**: hurtar al sujeto su libertad de elección...

Tecnocracia *versus tecné*...

(Complemento de partitocracia *versus* $\delta\eta\mu o\kappa\rho\alpha\tau\iota\alpha$...)

Biblio

Referencias, demostraciones formales, más ejemplos y detalles adicionales en:

- Decisión ecológica [17/09/2014 0,6Mb]
- ¿Multiplicar la información o conservarla? A propósito del Índice de Desarrollo Humano (2011)
- Clasificación multicriterio: una regla simple para tratar con problemas complejos (2010)
- Los límites de la técnica (1996-7)

Aritmética vectorial para principiar con problemas multicriterio

Mariano Vázquez Espí

GIAU+S (UPM)
Grupo de Investigación en Arquitectura, Urbanismo y Sostenibilidad
Universidad Politécnica de Madrid
http://habitat.aq.upm.es/gi

Edición del 6 de marzo de 2024
compuesto con *free software*:
GNULinux/LaTeX/dvips/ps2pdf