Clasificación multicriterio: una regla simple para tratar problemas complejos

Agustín Hernández Aja y Mariano Vázquez Espí*

9 de mayo de 2010

Resumen

Los problemas complejos requieren nuevos enfoques para ser abordados, y estos enfoques requieren nuevos instrumentos operativos. Aquí se describe la clasificación multicriterio —una generalización abarcadora de la enumeración y la ordenación en fila tradicionales— como método que permite el manejo simultáneo de múltiples criterios o dimensiones de valor para realizar una contabilidad objetiva de la que, sin paradojas, surge la necesidad de la decisión subjetiva, mostrando que la prioridad final debe recaer en los procesos y no en los objetos. Así mismo se examina su papel en la refundación de una ciencia de los sistemas con historia (o **historia natural**).

Palabras clave: clasificación multicriterio, complejidad, decisión objetiva y subjetiva

Abstract

Multicriteria classification: a simple rule for addressing complex problems.

Complex problems require new approaches to be addressed, and these approaches require new operational instruments. It describes multicriteria classification —a comprehensive generalisation of the traditional enumeration and sorting in row— as a method that allows the simultaneous handling of multiple criteria or dimensions of value for an objective accounting from which, without paradox, arises the need for a subjective decision, showing that the final priority must lie on the processes and not on the objects. It also examines its role in the new foundation of historical systems science (or **Natural History**).

Keywords: multicriteria classification, complexity, objective and subjective decision

* Profesores del Grupo de Investigación en Arquitectura, Urbanismo y Sostenibilidad (GIAU+S) de la Universidad Politécnica de Madrid (UPM)

—¿Pero por qué, entonces, no medimos el conocimiento de la misma manera?
—¿Y cómo? ¿Con cuestionarios? ¡No lo quiera Dios! ¿Habrá que darles notas más altas al estudiante que pueda contestar las preguntas de mayor amplitud? ¿O tendría que haber distintas **clases** de notas para cada tipo diferente de pregunta?
—¡Ah! ¡Muy bien!. Hagámoslo así, y luego sumemos todas las notas y luego. . .
—No. . . no podemos sumarlas. Podríamos multiplicarlas o dividir una clase de nota por otra, pero no podemos sumarlas.
—¿Y por qué no, papá?
—Porque. . . ¡porque no podríamos! No me extraña que no te guste la aritmética si no te enseñan estas cosas en la escuela. . . ¿Qué demonios te enseñan entonces? ¿Para qué creerán tus maestros que sirve la aritmética?
—¿Y para **qué** sirve, papá?
—La aritmética es un conjunto de trucos para pensar con claridad, y la única gracia que tiene es la claridad. Y lo primero que hay que hacer para ser claro es no mezclar ideas que son realmente diferentes unas de otras. La idea de dos naranjas es realmente diferente de la idea de dos kilómetros. Y si las sumas, lo único que obtendrás es una bruma en tu cabeza.

GREGORY BATESON (1953)

1. Un ejemplo práctico

A Sofía, profesora de matemáticas de su instituto, le ha tocado este curso organizar la olimpiada anual. En Región, las olimpiadas en las escuelas e institutos tienen una larga tradición y unas normas peculiares: se concursa por equipos y no individualmente; los ganadores de cada centro compiten en las olimpiadas de su ciudad, y los ganadores de las ciudades en la olimpiada de Región; sólo se compite en cuatro especialidades, distintas cada año y que se anuncian el día antes del comienzo de las olimpiadas por centros, de manera que los equipos deben entrenarse de forma generalista y, además, no se deja abandonada ninguna especialidad.

Aunque Sofía está orgullosa de la peculiar olimpiada de Región, siempre le dejó insatisfecha la forma tradicional de establecer la clasificación global entre los equipos, calculada como la clasificación **media** de las cuatro obtenidas. Éstas a su vez se establecen con el **segundo** mejor registro obtenido por cada equipo en cada especialidad, y sirven también para otorgar las medallas por especialidad. Con éste método, y usando un número suficiente de decimales, rara vez se producen empates o premios *ex aequo*.

Al objeto de construir un clasificador alternativo, Sofía tiene en mente una vieja idea, descubierta en un polvoriento manual del siglo XIX (EDGEWORTH, 1881): clasificar al conjunto de los equipos en clases de equivalencia, ordenadas según las cuatro mejores marcas de cada equipo, y asignar después el mismo puesto a todos los equipos que pertenezcan a la misma clase.

Sofía —gran admiradora del antropólogo GREGORY BATESON por lo demás— sabe que en ambas alternativas hay inevitablemente aspectos subjetivos. La elección de las cuatro pruebas es subjetiva y podría favorecer a unos equipos en detrimento de otros. En la clasificación tradicional, realizar sin más la media de las clasificaciones es arbitraria al no tener en cuenta la diferente naturaleza física entre las distintas especialidades (igualmente arbitrario sería usar pesos distintos para la clasificación obtenida en cada especialidad, para hacer una media ponderada, algo que simplemente reflejaría la opinión sobre la relativa importancia de cada prueba de quien decida los coeficientes: el método en vigor simplemente usa pesos unitarios para todas las pruebas). En la nueva clasificación, en caso de empate en la primera clase, la decisión de quien se envía a la olimpiada ciudadana (o de Región) tendrá que ser subjetiva: por sorteo, por votación popular, etc.

Sofía elige como pruebas los 100 metros lisos, el tiro con arco, los 25 metros con sacos, y la escalada del “rocódromo”. Para probar el nuevo sistema de clasificación acude a los archivos para obtener datos de años pasados y ver como hubiera sido la olimpiada en su propio instituto.

Sofía se pone a la tarea (v. CUADRO 1). Para el antiguo sistema sólo tiene que ordenar los equipos en cada una de las pruebas, y obtener su posición media, reordenándolos para la clasificación definitiva. Con el nuevo sistema, Sofía simplemente considera al equipo **A** y va apartando a los que superó en todas las pruebas, en este caso sólo el **K**; al mismo tiempo examina si algún otro equipo le superó en todo y entonces le apartaría (no fue el caso). Luego, considera el **B**: como el **H** le supera en todo, le aparta de la lista. Para el **C** la situación es la misma: le aparta. . . Procediendo así tiene al final dos montones: uno con siete equipos y otro con los cinco superados por alguno de los anteriores. El primer montón es la primera clase de equivalencia.

Repitiendo el procedimiento sobre el segundo montón, obtiene finalmente tres clases.

El resultado, en lo que se refiere a la clasificación por equipos, resulta bien distinta a la clasificación tradicional. Afortunadamente coinciden en que el equipo **H** está en primer lugar en ambos casos —con sus dos medallas de oro, aunque ahora acompañado por otros seis en un podio superpoblado. Y también en que el **K** es el último sin duda ninguna —¡no fueron capaces, salvo quizás uno de ellos, de dar a la diana ni una sola vez!

En el caso de los equipos **D**, **F** y **I**, con idéntico medallero, las clasificaciones no coinciden: con la antigua, los equipos **F** y **I** hubieran compartido el podio con el **H**. Con la nueva, el equipo **I** resulta de segunda clase, por detrás de otros siete, y en particular por detrás del **D** —relegado al quinto puesto con la antigua clasificación. De los tres equipos no puede decirse que uno sea mejor que los otros dos: el **D** mejora al **F** en los cien metros y en la escalada, pero es peor en lo demás, mientras que supera al **I** en la carrera de sacos y también en la escalada; por su parte, el **F** es mejor que el **I** con los sacos y escalando, pero peor en lo demás. ¿Por qué entonces la peor clasificación del equipo **I**? Sofía ve que la razón estriba en que el **H** le supera en todo, de forma que si hubiera que elegir un equipo para la olimpiada de la ciudad nunca se elegiría el **I**, sino al **H**.

Claro que alguien podría objetar: "¿y si el **H** está enfermo?" La respuesta es: reclasificaríamos los equipos como si el **H** no hubiera participado (Cuadro 2, centro). En el ejemplo, el equipo **I** **regresaría** a la primera clase, al haber **desaparecido** su **eliminador** —acompañado del **G** por la misma razón, contando ahora la primera clase con ocho miembros, entre los que habría que elegir subjetivamente, de todas formas.

Todavía habría más motivos de crítica al nuevo sistema: ¿por qué un equipo sin medallas como el **J** está mejor clasificado que el **I**, que sí las tiene? Una vez más hay que fijarse en el **H**: el **J** maneja algo mejor los sacos que el **H** o el **I**, y puesto que el **H** supera en todo al **I**, resulta ser el **J** quien puede **competir** con el **H**. La crítica también podría hacerse respecto al equipo **E**: sin medallas también es de primera clase. Y de nuevo el **H** es la clave: aunque por **muy poco** el **E** se clasificó con los sacos por delante del **H** y del **I**, y también ganó a este último en la escalada.

En definitiva, la gran diferencia entre los dos sistemas es ésta: mientras que con el antiguo sistema (y probablemente también a la vista del medallero) el equipo **H** hubiera representado al instituto sin duda alguna, **como si fuera una consecuencia inapelable de la lógica de las cosas**, con el nuevo vemos que cualquiera de los siete equipos de la primera clase son tan buenos candidatos para acudir a los juegos de la ciudad como los otros seis: es lo único que **objetivamente** puede decirse. Y si sólo se puede enviar un equipo por instituto habría que idear una competición adicional para elegirlo o elegirlo **subjetivamente**, pues con las marcas obtenidas, cualquiera de los siete es una sensata elección: cada uno de ellos supera a los otros seis en alguna prueba (aunque sea superado en alguna otra).

Armada con estos argumentos, Sofía se sintió preparada para acudir al consejo olímpico de Región y presentar su propuesta con el nuevo método de clasificación: sabía que iba a originar un cierto revuelo y, seguramente, acalorados debates, pero —pensó— la vida en Región se nutre de estos momentos en que surge la novedad a base de combinar de otra forma lo pre-existente. (Además, pensando que el mayor escollo sería el caso de los equipos **E** y **J**, que sin medallas se clasifican por delante del **B** o el **I**, teniéndolas, prepara una ligera modificación del método para sortearlo, dispuesta a sacársela de la manga si fuera el caso.)

2. Desusos, usos y abusos de la clasificación multicriterio

La clasificación multicriterio la usamos de manera informal —no matematizada— a todas horas. La simple pregunta "¿vamos al cine?" la dispara en forma de rápida y simultánea consideración de varios criterios: "¿Me apetece? ¿Tengo que madrugar mañana? ¡Ojo!: está la conferencia de Zutanito en el Círculo. ¿A qué película? Etc." En castellano, tenemos una acepción del verbo **calcular** que expresa esta idea, como en la frase "calculo que mañana no nos veremos".

En nuestro cálculo informal es difícil distinguir entre la parte objetiva del cálculo (muy frecuentemente mediada por el instinto u otros mecanismos fisiológicos —como el de la habilidad de despertarnos a una hora prefijada sin ayuda de más relojes que los circadianos de nuestro propio cuerpo) y la elección subjetiva entre las alternativas no descartadas por aquélla. Por ello, aunque la mente humana usa la clasificación multicriterio desde hace miles de años, su formalización algebraica es reciente —como tantas cosas, por otra parte.[1]

Por ejemplo, la **arquitectura vernácula**. Cuando se la mira de frente en toda su complejidad (diversidad espacial y evolución histórica) ninguna de las teorías al uso tiene capacidad explicativa

[1] A este respecto, las frecuentes peticiones a favor de un "pensamiento complejo" son inútiles en nuestra opinión. El tema de la mente, que ha sido tratado de forma muy competente por Bateson y muchas otras personas, es demasiado importante como para discutirlo aquí. Pero hay algo razonablemente evidente: nuestra forma de pensar —nuestra caja de herramientas para pensar— no ha cambiado a lo largo de la existencia de la especie y es poco probable que lo haga en el futuro.

Copyletf © 1996–2010 BCF+S under *Creative Commons* 3.0 Spain (cc by-nc-sa)
Copyletf © 1996–2010 BCF+S under *Creative Commons* 3.0 Spain (cc by-nc-sa)

plena: se trata más bien de teorías *ad hoc*, apropiadas para una determinada clase de casos concretos. Sin embargo, su descripción como un método de clasificación multicriterio junto al descarte de las soluciones pésimas permite explicar aparentes paradojas (Vázquez, 1988, 1997).

Aunque en general todos los problemas de importancia técnica pueden matematizarse como problemas de optimación bajo múltiples criterios, el análisis coste/beneficio, popularizado y formalizado a partir de la economía neoclásica, arrinconó a la clasificación multicriterio siempre que el dinero se alza como vara de medir. En efecto, al reducir a términos monetarios las medidas físicas de todos y cada uno de los criterios pertinentes, tal análisis hace posible la suma de todos los valores y la formación de un único índice (el precio, el coste, etc), reduciendo el problema a uno de optimación escalar, en el que es posible encontrar una solución óptima correspondiente a un único valor del índice monetario. El análisis coste/beneficio permite en apariencia la elección objetiva del óptimo, pero en verdad oculta la naturaleza arbitraria de la asignación del valor monetario a cada criterio (salvo en el caso de que tal asignación de produzca tras una operación de compraventa real y libremente consentida, lo que ocurre pocas veces). El carácter de *pseudo*ciencia de la economía neoclásica ha sido objeto de tantos estudios que no tiene mucho sentido citar aquí unos pocos de los innumerables trabajos pertinentes (véase, sin embargo, el breve comentario de Gowdy, 2004).

Por otra parte, la propia economía neoclásica debe mucho a la clasificación multicriterio, a partir de los dos teoremas fundamentales sobre la competencia perfecta (Gowdy, 2004:70–71; véase también la aclaradora interpretación de Kauffman, 2000:114–115). Pareto (1894) consideró en que condiciones podría conseguirse que todos y cada uno de los individuos obtuvieran un beneficio monetario; de este modo, el beneficio de cada individuo era en sí mismo un criterio de valoración, resultando un problema con tantos criterios como individuos. Siguiendo a Edgeworth, pronto se dio cuenta de que en general era imposible para cualquier modelo satisfacer la condición de que todos los individuos obtuvieran beneficios en cualquier circunstancia, pero, sin embargo, subrayó el hecho de que un mercado de competencia perfecta sería una solución de primera clase para este singular problema, es decir, no-peor que cualquier otra alternativa. Desafortunadamente, esto fue lo que sus discípulos retuvieron de su análisis, ignorando por completo que **hay otras** soluciones de idéntica eficiencia y que el problema de la fundamentación lógica de la medida monetaria quedaba por resolver. El propio Pareto (1894) analizó en detalle las distintas situaciones a las que un omnisciente Ministro de la Producción podría llevar a la sociedad, en especial aquella en que la sociedad **ganaría** y ninguno de sus miembros **perdería**, mediante la **compensación** entre ganadores y perdedores (realizando las transferencias necesarias del beneficio de unos para cancelar la pérdida de otros), y la posterior **distribución** de la ganancia residual (si había alguna) entre algunos o todos los individuos: ¡algo muy distinto a la competencia perfecta! Como señalan Kemp & Pezanis-Christou (1999) este hecho es frecuentemente ignorado tanto por sus críticos como por sus apologistas (v. también Naredo, 1986:320–327). El nombre de Pareto quedó unido a la primera clase de equivalencia, incluso fuera de la disciplina económica. (Algunos autores —Coello *et alii*, 2007:29–30— sugieren que la idea de una clasificación multicriterio se encuentra en Adam Smith; y que, junto a Pareto y Edgeworth, debe mencionarse a Jevons. En lo que se refiere a su fundamentación matemática cabe anotar los nombres de Borel, Koopmans, Cantor, Kuhn, Tucker, etc.)

A pesar de la frecuente imposición del análisis coste/beneficio como método de decisión, en muchos problemas **críticos** la investigación ha recurrido a la clasificación multicriterio, ya sea de forma explícita o implicita. Bastará con citar algunos casos de importancia práctica o conceptual en disciplinas alejadas de la ciencia **dura** (física, ingeniería, etc; para un recuento del cada vez más frecuente uso en estas disciplinas véase Coello, 2005).

En el caso de la arquitectura, Ramón (1982) usó quizás sin saberlo la clasificación multicriterio para mostrar que morfologías urbanas muy diferentes permitían cumplir con un único criterio de **admisibilidad** —proporcionar una determinada densidad de edificación— mientras que mayoraban uno o varios criterios de aptitud de un total de once. El trabajo, que hasta cierto punto puede considerarse como la (re)fundación de una teoría cuantitativa del diseño urbano, se anticipaba a falsos dilemas que tiempo después siguen sembrando bastante confusión en la crítica urbanística, como el de elegir entre ciudad **difusa** o **compacta**. Desafortunadamente pasó prácticamente desapercibido salvo para sus discípulos más directos.[2]

En el caso de uno de los autores (Vázquez), calculista de estructuras mecánicas, bastaba con considerar algún índice de impacto ambiental, además del habitual coste monetario en que se incurre al construir una estructura mecánica, para que lo que hasta entonces había sido un problema de optimación estándar con solución (generalmente) única se convirtiera en un problema multicriterio con varias soluciones no-peores. Ahí vimos los primeros ejemplos reales del método. Posteriormente, en nuestro grupo realizamos una primera clasificación de sistemas activos de climatización

[2]Las aportaciones de Fernando Ramón al pensamiento crítico han sido al menos parcialmente reconocidas con la concesión del Premio Nacional de Vivienda del Gobierno del Reino de España en 2010.

Copyletf © 1996–2010 BCF+S under *Creative Commons* 3.0 Spain (cc by-nc-sa)
Copyletf © 1996–2010 BCF+S under *Creative Commons* 3.0 Spain (cc by-nc-sa)

atendiendo a su rendimiento energético y a sus emisiones contaminantes (Vázquez *et alii*, 2007). Incluso usamos en ocasiones de forma rutinaria ese método para clasificar las solicitudes de las becas que ofertamos: como siempre ocurre cuando se eligen personas, la decisión es finalmente subjetiva, pero el método nos ayuda a descartar aquellas candidaturas que objetivamente son superadas por alguna otra. También lo hemos empleado para criticar de un modo racional la evaluación de la investigación científica a través de índices ponderados de impacto de los medios de difusión empleados —impacto según el *Journal Citation Report* o JCR—, modelo que desafortunadamente se va imponiendo en muchos países más por mala imitación de las potencias científicas, que por reflexión política o necesidad social (Vázquez, 2009). Actualmente, estamos investigando su uso para la caracterización y jerarquización de barrios vulnerables o desfavorecidos.

En el caso de la antropología, Diamond (1997) ha utilizado el método en los denominados "experimentos naturales". Llamó la atención, por ejemplo, acerca de cómo de las 148 especies animales potencialmente útiles para la humanidad, sólo habían sido plenamente domesticadas en sentido estricto 14. Y para explicarlo estableció seis criterios de aptitud, bastando con que no se superara uno de ellos para que la especie en cuestión quedara relegada a una relación menos intensa que la domesticación (por ejemplo, la doma, caso del elefante o de la vicuña). Para el análisis de la influencia geográfica en la evolución de las culturas polinesias utilizó seis criterios para la clasificación de las islas (clima, tipo geológico, recursos marinos, superficie, fragmentación del terreno, y aislamiento). Posteriormente, a fin de explicar la crisis ecológica de la Isla de Pascua, clasificó unas cien islas respecto a su potencial para la deforestación antrópica en base a nueve criterios de aptitud. Encontró que tres eran las islas pésimas: en dos de ellas no hay presencia humana pero sí una única especie arbórea, la palmera de Nihoa; en la tercera, la Isla de Pascua, quedan seres humanos pero no árboles (Rolett & Diamond, 2004). En todos los casos, explica los **fracasos** con el **principio de Ana Karenina**: "Todas las familias felices se asemejan [no son peores]; cada familia infeliz es infeliz a su modo [es peor que alguna otra]", de la conocida novela de Tolstói.

En el caso de la sociología política, Montañés (2000) aplicó el argumento de Pareto a la toma colectiva de decisiones, ya sea optando entre alternativas (consultas o referendos) o entre candidatos (elecciones en partitocracias). Los criterios son ahora la satisfacción o insatisfacción de cada votante (o de cada grupo homogéneo de ellos), con la importante diferencia de que, en este caso, no puede haber **transferencia de satisfacción**. Montañés, al revés que Pareto, subrayó el hecho de que mediante los procedimientos representativos usuales en general **no se puede** asegurar la satisfacción de ninguna mayoría: la aparente neutralidad de los recuentos de votos esconde el hecho de que no es posible la elección objetiva de un candidato. Por supuesto que esta dificultad se encuentra en cualquier otro procedimiento, lo que significa que, por ejemplo, hacer que los candidatos luchen en un circo a la manera romana hasta que sólo quede uno en pie, es un método **tan poco eficiente** como la votación usual: las minorías satisfechas serán distintas en uno u otro caso, pero en general no habrá ninguna mayoría satisfecha. No es ocioso recordar a este respecto que las ciudades griegas, a pesar de un contexto en general hostil, retrasaron su crecimiento o la formación de imperios, precisamente para mantener su tamaño por debajo aquel que hubiera imposibilitado la celebración de asambleas de los ciudadanos libres, a fin de tomar las decisiones mediante el diálogo, recurriendo sólo en último extremo a las votaciones. Recientemente Montañes (2008) ha propuesto una **matriz reflexiva** como método para intentar emular en esto último a la democracia griega clásica en los procesos de participación social.

Ciertamente también hay abusos. En evaluación ambiental, por ejemplo, es común el uso de múltiples indicadores que en realidad no pueden medirse de ninguna forma, y cuyos valores son asignados por expertos o por votaciones populares (tal es el caso de los precios en tanto *pseudo*medidas que usó Pareto). También se usan indicadores redundantes: miden lo mismo o casi lo mismo, de forma que están correlacionados y su presencia simultánea es a beneficio de adornar el estudio en cuestión. O indicadores arbitrarios, a fin de elevar a la primera clase la solución que tiene en mente quien paga el estudio. En el caso peor, al final, de todos estos indicadores... ¡se extrae una media ponderada volviendo así a una clasificación o una optimación de criterio único!

En conclusión, la clasificación multicriterio no es una sofisticación aunque sea rara, y allí donde se ha usado con rigor ha aportado mucha claridad al pensamiento.

3. Formulación básica

Sea un conjunto finito $\mathcal{C}$ en el que a todos y cada unos de sus elementos se les puede asignar p valores escalares, $V_1, \ldots, V_p$, cada uno de los cuales representa el desempeño del elemento en cuestión respecto de un criterio de **aptitud**. En lo que sigue supondré que un elemento es **más apto** según uno de los criterios i cuanto **menor** sea el valor V_i, es decir, los valores se interpretan como **costes**. (Si en un caso concreto, algún criterio j, por el contrario, valora un rendimiento que hay que mayorar, basta sustituir en lo que sigue V_j por, por ejemplo, $1 \div V_j$ si $V_j > 0$.)

Copyletf © 1996–2010 BCF+S under *Creative Commons* 3.0 Spain (cc by-nc-sa)
Copyletf © 1996–2010 BCF+S under *Creative Commons* 3.0 Spain (cc by-nc-sa)

Para cualesquiera $a, b \in \mathcal{C}$, diremos que a "es estrictamente preferible a" b (o que a "domina a" b), $a \prec b$, si y sólo si $V_i(a) \leq V_i(b)$ para $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ y además $\exists j$ tal que $V_j(a) < V_j(b)$. La relación binaria $\prec$ no es reflexiva, ni simétrica ni antisimétrica, pero sí es transitiva; además si $a \prec b$, b es necesariamente distinto de a; la relación $\prec$ es en consecuencia una relación de orden **en sentido estricto** sobre $\mathcal{C}$.

Consideremos una posible relación de equivalencia sobre $\mathcal{C}$ definida a partir de $\prec$. Para cualesquiera $a, b \in \mathcal{C}$, diremos que a "es estrictamente no-peor que" b, $a \precnsim b$, si y sólo si **no es cierto** que $a \prec b$ ni que $b \prec a$, es decir, que **no son ordenables** bajo $\prec$. La relación binaria $\precnsim$ es: a) reflexiva: $a \precnsim a$ dado que $a \nprec a$; b) simétrica: por definición. Veamos si es transitiva, es decir, si ocurre necesariamente que $a \precnsim b$ y $b \precnsim c$ implica que $a \precnsim c$. Es fácil mostrar que no es así si $p > 1$. Consideremos el caso sencillo $p = 2$, con $V_1(a) > V_1(b)$, $V_2(a) < V_2(b)$, es decir $a \precnsim b$; y con $V_1(b) < V_1(c)$, $V_2(b) > V_2(c)$, es decir $b \precnsim c$: nada impide que sea $V_1(a) < V_1(c)$ y también que $V_2(a) < V_2(c)$, es decir, $a \prec c$. Por tanto, $\precnsim$ **no es** una relación de equivalencia.

Para asegurar la transitividad necesitamos una segunda relación binaria. La relación $\prec$ establece una partición en el conjunto de pares de elementos de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, en dos subconjuntos: el de los pares de elementos que **no** verifican $\prec$, $\mathcal{N}$, y el de aquellos otros que **sí** lo hacen, $\mathcal{S}$. Sean $a, b \in \mathcal{C}$, diremos que a "es preferible a" b, $a \triangleleft b$, si y sólo si estamos en alguno de los dos siguientes casos: a) $(a, b) \in \mathcal{S}$; o, b) $(a, b) \in \mathcal{N}$ y existe $c \in \mathcal{C}$ tal que $(a, c), (c, a) \in \mathcal{N}$ y $(c, b) \in \mathcal{S}$. La relación $\triangleleft$, como $\prec$, es una relación de orden en sentido estricto.

Para cualesquiera $a, b \in \mathcal{C}$, diremos que a "es no-peor que" b, $a \ntrianglelefteq b$, si y sólo si **no es cierto** que $a \triangleleft b$ ni que $b \triangleleft a$, es decir, que **no son ordenables** bajo $\triangleleft$. La relación binaria $\ntrianglelefteq$ es: a) reflexiva: $a \ntrianglelefteq a$ dado que $b \nprec a$ y $b \prec a$ no pueden ser ciertos al mismo tiempo; b) simétrica: por definición; y c) transitiva: supongamos que no lo fuera, es decir, que $a \ntrianglelefteq b$, $b \ntrianglelefteq c$ pero no es cierto que $a \ntrianglelefteq c$. Entonces o bien es $a \triangleleft c$ o bien $c \triangleleft a$. En el primer caso, $(b, c) \in \mathcal{N}$ y $(b, a), (a, b) \in \mathcal{N}$ y puesto que $a \triangleleft c$, resulta que $b \triangleleft c$ lo que es absurdo puesto que $b \ntrianglelefteq c$. En el segundo caso, $(b, a) \in \mathcal{N}$ y $(c, b), (b, c) \in \mathcal{N}$ y puesto que $c \triangleleft a$, resulta que $b \triangleleft a$ lo que es también absurdo. La relación $\ntrianglelefteq$ es en consecuencia una relación de equivalencia sobre $\mathcal{C}$. Cuando $p = 1$, las relaciones $a \prec b$ y $a \triangleleft b$ equivalen a la comparación numérica habitual entre los valores, $V(a) < V(b)$, y la relación $a \ntrianglelefteq b$, a su igualdad numérica, $V(a) = V(b)$.

La relación $\ntrianglelefteq$ establece una partición de $\mathcal{C}$ en clases de equivalencia $A, B, \ldots$ Sea $a \in A$ y consideremos otra clase B. Entonces tiene que existir un elemento $b \in B$ tal que o $a \triangleleft b$ o bien $b \triangleleft a$, pues en otro caso $a \ntrianglelefteq b$ y necesariamente $A = B$. Por tanto, es posible ordenar tales clases. Con las clases ordenadas, $A_1 \triangleleft A_2 \triangleleft \ldots$, cualesquiera dos elementos de $\mathcal{C}$, o bien son equivalentes (pertenecen a la misma clase) o bien pueden ordenarse (son de distintas clases) y la relación de orden entre las clases implica una relación de orden total entre los elementos de $\mathcal{C}$. Si sólo existe una clase, se trata del propio conjunto. Si existen dos o más, la **primera** clase, A_1, reúne todos los elementos de $\mathcal{C}$ que son equivalentes o equiparables respecto a los criterios de aptitud considerados y que **no son más ineptos** que ningún otro elemento del conjunto: se trata del conjunto de **óptimos** de $\mathcal{C}$ respecto a $\mathcal{P}$, si por elemento **óptimo** se entiende que existe al menos un subconjunto de $\mathcal{C}$, para el que el elemento en cuestión es el primer elemento del subconjunto; es decir, que dado $a \in \mathcal{C}$, $\exists A \subset \mathcal{C}$ tal que $\forall b \in A,\ a \preceq b$. Nótese que esta definición de **óptimo** incluye la definición usual en el caso escalar ($p = 1$), pero en general resulta informalmente muy diferente: puede ocurrir que un elemento óptimo no sea más apto que ningún otro elemento: lo único que se exige es que no sea más inepto, es decir, peor. Si se quiere enfatizar esta significativa diferencia, es preferible denominar a la primera clase de $\mathcal{C}$ respecto a $\mathcal{P}$ como **el conjunto de elementos no-peores** de $\mathcal{C}$, también conocido como *Pareto set*, *non-dominated solution set*, etc.

Las diferencias entre el caso de un único criterio ($p = 1$) y el propiamente multicriterio ($p > 1$) se hacen más notables cuando se considera un conjunto potencialmente infinito de elementos (por ejemplo, de soluciones a un problema). En otros trabajos anteriores las he explorado con detalle (Vázquez, 1998). Baste señalar aquí cuatro de ellas.

I. En el caso $p = 1$ se trata de buscar la posición óptima a lo largo de una recta, de manera que la posición se puede medir con la distancia a un punto tomado como origen, es decir, con un **escalar**. Mientras que en los casos $p > 1$, se trata de buscar la posición óptima de un punto en un espacio p-dimensional, posición que puede describirse con comodidad mediante un **vector** de p componentes. Pues bien, la propia naturaleza de la métrica de los espacios vectoriales fuerza que frecuentemente no sea una, sino varias, las posiciones óptimas. Por ello es significativa la distinción entre la optimación **escalar** y la **vectorial**, denominaciones que uso a menudo como alternativa a uni- o multidimensional.

II. En el caso $p = 1$, la consideración de un subconjunto de $\mathcal{C}$ no acarrea grandes diferencias, salvo que el subconjunto no incluya el elemento óptimo. Incluso en este caso, no hay un cambio **estructural**: el elemento óptimo será sustituido por el óptimo del subconjunto. En los casos $p > 1$, la estructura de las clases de equivalencia de un subconjunto de $\mathcal{C}$ puede ser **muy diferente**, incluso

Copyletf © 1996–2010 BCF+S under *Creative Commons* 3.0 Spain (cc by-nc-sa)
Copyletf © 1996–2010 BCF+S under *Creative Commons* 3.0 Spain (cc by-nc-sa)
Copyletf © 1996–2010 BCF+S under *Creative Commons* 3.0 Spain (cc by-nc-sa)

cuando ambos conjuntos sólo se diferencian en un elemento. La razón estriba en que cada clase (y especialmente la primera) se **auto-define** así misma debido a la definición de $\lhd$, en la que para establecer una relación entre dos elementos puede necesitarse la concurrencia de un tercero—KAUFFMAN (2000: 177–184) ha argumentado vigorosamente que, en los conjuntos auto-definidos, la génesis de cada elemento no puede explicarse bajo ninguna hipótesis reduccionista al modo habitual de la física de NEWTON, EINSTEIN o BOHR. Esta diferencia es esencial en aquellos problemas en los que en primer lugar hay que encontrar las soluciones y, sólo después, encontrar las óptimas: sólo cuando estemos seguros de haber encontrado todas las soluciones posibles —es decir, de haber definido $\mathcal{C}$ de forma apropiada— podremos estar seguro de haber clasificado las soluciones óptimas correctamente.

III. En problemas de optimación (selección de los elementos más aptos de $\mathcal{C}$) cualquier miembro de la primera clase no es **descartable** respecto de sus compañeros de clase, aunque en general su aptitud respecto a cada uno de los criterios empleados pueda ser **muy diferente** de la de los demás. En el caso de la optimación con único criterio, dos elementos óptimos tienen el mismo desempeño y, respecto al criterio elegido, son **indistinguibles**. Con múltiples criterios, por el contrario, dos elementos de la clase óptima son equiparables o equivalentes, pero pueden ser perfectamente distinguibles en cuanto a su desempeño respecto a uno de los criterios elegidos. De hecho, si en un problema concreto sólo es posible elegir o seleccionar un único elemento de una clase óptima populosa, tal elección no puede realizarse **objetivamente**.

IV. En sistemas dinámicos que evolucionan, el número de criterios p puede variar con el tiempo. En tales casos, un aumento de su número puede tener como consecuencia que soluciones anteriormente peores pasen a integrar la clase óptima por su desempeño en las nuevas dimensiones. Lo contrario —que una solución no-peor pierda ese carácter— nunca será cierto, salvo que la dinámica del sistema incluya la **creación** de nuevos elementos de $\mathcal{C}$. Es decir que, conforme aumenta la dimensionalidad, aumentan (o permanecen igual) las alternativas óptimas, es decir, **aumentan o permanecen las posibilidades de elección** si es que hay que elegir una.

Dado un conjunto de criterios, para problemas de optimación sólo tiene interés práctico la determinación de la primera clase o clase óptima de $\mathcal{C}$. Sin embargo, cuando se trata de determinar si el conjunto de criterios elegidos representa bien las características de la situación real en un modelo matemático, el cálculo de las clases de equivalencia presenta un interés indudable. Veámoslo.

Un criterio V no es más que una aplicación de $\mathcal{C}$ sobre un conjunto de números, en la práctica el de los racionales. El criterio debe especificar como calcular $V(a)$ para cada elemento a de $\mathcal{C}$ de un modo algorítmico. Un conjunto de p criterios es una aplicación de $\mathcal{C}$ sobre el conjunto producto $\prod_1^p N$, siendo N el conjunto de números elegido. Cada conjunto de criterios o propiedades $\mathcal{P}$, junto con la relación "peor que", establece una partición de $\mathcal{C}$. Apoyándonos en la partición establecida por cada conjunto de criterios, $\mathcal{P}_i$, pueden establecerse los siguientes meta-criterios:

- Si $\mathcal{P}_i$ y $\mathcal{P}_j$ establecen la misma partición sobre $\mathcal{C}$ ambos conjuntos de criterios son equivalentes respecto a $\mathcal{C}$.
- Si para un criterio $V \notin \mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P} \cup \{V\}$ son equivalentes, el criterio V es **redundante** con los criterios de $\mathcal{P}$.
- Cualquier partición de $\mathcal{C}$ define implícitamente una relación de equivalencia en $\mathcal{C}$: $a \lesseqgtr b$ si y sólo si $\exists i$ tal que $a, b \in A_i$. Una partición de $\mathcal{C}$ es **redundante** de orden r respecto de un conjunto de p criterios $\mathcal{P}$, cuando todos los subconjuntos de $\mathcal{P}$ de $p - r$ propiedades establecen esa misma partición en $\mathcal{C}$, siendo $r < p$.

En el modelado de una situación real es evidente el interés de conocer cuando se están manejando criterios redundantes, y cual es el conjunto mínimo de criterios que definen una determinada partición de un conjunto, para el que la partición tendría una redundancia nula, problema que puede tener varias soluciones equivalentes. Como se ve, este tipo de cuestiones pueden enjuiciarse calculando las clases de equivalencia establecidas por los distintos conjuntos de criterios.

Para calcular las clases de equivalencia dados $\mathcal{C}$ y $\mathcal{P}$ basta con aplicar el siguiente algoritmo:

1. $C_1 \leftarrow \mathcal{C}$, $i \leftarrow 1$.
2. la clase óptima de C_i para $\mathcal{P}$ está formada por todos los elementos $a \in C_i$ para los que no existe otro elemento $b \in C_i$ tal que $b \prec a$; sea $\mathcal{O}_i$ tal clase, entonces:
   a) si $\mathcal{O}_i = C_i$, los conjuntos $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_i$ son las clases de equivalencia buscadas: **FIN**
   b) en otro caso, $C_{i+1} = C_i - \mathcal{O}_i$, $i \leftarrow i + 1$, **repetir 2**.

Si n es el número de elementos de $\mathcal{C}$ y p el de criterios, la complejidad temporal de este algoritmo es del orden de pn^3 y se trata de un algoritmo polinómico. Nótese que en el procedimiento recursivo la

Copyletf © 1996–2010 BCF+S under *Creative Commons* 3.0 Spain (cc by-nc-sa)
Copyletf © 1996–2010 BCF+S under *Creative Commons* 3.0 Spain (cc by-nc-sa)

relación binaria $\lhd$ resulta totalmente innecesaria, de hecho, su mención teórica es el precio que hay que pagar para poder dar una definición no-recursiva de las clases de equivalencia.

4. De la selección del más apto

> ‘‘Lo curioso de la teoría de la evolución’’ decía uno de los Huxley (aunque no recuerdo cual), ‘‘es que todo el mundo cree que la comprende.’’ El hecho se asemeja al modo en que los americanos admiran ciertas cosas de los británicos que, sin embargo, jamas emulan. (‘‘Dos pueblos separados por un idioma común’’, sentenciaba Winston Churchill.)
>
> Kauffman (2000:39)

Hay suficiente evidencia de que el modelo gradualista de la selección natural es capaz de explicar pequeñas variaciones de los fenotipos que redundan en la adaptación gradual a un ambiente gradualmente cambiante (como el caso de las polillas claras u oscuras según sea la contaminación de Londres). Pero hay pocas dudas de que ese modelo es insuficiente para explicar otras cuestiones igual o más importantes: ¿Cómo se adaptaron las especies que sobrevivieron a cambios críticos y rápidos en el ambiente, caso de las grandes extinciones? ¿De qué modo se produjeron las grandes transiciones simbióticas? (de la célula procariota a la eucariota, de ésta a los organismos pluricelulares, y de éstos a las especies sociales; véase Watson & Pollack, 2007.) ¿Sobre que objeto —gen, individuo, especie, ecosistema,. . . — actúa la selección natural? Y por último, ¿cómo es que surge la vida misma?

No es nuestro propósito aquí entrar al detalle de tan apasionante debate. Baste decir que la clasificación multicriterio es una pieza útil en el afán de conseguir un modelo matemático que aunque simple pueda explicar cualitativamente el conjunto de fenómenos que nos viene a la mente al oir ‘‘evolución’’, fenómenos que ocurren en organismos de muy diferentes tamaños y en lapsos temporales igualmente diversos, es decir, fenómenos con cierta invarianza con el tamaño (lo que apunta a su naturaleza fractal).

El problema fundamental se pone al descubierto cuando en ingeniería y en computación se usa el símil de la ‘‘ley del más fuerte’’ (o del ‘‘más adaptado’’, etc), a fin de mejorar de forma automática todo tipo de diseños (motores de aviación, circuitos electrónicos, *chips*, estructuras mecánicas, programas de ordenador, etc), mediante los denominados **algoritmos genéticos** —véase, por ejemplo, Vázquez (2002) para una breve introducción, o Goldberg (1989) para su uso práctico; véase Holland (1975) para la fundamentación matemática. En primer lugar, pronto se vió en este tipo de aplicaciones que la mutación era de importancia marginal frente a la recombinación; más importante aún, las poblaciones simuladas de objetos en su camino hacia un óptimo escalar perdían diversidad, terminando en el mejor de los casos como una población de clones con idéntico genotipo e igual desempeño respecto a la aptitud de interés (generalmente mínimo costo cumpliendo con ciertas condiciones de admisibilidad). Así, pronto se vió, que la noción tonta de la ley del más fuerte no podía explicar la apabullante diversidad de lo viviente (algo obvio, incluso en entornos artificiales como nuestras grandes conurbaciones a poco que se preste atención).

Aunque la clasificación multicriterio no es la respuesta definitiva a las cuestiones de más arriba, supone un claro avance hacia alguna explicación general de los sucesos **con historia**. Una regla de selección natural que se contente con impedir la reproducción de la **última clase** —la de los totalmente ineptos en una población concreta— produce a largo plazo los mismo efectos de **adaptabilidad** a la vez que mantiene una amplisima diversidad, especialmente entre los **más** adaptados. Pues aquí, ‘‘mejor adaptado que’’ significa simplemente pertenecer a una clase superior; y del mismo modo ‘‘igual de adaptado’’ **no significa** ni igual genotipo ni fenotipo. Con la clasificación multicriterio, la importancia del genotipo como unidad de selección se desvanece un tanto: son las aptitudes multifacéticas de los fenotipos (cualquiera que sean sus genes) las que ocupan el primer plano a la hora de aplicar la regla de selección. Este hecho sugiere un origen de la vida **muy distinto** a una sopa de genes a la espera de ser seleccionados. Además, en la optimación multicriterio de problemas difíciles, operadores como la mutación, la especiación, el elitismo, etc, cobran importancia cuando los algoritmos genéticos se usan en problemas de ingeniería, mostrando una sorprendente coincidencia con el vocabulario de la biología (Deb, 2001).

Más aún, las nuevas ideas tienden a considerar los organismos y sus ambientes como objetos que co-evolucionan en el tiempo: no sólo es que la musculatura de la gacela es esculpida por la garra del león como dicen los Masai, es que gacelas y leones esculpen la sabana, del mismo modo que ésta esculpe a aquellos. Estas ideas pueden representarse en la clasificación multicriterio, al menos desde un punto de vista teórico, definiendo los criterios de aptitud como aplicaciones que dependen de los elementos de $\mathcal{C}$ en cada momento, de forma que el entorno selectivo de cada elemento está compuesto no sólo por el espacio común, también por la influencia del resto de los elementos.

La clasificación multicriterio sugiere también que la **ingeniería inversa** de los ecosistemas podría arrojar mucha luz sobre qué significa la aptitud en la selección natural: al observar un ecosistema y sus jerarquías como una partición en el espacio de las especies, se trataría de establecer modelos multidimensionales de aptitud que permitan reproducir la partición observada: de conseguirse con aproximación suficiente, esos criterios serían al menos equivalentes, en el sentido enunciado más arriba, a los criterios que en verdad operan en el ecosistema en cuestión (para un ejemplo de ingeniería inversa —en este caso para averiguar las calificaciones otorgadas por un comité de selección—, cf. Vázquez, 2009:7–10). Quizás así podrían explicarse aparentes paradojas con la visión popular del neodarwinismo: por ejemplo, en una población abocada al colapso por su crecimiento, una pareja que decide no reproducirse ¿contribuye positivamente a la aptitud global de la especie en cuestión? A fin de cuentas, en la gestión práctica de nuestro planeta, la presión selectiva global viene dada por su finitud y por la existencia de recursos agotables para cualquier especie en crecimiento indefinido: "Niche forces individuals to share available resources and maintain appropriate diversity in a population" (Cheng & Li, 1997:1253). Merece la pena señalar aquí que en un algoritmo genético la población es generalmente estable, y desde luego ¡nunca crece indefinidamente! Si bien se mira, este hecho ha estado delante de nuestras narices desde que se postuló la selección del "más fértil". Pues si la fertilidad es considerada como criterio de aptitud no puede ser por otra razón que el hecho obvio de que en un planeta finito la población no puede crecer indefinidamente; desde este punto de vista, si la población ha de permanecer acotada, resulta obvio que incluso la eliminación al azar de individuos resulta en que permanezcan con mayor probabilidad aquellas características más repetidas, es decir, la de los individuos con mayor fertilidad; pero nótese que tal permanencia **ni siquiera** tiene que justificarse por un mejor desempeño en su modo de ganarse la vida debido a las características que se conservan: un accidente puede eliminar individuos bien adaptados pero vagos a la hora de reproducirse, sin embargo, muchas de sus características permanecerán a través de sus compañeros de especie gracias, en un sentido preciso, a que su eliminación **da espacio** a estos últimos.

Desde el momento en que uno considera que la especie humana es parte de la Naturaleza, sería deseable que una nueva teoría de la evolución pudiera explicar a la vez la evolución cultural y la biológica. De hecho, en un sentido preciso, debería tratarse de una teoría general de los acontecimientos contingentes, de una **historial natural**. Como señala Kauffman, la historia necesita sus "newtons" pero también sus "shakespeares": ciencia y humanidades tienen una cita pendiente. Una idea tampoco nueva: fue propuesta en el contexto de una formulación estética operativa sobre la obra de arte (Eco, 1968).

Finalmente, las ideas más recientes apuntan a explicar qué es un "agente autónomo" (en qué se diferencia de un sistema físico sin más, pregunta que en la época moderna nos lleva hasta la *Crítica del juicio* de Kant) y a considerar como objetos de la evolución tales agentes (o conjuntos auto-organizados de ellos, autónomos a su vez). Se ha propuesto incluso una cuarta ley de la termodinámica para los denominados "sistemas abiertos auto-constructivos" que, en síntesis, es ésta: "tales sistemas tienden a mayorar el número de clases de eventos que pueden suceder a continuación." (cf. Kauffman, 2000; y la diferencia IV de más arriba). Y por su implicación práctica, merece la pena subrayar las multiples evidencias que sugieren que, para cada clase de sistemas auto-constructivos, existe un márgen de tamaños fuera del cual o bien se retorna al frío orden de los sistemas físicos sin historia o bien se llega al caos que precede al colapso (Erdös *et* Rényi, 1960).

> Lo curioso en la teoría de la evolución es que todo el mundo cree que la comprende. Pero no es así. Una biosfera o una econosfera se construyen a sí mismas siguiendo unos principios que, hoy por hoy, nos resultan insondables.
>
> Kauffman (2000:39)

5. Notas sobre lógica borrosa, admisibilidad, ...

Aunque en general la formulación básica es **perfectamente** útil sin más adornos, es posible matizar alguno de sus aspectos para adaptarla a lo singular de problemas concretos.

La relación $\prec$ (y todas las derivadas) se formulan a partir de las relaciones habituales de igualdad y de orden entre los números del conjunto elegido para definir los criterios de aptitud. Nada impide sustituir esas relaciones (u operadores) por sus versiones borrosas (*fuzzy*). A parte de dar un toque **vanguardista** al *paper*, en abstracto no hay ventajas evidentes para hacerlo. Sin embargo, un caso a considerar es un operador borroso de igualdad entre números definido, por ejemplo, como: $r \stackrel{t}{=} s$ si $\mathrm{abs}\,(r-s) \leq t \cdot \mathrm{abs}\,(r+s)$, siendo t un valor prefijado. Su utilidad reside en "limar las aristas" de un espacio con geometría especialmente poliédrica. En el problema de Sofía,

Copyletf © 1996–2010 BCF+S under *Creative Commons* 3.0 Spain (cc by-nc-sa)

Copyletf © 1996–2010 BCF+S under *Creative Commons* 3.0 Spain (cc by-nc-sa)

por ejemplo, se trata de evitar que el equipo **E** sea equivalente al **J** sin más merito que haber tardado apenas unas décimas menos en la carrera de sacos: mediante el operador $\overset{1\,\%}{=}$ el equipo **E** resultará ser peor que el **H**, lo que es muy razonable **en nuestra opinión**.

En los problemas unidimensionales de optimación con significado real, además del criterio de optimidad, hay multitud de criterios de **admisibilidad**, requiriendo frecuentemente estos últimos más trabajo de análisis que aquél. Como los criterios de aptitud, los de admisibilidad son aplicaciones de $\mathcal{C}$ en un conjunto de números, pero aquí el conjunto es simplemente $\{0, 1\}$, significando el cero que el elemento (solución, alternativa, etc) **no es admisible**, y el uno lo contrario. La primera dificultad en un problema concreto puede ser encontrar soluciones admisibles, es decir, encontrar uno o varios elementos de $\mathcal{C}$ que merezcan nuestra consideración. Sólo después de encontrar un subconjunto de elementos admisibles tiene sentido preguntarse por la existencia de elementos óptimos (no-peores). La clasificación multicriterio puede incorporar los criterios de admisibilidad mediante las mismas estrategias empleadas en la optimación escalar, diversas y bien documentadas en la literatura técnica. La estrategia más general y robusta a la par que teóricamente más sencilla es ésta: aplicar la clasificación al subconjunto de los elementos admisibles de $\mathcal{C}$. Sin embargo, esta sencilla estrategia es, en ocasiones, computacionalmente muy costosa en términos de complejidad temporal, por lo que en la práctica hay que buscar alternativas menos sencillas. De entre estas, la más general consiste en convertir los criterios de admisibilidad en criterios de aptitud, admitiendo el riesgo de obtener un conjunto de soluciones no-peores pero inadmisibles —mediante esta técnica la clasificación multicriterio puede buscar soluciones para cualquier problema de optimación escalar sujeta a criterios de admisibilidad que sean **difíciles** de computar mediante técnicas clásicas; el riesgo antedicho puede evitarse mediante técnicas especiales; véase Fonseca *et* Fleming (1995) y Cheng *et* Li (1997).

La clasificación multicriterio puede verse como un caso especial de las distintas técnicas de agrupamiento de los elementos de un conjunto en clases por su similaridad (*clustering*, véase Samet, 2006). Pero se trata de un caso **especial** por varias razones: no sólo particiona el conjunto en clases, sino que las clases quedan ordenadas por su **proximidad** a un **ideal** de aptitud multievaluado; también resuelve el problema de la determinación del número de clases o *clusters* —un problema que hay que resolver previamente a la aplicación de algunos algoritmos de agrupamiento—; y, además, no requiere la elección —siempre subjetiva— de la métrica a emplear para medir la **similitud** entre dos elementos.

Por otra parte, la clasificación multicriterio es compatible con el agrupamiento por similaridad o proximidad: tal agrupamiento puede hacerse bien externamente (una partición alternativa de $\mathcal{C}$, resultando de las intersecciones entre las clases de una y otra partición una nueva partición en la que queda establecida una relación de orden parcial entre sus clases); o bien internamente, dividiendo cada clase de equivalencia en subclases por el criterio de proximidad elegido.

6. Epílogo

El consejo olímpico no tragó: el espíritu de las nuevas ideas de Sofía fue bien recibido, pero que la primera clase no coincidiera ni con los equipos con medallas… ¡eso no! (Las clasificaciones quedan sepultadas en los archivos, pero las medallas brillan en las vitrinas.) Sofía tuvo que sacar su carta de la manga, que no era otra que utilizar lógica borrosa para la carrera de sacos. Admitiendo la igualdad cuando la semidiferencia de las marcas no era superior al 20 % de su semisuma, la primera clase se redujo a cinco equipos, todos con medallas (Cuadro 2, derecha). El equipo **I** seguía relegado a la segunda clase, a pesar de sus medallas, pero la cosa estaba clara: el **H** le superaba en todo, así que el consejo optó por aceptar el apaño. Sofía al menos consiguió que el consejo acordara los detalles antes del inicio de la olimpiada y que se comprometiera a mantenerlos, le gustara o no el resultado obtenido. En su fuero interno sabía que se trataba de una componenda —¿por que no usar la misma lógica borrosa en las cuatro competiciones?—, pero también sabía que “lo mejor es enemigo de lo bueno” y que, para introducir nuevas ideas, era necesario (¡tantas veces!) ocultar lo subjetivo bajo el manto de la objetividad: en esto Región no era muy distinta del resto del mundo.

A la memoria de Antonio Estevan, en cuya biblioteca en Ondara nos estaba esperando *Investigaciones* de Stuart Kauffman.

Referencias

Bateson, Gregory (1972) *Steps to an Ecology of Mind.* Chandler Publishing Co.; New York. (Se cita la traducción castellana, *Pasos hacia una ecología de la mente.* Planeta; Buenos Aires, 1991)

Cheng, Franklin Y.; & Dan Li (1997) "Multiobjetive Optimization Design with Pareto Genetic Algorithm", *Journal of Structural Engineering*, v. 123, nº 9, pp. 1252–1261.

Coello Coello, C. A. (2005) "Twenty Years of Evolutionary Multi-Objective Optimization: A Historical View of the Field", *IEEE Computational Intelligence Magazine*, v. 1,nº 1, pp. 28–36

Coello Coello, C. A.; Lamont, G. B. *et* Van Veldhuizen, D. A. (2007) *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems.* s.c.: Springer, 2ª ed.

Deb, Kalyanmoy (2001) *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms.* Hoboken (NJ): John Wiley & Sons Inc.

Diamond, Jared (1997) *Guns, Germs, and Steel.* s.d. (se cita la traducción castellana de Fabián Sueca, *Armas, gérmenes y acero*, Madrid: Debate, 1998).

Eco, Umberto (1968) *La definizione dell'arte.* Milano: Mursia

Francis Ysidro Edgeworth (1881) *Mathematical Psychics.* London: P. Keagan, 1881.

Erdös, P.; *et* A. Rényi (1960) "On the evolution of random graphs", *Publications of the Math. Inst. of the Hung. Acad. of Sci.*, v. V, Series A, Fasc. 1–2, pp. 17–60.

Fonseca, Carlos M.; *et* Peter J. Fleming (1995) *Multiobjective Optimization and Multiple Constraint Handling with Evolutionary Algorithms I: A Unified Formulation.* Sheffield: University of Sheffield, Research Report 564.

Goldberg, David E (1989) *Genetic Algorithms in Search, Optimization & Machine Learning.* Reading (Mass): Addison-Wsley

Gowdy, John M. (2004) "Altruism, evolution, and welfare economics", *Journal of Economic Behavior & Organization*, Vol. 53, pp. 69-73.

Holland, J.H. (1975) *Adaptation in natural and artificial systems.* Ann Arbor (Mich): University of Michigan Press.

Kauffman, Stuart (2000) *Investigations.* New York: Oxford University Press. (Se cita la traducción castellana de Luis Enrique de San Juan, *Investigaciones*, Barcelona: Tusquets, 2003).

Kemp, Murray C.; & Paul Pezanis-Christou (1999) "Pareto's compensation principle", *Social Choice and Welfare*, v. 16, pp. 441–444.

Montañés Serrano, Manuel (2000) "Fundamentos que sustentan la necesidad de la participación conversacional en la transformación espacial", *Documentación Social*, nº 119, pp. 179–198.

Idem (2008) "La Matriz Reflexiva: justificación y procedimiento", en *Poder Político y Participación*, s.c., Gobierno Vasco: Dirección de Participación Ciudadana, pp. 147–152, http://www.redcimas.org/archivos/libros/parteliburu0412.pdf.

Naredo, José Manuel (1987) *La economía en evolución.* Madrid: Siglo XXI, 1ª edición.

Pareto, Vilfredo (1894) "Il massimo di utilità dato dalla libera concorrenza", *Giornale degli Economisti*, v. 9, nº 2, pp. 48-66.

Ramón, Fernando (1982) *Diseño urbano y planificación.* Madrid: Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo

Rolett, Barry; & Jared Diamond (2004) "Environmental predictors of pre-European deforestation on Pacific islands", *Nature*, v. 431, 23 september 2004, pp. 443–446.

Samet, H. (2006) *Foundations of Multidimensional and Metric Data Structures.* s.c.: Morgan Kaufman.

Vázquez Espí, Mariano (1988) "Siete malentendidos alrededor de la arquitectura vernácula", en *II Encuentro de trabajo sobre la tierra como material de construcción.* Soria: Centro de Investigación de Técnicas y de Materiales Autóctonos y de Construcciones Experimentales. pp. 199–210 (disponible en http://habitat.aq.upm.es/gi/mve/1988-smadlav.pdf).

Idem (1997) "Los límites de la técnica", *Ciudad y Territorio*, número 111, pp. 65-79. (ahora también en *Boletín CF+S*, número 3, http://habitat.aq.upm.es/boletin/n3)

Idem (1998) "Valores, medidas y teoría de la decisión", *Archipiélago*, número 33, pp. 90-100

Idem (2002) "Los algoritmos genéticos, o lo que "no" es la evolución", *Boletín CF+S*, nº 21, http://habitat.aq.upm.es/b/n21

Idem (2009) *Recurso de alzada ante la Secretaría General de Universidades del Ministerio de Educación del Reino de España.* España: Ministerio de Educación, Entrada nº 200900100050094 (disponible en http://habitat.aq.upm.es/gi/mve/2009-raalsgu.pdf).

Mariano Vázquez Espí, Margarita Luxan García de Diego, Agustín Hernández Aja, Gloria Gómez Muñoz (2007) "Sobre la evaluación ecológica de las instalaciones en los edificios", *El Instalador*, nº 438, pp. 42-68.

Copyletf © 1996–2010 BCF+S under *Creative Commons* 3.0 Spain (cc by-nc-sa)
Copyletf © 1996–2010 BCF+S under *Creative Commons* 3.0 Spain (cc by-nc-sa)
Copyletf © 1996–2010 BCF+S under *Creative Commons* 3.0 Spain (cc by-nc-sa)

Watson, Richard A.; & Jordan B. Pollack (2007) “Symbiotic Composition and Evolvability”, en *Advances in Artificial Life*, s.c.: Springer, pp. 480–490.

CUADRO 1:

Registros y clasificación

	C100L	TCA	C25S	ESC			
Equipo	seg	pto	seg	min	Pc	Pm	Medallas
A	31,9	7	32,5	44,111	I	8º	1O
B	31,4	15	100,4	41,643	II	9º	1B
C	44,1	4	84,6	33,798	II	11º	
D	32,1	2	55,8	21,641	I	5º	1P+1B
E	32,6	13	75,6	26,184	I	6º	
F	41,6	14	35,5	23,355	I	2º	1P+1B
G	30,3	11	106,0	32,648	II	10º	
H	25,0	18	76,4	20,909	I	1º	2O+1P
I	26,9	16	101,9	38,232	II	3º	1P+1B
J	29,4	12	67,4	40,511	I	4º	
K	36,5	0	106,0	58,128	III	12º	
L	22,8	11	70,0	54,305	I	7º	1O
medias	32,0	10	76,0	36,289			
min	22,8	0	32,5	20,909			
max	44,1	18	106,0	58,128			

Clases de equivalencia

Orden	Equipos
I	A D E F H J L
II	B C G I
III	K

Notas:
Pc: nueva clasificación
Pm: antigua clasificación

O: oro
P: plata
B: bronce

CUADRO 2:

Clasificaciones

estándar

Orden	Equipos
I	A D E F H J L
II	B C G I
III	K

sin el equipo **H**

Orden	Equipos
I	A D E F G I J L
II	B C
III	K

borrosa

Orden	Equipos
I	A D F H L
II	E G I J
III	B C
IV	K

Copyletf ⓒ 1996–2010 BCF+S under *Creative Commons* 3.0 Spain (cc by-nc-sa)

2010-cm.pdf

v20100530

Este documento pertenece a la

Biblioteca Ciudades para un Futuro Más Sostenible

http://habitat.aq.upm.es

Copyletf ⓒ 1996–2010 BCF+S under *Creative Commons* 3.0 Spain (cc by-nc-sa)

Copyletf ⓒ 1996–2010 BCF+S under *Creative Commons* 3.0 Spain (cc by-nc-sa)

Copyletf ⓒ 1996–2010 BCF+S under *Creative Commons* 3.0 Spain (cc by-nc-sa)